

# 非线性球形薄膜的膨胀失稳\*

尚 新 春

(兰州大学力学系, 1990年9月22日收到)

## 摘 要

本文应用分支理论研究了非线性球形薄膜在轴对称大变形膨胀过程中的失稳问题. 证明了所论非线性边值问题的奇点只能是单重极限点, 并讨论了载荷和材料两个参数对球形薄膜平衡状态及其稳定性的影响.

**关键词** 超弹性 分支理论 多参数影响

## 一、引 言

早在50年代初 Adkins 和 Rivlin<sup>[1]</sup>就曾研究过超弹性球形薄膜的膨胀大变形问题. 后来, Green 和 Adkins<sup>[2]</sup>, Eringen<sup>[3]</sup>等进一步指出球形薄膜在大变形膨胀过程中会发生失稳. Smith<sup>[4]</sup>和 Alexander<sup>[5]</sup>还进行过实验研究. 有关这一课题, Sewell<sup>[6]</sup>用突变理论, Haughton 和 Ogden<sup>[7]</sup>用增量方程分别作了深入的讨论.

本文研究了球形薄膜在大变形膨胀过程中由于材料的物理非线性所引起的极限型失稳问题. 首先, 从超弹性薄膜的有限变形理论出发, 将问题在数学上归结为含三个未知变量和两个参数的非线性常数微分方程组的两点边值问题. 其次, 应用文[8]中的一般分支理论并借助于 Legendre 函数的性质, 对平凡解处的线性化问题进行了分析. 证明了问题的奇点只能是单重极限点. 从而, 指出球形薄膜的轴对称膨胀过程中的平衡状态只可能是球对称模式. 最后, 还讨论了载荷和材料两个参数对球形薄膜平衡状态及其稳定性的影响, 并给出了参数影响区域.

## 二、问题的数学描述

薄膜的轴对称大变形可以由它的中面变形来描述. 取空间柱坐标系  $(r, \theta, z)$  与物理柱坐标系  $(R, \Theta, Z)$  重合. 设薄膜变形前的中面是以  $Z$  轴为对称轴的光滑旋转曲面, 记作  $Z=Z(R)$  ( $a \leq R \leq b$ ). 假设在轴对称的法向内部压力下, 薄膜始终保持几何形状上的轴对称. 即变形后的中面仍为旋转曲面, 并且变形前中面上的经线与纬线经过变形成为变形后中面上的经线与

\*叶开沅推荐.

国家自然科学基金资助项目.

纬线。显然，经线与纬线既是中面的主曲率线又是主伸长迹线。

设变形前中面上某一物质点的坐标为 $(R, \Theta, Z)$ 其变形后的空间位置坐标为 $(r, \theta, z)$ 。由于变形是轴对称的，故有 $\theta \equiv \Theta$ 。记 $A, \alpha$ 分别为变形前后中面的外法向与 $Z$ 轴的夹角。其中 $A = A(R) = \arctg(dZ/dR)$ 是已知函数。

经向、纬向和法向的主伸长率为

$$\lambda_1 = \frac{\cos A}{\cos \alpha} \frac{dr}{dR}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H} \quad (2.1a, b, c)$$

其中 $H, h$ 分别为变形前后薄膜的厚度。这里假设 $H$ 为常数，并且沿法线方向的变形是均匀的。

变形后中面上经线与纬线的主曲率为

$$\kappa_1 = \frac{d}{dR}(\sin \alpha) / \frac{dr}{dR}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin \alpha}{r} \quad (2.2)$$

记 $T_1$ 和 $T_2$ 分别为变形后中面上经线和纬线方向的薄膜力，它们均为单位弧长上的力。平衡方程可写成<sup>[9]</sup>

$$d(rT_1)/dR = T_2 dr/dR, \quad \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 = P \quad (2.3)$$

