应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

两个各向异性半平面的焊接问题*

黄 小 玲

（广州中山大学数学系，1990年9月27日收到）

摘 要

本文利用复变函数方法，研究了两个各向异性半平面的焊接问题，得到了应力分布的封闭形式解。

关键词 焊接 各向异性 平面弹性

一、引 言

用复变函数方法研究各向同性平面弹性材料的静力平衡问题，已由许多作者研究过，例如[1～4]等。对于各向异性平面材料，这方面的研究还很少，仅有个别文献就一些特殊的情况进行了研究，例如[5～7]。

本文研究两个各向异性半平面的焊接问题。通过利用 Schwarz 积分公式和适当的变换，得到了应力分布的封闭形式解。

二、预 备 知 识

对于一各向异性平面材料，应力分量和位移分量可用两个函数$\Phi(z_1)$与$\Psi(z_2)$表示为[5]：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\mathrm{Re}[s_1^2\Phi'(z_1)+s_2^2\Psi'(z_2)]\\ \sigma_y&=2\mathrm{Re}[\Phi'(z_1)+\Psi'(z_2)]\\ \tau_{xy}&=-2\mathrm{Re}[s_1\Phi'(z_1)+s_2\Psi'(z_2)]\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

以及

$$u_x=2\mathrm{Re}[p_1\Phi(z_1)+p_2\Psi(z_2)],\quad u_y=2\mathrm{Re}[q_1\Phi(z_1)+q_2\Psi(z_2)]\tag{2.2}$$

在指定外力X_n，Y_n情况下，边界条件为

$$\left.\begin{aligned}2\mathrm{Re}[\Phi(z_1)+\Psi(z_2)]&=-\int_0^s Y_n ds+C_1=f_1\\ 2\mathrm{Re}[s_1\Phi(z_1)+s_2\Psi(z_2)]&=\int_0^s X_n ds+C_2=f_2\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

---

* 周焕文推荐。

国家自然科学基金资助项目。

其中z_j，p_j，q_j ($j=1,2$)为

$$z_j=x+s_jy \qquad (j=1,2)$$

$$p_j=a_{11}s_j^2+2a_{12}-a_{16}s_j \qquad (j=1,2)$$

$$q_j=(a_{12}s_j^2+a_{22}-a_{26}s_j)/s_j \qquad (j=1,2)$$

而$a_{jk}(j,k=1,2,6)$为弹性系数。s_1，$\bar{s}_1$，s_2，$\bar{s}_2$为特征方程

$$a_{11}s^4-2a_{16}s^3+(2a_{12}+a_{66})s^2-2a_{26}s+a_{22}=0$$

的根，且已设 $\mathrm{Im}s_j>0$ ($j=1.2$)。(方程无实根，参看[5])。

三、问题提法及解答

设有两个不同材料的弹性半平面，它们分别占有上、下半平面 Z^+，Z^-，其弹性系数分别为a_{jk}^+，a_{jk}^- ($j,k=1,2,6$)。相应地有s_j^+，s_j^-；p_j^+，p_j^-；q_j^+，q_j^- ($j=1,2$)。设在X轴上两种材料表面不能密切粘合，在$z=x$处，上、下岸纵坐标有位移差$h(x)$，并设$h(\pm\infty)=0$。把这两种材料沿整个X轴焊接起来，且使有相同横坐标的两点焊接在一起。所以上、下岸横坐标位移为零。不妨设无穷远处无应力、无转动。

仿射变换$z_j=x+s_jy$ ($j=1,2$)把Z平面的上、下半平面映射为Z_j平面的上、下半平面，Z平面的实轴映射X为Z_j平面的实轴X_j，且有

$$z|_{y=0}=z_j|_{y=0}=x \qquad (j=1,2)$$

故由(2.2)、(2.3)及上述条件，如以实轴X为跳跃曲线的分区全纯函数$\Phi(z)$，$\Psi(z)$ 满足边界条件：

$$2\mathrm{Re}[\Phi^+(x)+\Psi^+(x)]=2\mathrm{Re}[\Phi^-(x)+\Psi^-(x)]=f_1(x) \qquad x\in X \qquad (3.1)$$

$$2\mathrm{Re}[s_1^+\Phi^+(x)+s_2^+\Psi^+(x)]=2\mathrm{Re}[s_1^-\Phi^-(x)+s_2^-\Psi^-(x)]=f_2(x) \qquad x\in X \qquad (3.2)$$

$$2\mathrm{Re}[p_1^+\Phi^+(x)+p_2^+\Psi^+(x)-p_1^-\Phi^-(x)-p_2^-\Psi^-(x)]=0 \qquad x\in X \qquad (3.3)$$

$$2\mathrm{Re}[q_1^+\Phi^+(x)+q_2^+\Psi^+(x)-q_1^-\Phi^-(x)-q_2^-\Psi^-(x)]=h(x) \qquad x\in X \qquad (3.4)$$