这里， $P$ 是单位面积上的法向压力载荷，它被假定为常数。

设薄膜材料是 Mooney-Rivlin 型不可压超弹性物质，其应变能函数为

$$W = C [(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3)]$$

并且， $\lambda_3 = 1/\lambda_1 \lambda_2$  (2.4)

其中 $C$ 和 $\beta$ 是材料常数， $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}$ ， $I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + (\lambda_1 \lambda_2)^2$ 为应变的第一、二不变量。

本构方程可以表示为<sup>[9]</sup>

$$T_1 = 2CH(1 + \beta \lambda_1^2) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right), \quad T_2 = 2CH(1 + \beta \lambda_2^2) \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \quad (2.5)$$

(2.1a, b), (2.2), (2.3)和(2.5)给出8个未知量 $r, \alpha, \lambda_1, \lambda_2, \kappa_1, \kappa_2, T_1, T_2$ 满足的8个方程。

引入如下无量纲变量和参数：

$$x = \frac{R}{b}, \quad y_1 = \frac{r}{b}, \quad y_2 = \alpha, \quad y_3 = \frac{h}{H}, \quad \xi_1 = \frac{T_1}{2CH}, \quad \xi_2 = \frac{T_2}{2CH}$$

$$A = \frac{Pb}{2CH}, \quad Z = \frac{Z}{b}, \quad \Phi(x) = \cos A = \left[ 1 + \left( \frac{dZ}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

由(2.1)~(2.5)可以导出无量纲形式的基本方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{x}{\Phi(x)} \cdot \frac{\cos y_2}{y_1 y_3}, \quad \dot{y}_2 = \frac{x}{\Phi(x)} \cdot \frac{\cos y_2}{y_1 y_3 \xi_1} \left( A - \frac{\sin y_2}{y_1} \xi_2 \right) \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{\eta_3} \left( \frac{x}{\Phi(x)} \cdot \frac{\cos y_2}{y_1 y_3} \eta_1 - \eta_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6a, b, c)$$

其中

$$\xi_1 = \left( \frac{x^2}{y_1^2 y_3^2} - y_3^2 \right) \left( 1 + \beta \frac{y_1^2}{x^2} \right), \quad \xi_2 = \left( \frac{y_1^2 y_3^2}{x^2} - y_3^2 \right) \left( 1 + \beta \frac{x^2}{y_1^2 y_3^2} \right)$$

$$\eta_1 = \left( \frac{y_1 y_3}{x^2} + \frac{x^2}{y_1^2 y_3} \right) + \beta \left( \frac{3y_1 y_3^2}{x^2} - \frac{x^2 y_3}{y_1^2} \right)$$

$$\eta_2 = 2 \left( \frac{x}{y_1^2 y_3} + \beta \frac{y_1^2 y_3^2}{x^3} \right), \quad \eta_3 = \left( \frac{x^2}{y_1^2 y_3^2} + 3y_3^2 \right) + \beta \left( \frac{3y_1^2 y_3}{x^2} + \frac{1}{y_3^2} \right)$$

算子  $(\cdot) = d(\cdot)/dx$ ,  $A \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  分别为载荷和材料参数.

在球形薄膜的膨胀问题中边界条件为

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = \pi/2 \quad (2.7)$$

并且, 
$$\Phi(x) = (1-x^2)^{1/2} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.8)$$

(2.6a, b, c) 和 (2.7) 给出一个非线性常微分方程的两点边值问题, 记作 (EP). 它描述了球形薄膜轴对称大变形的平衡状态.

记

$$y = (y_1, y_2, y_3)^T, \quad f = (f_1, f_2, f_3)^T, \quad g(y(0), y(1)) = B_0 y(0) + B_1 \dot{y}(1) + B$$

其中  $f_1, f_2, f_3$  分别为 (2.6a, b, c) 的右端函数.

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \left( 0, 0, -\frac{\pi}{2} \right)^T$$

于是, (EP) 可以写成如下形式:

$$\dot{y} - f(x, y; A) = 0, \quad g(y(0), y(1)) = 0 \quad (2.9)$$

其中  $f: [0, 1] \times R^3 \times R \times R \rightarrow R$ ,  $g: R^3 \times R \rightarrow R^3$  是连续可微的.

选取 Banach 空间  $X \equiv C^1[0, 1] \equiv \{y(x) | y(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续可微}\}$  和  $Y \equiv C[0, 1] \times R^3 \equiv \{(y(x), w) | y(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续, } w \in R^3\}$ , 并且范数

$$\|y\|_X = \max_{x \in [0, 1]} |y(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |\dot{y}(x)|, \quad \|(y(x), w)\|_Y = \max_{x \in [0, 1]} |y(x)| + \|w\|$$

这里,  $\|\cdot\|$  表示  $R^3$  中向量的模. 构造  $X$  到  $Y$  的非线性映射<sup>[8]</sup>

$$F(y, A) \equiv (\dot{y} - f(x, y(x); A), g(y(0), y(1))) \quad (2.10)$$

显然, (EP) 等价于算子方程

$$F(y, A) = 0 \quad (2.11)$$

### 三、线性化问题

对于任意的实数  $A \geq 0$  和  $\beta \geq 0$ , 易知 (EP) 的平凡解为

$$y_1^* = \lambda x, \quad y_2^* = \arctg \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}, \quad y_3^* = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.1)$$

其中  $\lambda = \lambda(A)$  是由下式确定的反函数:

$$A = (1/\lambda - 1/\lambda^7)(1 + \beta\lambda^2) \quad (3.2)$$

平凡解 (3.1) 对应于球对称膨胀大变形的平衡状态,  $\lambda$  的物理意义是径向和纬向的均匀主伸长率.

现在来讨论是否会从平凡解 (3.1) 上分支出 (EP) 的非平凡解来. 即要回答球形薄膜在膨胀大变形过程中除了球对称的平衡状态之外, 是否还存在着其它轴对称形式的平衡状态. 根据分支的一般理论<sup>[8]</sup>, 要解决上述问题必须确定算子方程 (2.11) 的奇点及其性态.

为此, 将算子方程 (2.11) 在平凡解 (3.1) 处线性化, 得到

$$F_y(y^*, A)u = (\dot{u} - f_y(x, y^*; A)u, B_0 u(0) + B_1 u(1)) = 0 \quad (3.3)$$

其中  $f_y(x, y^*; A) = \partial(f_1, f_2, f_3) / \partial(y_1, y_2, y_3) |_{y=y^*}$  是  $f$  关于  $y$  的 Jacobi 矩阵在  $y=y^*$  处的值。

(3.3) 可以写成如下具体形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 + x^{-1}u_1 + \lambda x(1-x^2)^{-1/2}u_2 + \lambda^3u_3 &= 0 \\ \dot{u}_2 + x^{-1}u_2 + K_1(\lambda)(1-x^2)^{-1/2}u_3 &= 0 \\ \dot{u}_3 - K_2(\lambda)(1-x^2)^{-1/2}u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4a, b, c)$$

$$u_1(0) = u_2(0) = u_2(1) = 0 \quad (3.5a, b, c)$$

其中

$$K_1(\lambda) = \lambda^2[(1-1/\lambda^6) - \beta(\lambda^2 + 5/\lambda^4)] / [(1-1/\lambda^6)(1+\beta\lambda^2)] \geq 0 \quad (3.6)$$

$$K_2(\lambda) = 2(1+\beta/\lambda^4) / [\lambda^2(1+3/\lambda^6)(1+\beta\lambda^2)] > 0$$

记线性化问题(3.4)和(3.5)为(LP)。将使得  $F_y(y^*, A^*)$  无有界逆的点  $(y^*, A^*)$  称为(2.11)的奇点<sup>[6]</sup>。即当  $A=A^*$  时(LP)存在非零解。