则$\Phi(z_1)$，$\Psi(z_2)$即为此焊接问题的应力函数。这里$f_1(x)$，$f_2(x)$为设置的两个未知函数。

根据Schwarz公式[8]：

$$F^\pm(z)=\pm\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U^\pm(x)}{x-z}dx+i\alpha^\pm \qquad z\in Z^\pm \qquad (3.5)$$

其中$U^\pm(x)$为$Z^\pm$半平面中全纯函数$F^\pm(z)$在实轴上的实部，$\alpha^\pm$为任意实常数。

由(3.1)有

$$\Phi(z)+\Psi(z)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(x)}{x-z}dx+i\alpha^\pm \qquad z\in Z^\pm \qquad (3.6)$$

由(3.2)有：

$$s_1^\pm\Phi(z)+s_2^\pm\Psi(z)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(x)}{x-z}dx+i\beta^\pm \qquad z\in Z^\pm \qquad (3.7)$$

联立解(3.6)、(3.7)，得

$$\Phi(z)=\pm\frac{1}{s_2^\pm-s_1^\pm}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}[s_2^\pm f_1(x)-f_2(x)]\frac{dx}{x-z}+\lambda_1^\pm \qquad z\in Z^\pm \qquad (3.8)$$

$$\Psi(z)=\pm\frac{1}{s_2^\pm-s_1^\pm}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}(f_2(x)-s_1^\pm f_1(x))\frac{dx}{x-z}+\lambda_2^\pm \qquad z\in Z^\pm \qquad (3.9)$$

其中

$$\lambda_1^{\pm}=i(\beta^{\pm}-s_2^{\pm}\alpha^{\pm})/(s_1^{\pm}-s_2^{\pm}) \tag{3.10}$$

$$\lambda_2^{\pm}=-i(\beta^{\pm}-s_1^{\pm}\alpha^{\pm})/(s_1^{\pm}-s_2^{\pm}) \tag{3.11}$$

作对称延拓，令$\Phi_*(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$，$\Psi_*(z)=\overline{\Psi(\bar{z})}$，故$\Phi_*(z)$，$\Psi_*(z)$ 是以实轴为跳跃曲线的分区全纯函数，且$\Phi_*^+(x)=\overline{\Phi^-(x)}$，$\Psi_*^+(x)=\overline{\Psi^-(x)}$。

又因$\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}\bar{z}$，$\forall z\in C$，故(3.3)、(3.4)可写成下列形式

$$2\mathrm{Re}[p_1^+\Phi^+(x)+p_2^+\Psi^+(x)-\bar{p}_1^-\Phi_*^+(x)-\bar{p}_2^-\Psi_*^+(x)]=0 \tag{3.3$'$}$$

$$2\mathrm{Re}[q_1^+\Phi^+(x)+q_2^+\Psi^+(x)-\bar{q}_1^-\Phi_*^+(x)-\bar{q}_2^-\Psi_*^+(x)]=h(x) \tag{3.4$'$}$$

再利用Schwarz公式于(3.3)′，(3.4)′，得

$$p_1^+\Phi(z)+p_2^+\Psi(z)-\bar{p}_1^-\Phi_*(z)-\bar{p}_2^-\Psi_*(z)=i\alpha \qquad \mathrm{Im}z>0 \tag{3.12}$$

$$q_1^+\Phi(z)+q_2^+\Psi(z)-\bar{q}_1^-\Phi_*(z)-\bar{q}_2^-\Psi_*(z)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-z}\,dx+i\beta \qquad \mathrm{Im}z>0 \tag{3.13}$$

其中α，β为任意实常数。

将(3.8)、(3.9)代入(3.12)、(3.13)，则得

$$A\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(x)}{x-z}dx+B\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(x)}{x-z}\,dx=\lambda_3 \qquad \mathrm{Im}z>0 \tag{3.14}$$

$$C\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(x)}{x-z}\,dx+D\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(x)}{x-z}\,dx$$

$$=\lambda_4+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-z}\,dx \qquad \mathrm{Im}z>0 \tag{3.15}$$