令  $v(v+1) = K_1(\lambda)K_2(\lambda)$ , 不妨设  $v > -1$ 。作如下变数替换:

$$t = (1-x^2)^{1/2}, \quad v_i(t) = u_i(x) \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

从(3.4b, c)中消去未知量  $u_2$ , 可得

$$(1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} v_3 - 2t \frac{d}{dt} v_3 + v(v+1)v_3 = 0 \quad (3.8)$$

这是  $\nu$  阶 Legendre 方程, 它的通解为

$$v_3(t) = C_1 P_\nu(t) + C_2 Q_\nu(t) \quad (3.9)$$

其中  $P_\nu(t)$ ,  $Q_\nu(t)$  分别为第一、第二类 Legendre 函数,  $C_1$  和  $C_2$  是积分常数。

将(3.9)代入(3.4c)得

$$v_2(t) = -((1-t^2)^{1/2}/K_2(\lambda))(C_1 P'_\nu(t) + C_2 Q'_\nu(t)) \quad (3.10)$$

由于<sup>[10]</sup>  $\lim_{t \rightarrow 1} (1-t^2)^{1/2} P'_\nu(t) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1-0^+} (1-t^2)^{1/2} Q'_\nu(t) = +\infty$ , 再由边值条件(3.5b), 可知  $C_2 = 0$ 。

将(3.9), (3.10)代入(3.4a)解得

$$v_1(t) = -C_1 \frac{1}{(1-t^2)^{1/2}} \int_t^1 \left[ \frac{\lambda}{K_2(\lambda)} (1-s^2) P'_\nu(s) - \lambda^3 s P_\nu(s) \right] ds \quad (3.11)$$

使用边值条件(3.5c)可知(LP)有非零解的充要条件是

$$P'_\nu(0) = 0 \quad (3.12)$$

由于<sup>[10]</sup>  $P'_\nu(0) = \frac{2\Gamma(1+\nu/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+\nu/2)} \sin \frac{\nu\pi}{2}$

故有  $\nu = 2n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), 从而,

$$K_1(\lambda)K_2(\lambda) = 2n(2n+1) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

将  $K_1(\lambda)$  和  $K_2(\lambda)$  的表达式(3.6)代入(3.13)得到

$$\beta^2 \lambda^4 (a_{11} \lambda^{12} + a_{12} \lambda^6 - a_{13}) + \beta \lambda^2 (a_{21} \lambda^{12} + a_{22} \lambda^6 - a_{23}) + (a_{31} \lambda^{12} + a_{32} \lambda^6 - a_{33}) = 0 \quad (3.14)$$

其中

$$a_{11} = 2n^2 + n, \quad a_{12} = 4n^2 + 2n + 1, \quad a_{13} = 6n^2 + 3n - 5$$

$$a_{21} = 4n^2 + 2n + 1, \quad a_{22} = 8n^2 + 4n + 4, \quad a_{23} = 12n^2 + 6n - 7$$

$$a_{31} = 2n^2 + n - 1, \quad a_{32} = 4n^2 + 2n + 7, \quad a_{33} = 6n^2 + 3n$$

注意到关系式(3.2), 可知当参数  $A \geq 0$  时恒有  $\lambda \geq 1$ 。可以证明对于任给整数  $n \geq 1$  和实参

数 $\beta$ , 方程(3.14)不存在根 $\lambda^* \geq 1$ . 事实上, 假若 $n \geq 1$ 时方程(3.14)有根 $\lambda^* \geq 1$ , 则所有系数 $a_{ij} > 0$  ( $i, j=1, 2, 3$ ). 并且, 方程(3.14)的左端

$$\geq \beta^2 \lambda^{*4} (a_{11} + a_{12} - a_{13}) + \beta \lambda^{*2} (a_{21} + a_{22} - a_{23}) + (a_{31} + a_{32} - a_{33}) = 6(1 + \beta \lambda^{*2})^2 > 0$$

这与 $\lambda^*$ 是方程(3.14)的根相矛盾. 因此, 只须考虑 $n=0$ 的情形. 此时, 方程(3.14)成为

$$G(\lambda; \beta) = \beta \lambda^6 - \lambda^6 + 5\beta \lambda^2 + 7 = 0 \tag{3.15}$$

其中,  $\lambda \geq 1, \beta \geq 0$ . 此时, 由(3.13)知

$$K_1(\lambda^*) = 0 \tag{3.16}$$

这里,  $\lambda^*$ 是方程(3.15)的根, 将它代入(3.1)、(3.2)便得(2.11)或(EP)的奇点 $(y^*, A^*)$ .

### 四、奇点的性态以及参数对平衡状态的影响

(3.15)在 $(\lambda, \beta)$ 平面上表示一条关系曲线 $\lambda^* = \lambda^*(\beta)$ , 它由图1所示. 对于给定的参数 $\beta$ 由图1可知 $\lambda^*$ , 再利用(3.2)得到 $A^*$ . 关系曲线 $A^* = A^*(\beta)$ 由图2给出. 根据图1和图2对(2.11)或(EP)的奇点可分四种情形进行讨论.

**情形i**  $\beta=0$ 时, (3.15)仅有一个实根 $\lambda^* = 7^{1/6} \approx 1.383$ , 并且 $A^* \approx 1.239$ . 此时, (EP)或(2.11)仅有一个奇点 $(y^*, A^*)$ .

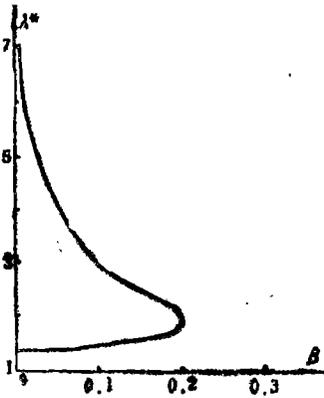


图1  $\lambda^*$ 随 $\beta$ 变化的曲线

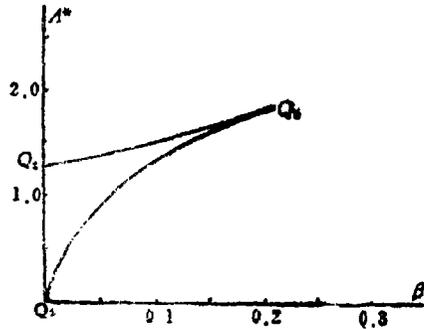


图2 参数 $A^*$ 和 $\beta$ 关于平衡状态及稳定性的影响域

**情形ii**  $0 < \beta < \beta_1 \approx 0.214$ 时, (3.15)有两个互异的实根 $1 < \lambda^{*(1)} < \lambda^{*(2)}$ , 并且 $A_1^* > A_2^* > 0$ . 此时, (EP)或(2.11)有两个奇点 $(y^{*(1)}, A_1^*)$ 和 $(y^{*(2)}, A_2^*)$ .

**情形iii**  $\beta = \beta_1$ 时, (3.15)有两个相等的实根 $\lambda^{*(1)} = \lambda^{*(2)} = (19 + 6\sqrt{11})^{1/6} \approx 1.841$ , 并且 $A_1^* = A_2^* \approx 1.828$ . 此时, (EP)或(2.11)仅有一个奇点 $(y^*, A^*)$ .

**情形iv**  $\beta > \beta_1$ 时, (3.15)无实根, 故(EP)或(2.11)不存在奇点.

下面证明上述奇点都是(EP)或(2.11)的单重极限点. 根据分支理论<sup>[8]</sup>,  $(y^*, A^*)$ 是(2.11)的单重极限点是指

- (i)  $\dim \text{Null } F_y(y^*, A^*) = 1$ ,
- (ii)  $F_A(y^*, A^*) \notin \text{Rang } F_y(y^*, A^*)$ .