其中：

$$A=(p_1^+s_2^+-p_2^+s_1^+)/(s_2^+-s_1^+)-(\overline{p_1^-s_2^-}-\overline{p_2^-s_1^-})/(s_2^--s_1^-) \tag{3.16}$$

$$B=(p_2^+-p_1^+)/(s_2^+-s_1^+)-(\bar{p}_2^--\bar{p}_1^-)/(s_2^--s_1^-) \tag{3.17}$$

$$C=(q_1^+s_2^+-q_2^+s_1^+)/(s_2^+-s_1^+)-(\overline{q_1^-s_2^-}-\overline{q_2^-s_1^-})/(s_2^--s_1^-) \tag{3.18}$$

$$D=(q_2^+-q_1^+)/(s_2^+-s_1^-)-(\bar{q}_2^--\bar{q}_1^-)/(s_2^--s_1^-) \tag{3.19}$$

$$\lambda_3=i\alpha-p_1^+\lambda_1^+-p_2^+\lambda_2^++\overline{p_1^-\lambda_1^-}+\overline{p_2^-\lambda_2^-}$$

$$\lambda_4=i\beta-q_1^+\lambda_1^+-q_2^+\lambda_2^++\overline{q_1^-\lambda_1^-}+\overline{q_2^-\lambda_2^-}$$

当$AD-BC\neq 0$时，联立解(3.14)、(3.15)，得唯一解：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(x)}{x-z}\,dx=\frac{1}{AD-BC}\left(\lambda_3D-\lambda_4B-\frac{B}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-z}\,dx\right) \qquad \mathrm{Im}z>0 \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(x)}{x-z}\,dx=\frac{1}{AD-BC}\left(\lambda_4A-\lambda_3C+\frac{A}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-z}\,dx\right) \qquad \mathrm{Im}z>0 \tag{3.21}$$

又由于$f_j(x)$ $(j=1,2)$是实函数，故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_j(x)}{x-z}\,dx=-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_j(x)}{x-\bar{z}}\,dx} \qquad \mathrm{Im}z<0 \tag{3.22}$$

将(3.20)、(3.21)、(3.22)代入(3.8)、(3.9)，并考虑到$\Phi(z_1)$，$\Psi(z_2)$ 改变常数项不影响应力分布状况，故最后得

$$\Phi(z_1)=\begin{cases}-\dfrac{A+s_2^+B}{(s_2^+-s_1^+)(AD-BC)}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-z_1}dx & \mathrm{Im}z_1>0\\[2ex] \dfrac{\overline{A}+s_2^-\overline{B}}{(s_2^--s_1^-)\overline{(AD-BC)}}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-z_1}dx & \mathrm{Im}z_1<0\end{cases}$$

$$
\Psi(z_2)=\begin{cases} \dfrac{A+s_1^+B}{(s_2^+-s_1^+)(AD-BC)}\,\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{h(x)}{x-z_2}dx & \mathrm{Im}z_2>0 \\ -\dfrac{\bar{A}+s_1^-\bar{B}}{(s_2^--s_1^-)(AD-BC)}\cdot\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{h(x)}{x-z_2}dx & \mathrm{Im}z_2<0 \end{cases}
$$

本文在写作过程中，承蒙路见可教授、周焕文教授的热情指导，谨表谢意！

参 考 文 献

[1] 穆斯海里什维利, H.U.,《数学弹性力学中的几个基本问题》, 科学出版社 (1958).

[2] 路见可, 《平面弹性复变方法》, 武汉大学出版社, 武汉 (1986).

[3] Milne-Thomson, L. M., *Plane Elastic Systems*, Spring-Verlag, Berlin (1960).

[4] England, A.H., *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley, London (1971).

[5] 列赫尼茨基, C. Γ., 《各向异性板》, 科学出版社, 北京 (1955).

[6] 蔡海涛, 关于半无限各向异性弹性介质的第一与第二基本问题, 力学学报, 11(3) (1979), 240—247.

[7] 蔡海涛, 平面各向异性弹性介质的周期裂纹问题, 数学物理学报, 2(1) (1982), 35—44.

[8] Ahlfors, Lars V., 《复分析》, 上海科学出版社, 上海 (1984).

The Welding Problem of Two Half-Planes with Anisotropic Media

Huang Xiao-ling

(*Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou*)

Abstract

In this paper, the welding problem of two half-planes with anisotropic media is considered. By means of the complex variable method, the stress distribution is given in closed forms.

Key words welding, anisotropic, plane elastic