条件(i)意味着当 $A = A^*$ 时(LP)仅有一个线性无关的解. 将 $v = 2n = 0$ 和 $C_2 = 0$ 代入(3.9)~(3.11), 利用变换(3.7)得到

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T = C_1(1, 0, \lambda^{*3}x/2)^T$$

由此可知, 条件(i)被验证.

条件(ii)等价于当  $\lambda = \lambda^*$  时如下边值问题无解:

$$w - f_1(x, y^*; \lambda^*) = f_2(x, y^*; \lambda^*), \quad B_0 w(0) + B_1 w(1) = 0 \quad (4.1)$$

它可以写成

$$\left. \begin{aligned} w_1 + \frac{1}{x} w_1 + \lambda^* \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} w_2 + \lambda^{*3} w_3 = 0 \\ w_2 + \frac{1}{x} w_2 + \frac{K_1(\lambda^*)}{(1-x^2)^{1/2}} w_3 = \frac{K_3(\lambda^*)}{(1-x^2)^{1/2}}, \quad w_3 + \frac{K_2(\lambda^*)}{(1-x^2)^{1/2}} w_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_2(1) = 0 \quad (4.3)$$

其中  $K_3(\lambda^*) = 1/\lambda^* > 0$ . 注意到此时有(3.16), 不难验证边值问题(4.2)、(4.3)无解. 从而, 条件(ii)满足.

由于(EP)或(2.11)的奇点都是单重极限点, 因此, 在平凡解(3.1)、(3.2)上不会发生分支. 意即球形薄膜在轴对称膨胀过程中的平衡状态只可能是球对称模式.

应该注意载荷参数  $\lambda$  和材料参数  $\beta$  的取值不同, 会使得(3.1)、(3.2)所表示的平凡解的个数不同. 对应于同一个  $(\lambda, \beta)$  的值可能会有多个球对称的平衡状态存在, 可能还会发生从一个不稳定的平衡状态向稳定的平衡状态跳跃的现象即失稳<sup>[5]</sup>.

关系式(3.2)可用  $\lambda$  与  $\lambda$  的关系曲线来表示, 如图3所示. (亦见[1], [4]类似的曲线). 图2和图3表明:

(i) 当  $(\lambda, \beta)$  在曲边三角形区域  $Q_1 Q_2 Q_3$  外部取值时, 仅有一个平衡状态.

(ii) 当  $(\lambda, \beta)$  在不包含  $Q_1, Q_2, Q_3$  三个顶点的三条边界  $Q_1 Q_2, Q_2 Q_3, Q_3 Q_1$  上取值时, 有两个平衡状态.

(iii) 当  $(\lambda, \beta)$  在三个顶点  $Q_1, Q_2, Q_3$  上取值时, 仅有一个平衡状态.

(iv) 当  $(\lambda, \beta)$  在曲边三角形区域  $Q_1 Q_2 Q_3$  内部取值时, 存在三个平衡状态.

为了考察上述平衡状态的稳定性, 需要分析平凡解(3.1)、(3.2)所对应的总势能

$$\Pi = W V_H - P \Delta V \quad (4.4)$$

其中应变密度

$$W = C \left[ (2\lambda^2 + 1/\lambda^4 - 3) + \beta(2/\lambda^2 + \lambda^4 - 3) \right]$$

变形后薄膜的体积

$$V_H = 4\pi r^2(b) \cdot h = 4\pi b^2 H$$

薄膜所围体积的改变

$$\Delta V = -\frac{4\pi}{3} (r^3(b) - r^3(a)) = -\frac{4\pi}{3} b^3 (\lambda^3 - 1)$$

总势能的无量纲化形式为

$$\bar{\Pi} = \frac{\Pi}{4\pi b^2 C H} = \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) + \beta \left( \frac{2}{\lambda^2} + \lambda^4 - 3 \right) - \frac{2}{3} \lambda (\lambda^3 - 1) \quad (4.5)$$

当薄膜处于平衡状态时, 即(3.2)式成立时则有

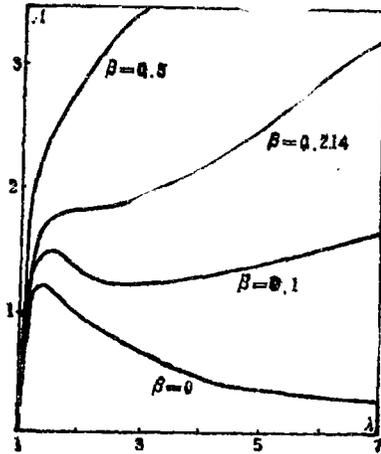


图3  $\lambda$  依赖于  $\lambda$  的曲线

$$\delta\bar{\Pi} = 2\lambda^2[(1/\lambda - 1/\lambda^7)(1 + \beta\lambda^2) - A]\delta\lambda = 0, \quad \delta^2\bar{\Pi} = \lambda^2 A'(\lambda)(\delta\lambda)^2 \quad (4.6)$$

显然, 当  $A'(\lambda) < 0$  时,  $\bar{\Pi}$  取极大值, 即平衡状态不稳定; 当  $A'(\lambda) > 0$  时,  $\bar{\Pi}$  取极小值, 即平衡状态是稳定的; 当  $A'(\lambda) = 0$  时, 即  $\lambda = \lambda^*$ ,  $A = A^*$  时,  $\bar{\Pi}$  取拐点值。此时对应的平衡状态是随遇平衡的。换句话说, 失稳将在此时发生。从图3上看, 曲线  $A = A(\lambda)$  上位于单调上升的曲线段上的点则代表稳定的平衡状态; 相反地, 位于单调下降的曲线段上的点则代表不稳定的平衡状态; 而在具有水平切线的点则是随遇平衡的。

作者感谢程昌钧教授对本文的热情指导。

### 参 考 文 献

- [1] Adkins, J. E. and R. S. Rivlin, Large elastic deformations of isotropic materials, Part II; *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, 244 (1952), 505—531.
- [2] Green, A. E. and J. E. Adkins, *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*, Chap. 4, Clarendon Press (1960).
- [3] Eringen, A. C., *Non-Linear Theory of Continuous Media*, Chap. 6, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1962).
- [4] Hart-Smith, L. J., Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials, *ZAMP*, 17 (1966), 608—626.
- [5] Alexander, H., Tensile instability of initially spherical balloons, *Internat. J. Engrg. Sci.*, 9 (1971), 151—162.
- [6] Sewell, M. J., Some mechanical examples of catastrophe theory, *Bull. Inst. Math. Appl.*, 12 (1976), 163—172.
- [7] Haughton, D. M. and R. W. Ogden, On the incremental equations in non-linear elasticity, I. Bifurcation of pressurized spherical shell, *J. Mech. Phys. Solids*, 26 (1978), 111—138.
- [8] 朱正佑、程昌钧, 《分支问题的数值计算方法》, 第三章, 兰州大学出版社 (1989).
- [9] Yang, W. H. and W. W. Feng, On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes, *Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech.*, 92 (1970), 1002—1011.
- [10] Erdelyi, A., *Higher Transcendental Functions*, I, Chap. 3, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1953).

## Tensile Instability of Nonlinear Spherical Membrane with Large Deformation

Shang Xin-chun

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

### Abstract

The problem on instability of nonlinear spherical membrane with large axisymmetric tensile deformations is investigated by using the bifurcation theory. It is proved that all singular points of the nonlinear boundary value problem must be simple limit points. The effect of loading and material parameters on the equilibrium state and its stability is discussed.

**Key words** hyperelasticity, bifurcation theory, effect of multiple parameters