

半球壳弯曲振动的分析*

樊尚春 刘广玉 王振均

(北京航空航天大学, 1990年6月20日收到)

摘 要

本文对半球壳的弯曲振动(频率)进行了详细地分析研究, 给出了壳体两端边界角及壁厚变化时, 谐振频率的变化规律. 对于研制半球壳作为敏感部件的仪表如半球壳谐振陀螺仪有重要的应用价值.

关键词 半球壳 弯曲振动 谐振频率 谐振陀螺

一、简 述

半球壳谐振陀螺仪HRG (hemispherical resonator gyro)是近年来迅速发展起来的一种无转子和支承的新型陀螺仪^[1]. 它的敏感部件是一个不完整的半球壳, 图1给出了其剖面图, $\varphi_0 \approx 0^\circ$, $\varphi_F \approx 90^\circ$. 对半球壳的振动分析是研制这种新型陀螺仪十分必要和重要的研究工作. 并且有关的分析结论在这种壳体作为元部件的其它应用场合^[2]也有一定的参考价值. 有些文献对这种壳体的振动分析做过报导^{[2][3][4]}. 其中以文献[2]的分析较为全面. 但这些分析几乎都是在壳体壁厚不变的情况下, 对完整的半球壳即 $\varphi_0 = 0^\circ$, $\varphi_F = 90^\circ$ 进行分析、研究. 而在实际应用中, 由于加工手段的限制和出于对某些特殊要求的考虑, 壳体的壁厚不可能是恒定不变的, 加之使用条件的局限, 谐振子往往是不完整的半球壳. 因此研究在上述诸因素变化下谐振频率的变化规律是十分必要的, 考虑到实际应用中一般只利用壳体的弯曲振动, 本文主要分析这种振动.

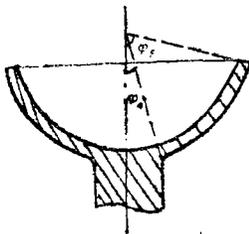


图1 半球壳结构示意图

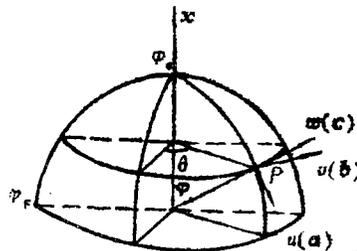


图2 半球壳的数学模型

*樊大钧推荐.
国家自然科学基金资助项目.

二、理论推导

图2为我们考虑的半球壳,中心轴为 x ,壳体的壁厚为 $h(\varphi)$,球中面半径为 R ,壳体两端的边界角为 φ_0, φ_r ,壳体材料的弹性模量、泊松比、密度分别为 E, μ, ρ ,假设壳体是一致均匀的,即 E, μ, ρ 不变。

壳体在母线方向,环向的坐标分别为 φ, θ ,任一点 P 处的位移为:

$$V = ua + vb + wc \quad (2.1)$$

其中 u, v, w 分别为母线方向、环向、法向的位移, a, b, c 为相应的单位动矢量。

记与中面距离为 z 的曲面为 z 面, z 面上母线方向的正应变 ε_1^z ,环向正应变 ε_2^z ,它们两个方向之间的剪应变 γ_{12}^z ,利用[5]的关系可推出:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^z &= (\varepsilon_1 + z\lambda_1)/(1 + z/R), \quad \varepsilon_2^z = (\varepsilon_2 + z\lambda_2)/(1 + z/R) \\ \gamma_{12}^z &= (\gamma_{12} + z\tau)/(1 + z/R) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

中面上的应变为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (\partial u / \partial \varphi + w) / R \\ \varepsilon_2 &= (\partial v / \partial \theta + u \cos \varphi + w \sin \varphi) / R \sin \varphi \\ \gamma_{12} &= (\partial u / \partial \theta + \sin \varphi \partial v / \partial \varphi - v \cos \varphi) / R \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) / R^2 \\ \lambda_2 &= \left(-\frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} u + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) / R^2 \\ \tau &= \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \cos \varphi v + 2 \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \theta} \right) \right] / R^2 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

考虑到 $h(\varphi)/R \ll 1$,则(2.2)式变成:

$$\varepsilon_1^z = \varepsilon_1 + z\lambda_1, \quad \varepsilon_2^z = \varepsilon_2 + z\lambda_2, \quad \gamma_{12}^z = \gamma_{12} + z\tau \quad (2.5)$$

壳体的弹性势能为:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_1^z \sigma_1 + \varepsilon_2^z \sigma_2 + \gamma_{12}^z \sigma_{12}) dV \quad (2.6)$$

此处 V 为积分体积。

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1^z + \mu \varepsilon_2^z), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{12}^z \quad (2.7)$$

壳体的动能为:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \rho dV \quad (2.8)$$

球壳振动时,环向波数为 n 的对称振型为:

$$u = u(\varphi) \cos n\theta \sin \omega_n t, \quad v = v(\varphi) \sin n\theta \sin \omega_n t, \quad w = w(\varphi) \cos n\theta \sin \omega_n t \quad (2.9)$$

$u(\varphi), v(\varphi), w(\varphi)$ 为沿母线方向的振型, ω_n 为所对应的谐振频率。

对于顶端开口壳体的弯曲振动,在小挠度的情况下,近似满足Lord Rayleigh不扩张条件,壳体中面的正应变和剪应变为0。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma_{12} = 0 \quad (2.10)$$

利用(2.3), (2.9), (2.10)并整理后得:

$$\left. \begin{aligned} w(\varphi) &= -du(\varphi)/d\varphi \\ nv(\varphi) + u(\varphi)\cos\varphi - (du(\varphi)/d\varphi)\sin\varphi &= 0 \\ nu(\varphi) + v(\varphi)\cos\varphi - (dv(\varphi)/d\varphi)\sin\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

方程(2.11)的解为:

$$\left. \begin{aligned} u(\varphi) &= (C_1 \operatorname{tg}^n(\varphi/2) - C_2 \operatorname{ctg}^n(\varphi/2)) \sin\varphi \\ v(\varphi) &= (C_1 \operatorname{tg}^n(\varphi/2) + C_2 \operatorname{ctg}^n(\varphi/2)) \sin\varphi \\ w(\varphi) &= -[C_1(n + \cos\varphi) \operatorname{tg}^n(\varphi/2) + C_2(n - \cos\varphi) \operatorname{ctg}^n(\varphi/2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

考虑到壳体实际振动的情况和 Lord Rayleigh 不扩张条件应用的范围, 常数 C_2 必为零. 故方程(2.12)变为:

$$\left. \begin{aligned} u(\varphi) &= v(\varphi) = C_1 \sin\varphi \operatorname{tg}^n(\varphi/2) \\ w(\varphi) &= -C_1(n + \cos\varphi) \operatorname{tg}^n(\varphi/2) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$u(\varphi) = v(\varphi) = w(\varphi) = w'(\varphi)|_{\varphi=0} = 0$$

常数 C_1 由实际振动情况来定.

利用上述关系对式(2.6), (2.8)进行整理, 有:

$$U = \frac{C_1^2 \sin^2 \omega_n t E \pi}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{12R^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} 4(1-\mu)n^2(n^2-1)^2 \operatorname{tg}^{2n} \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{h^3(\varphi)}{\sin^3 \varphi} \cdot d\varphi \quad (2.14)$$

$$T = \frac{C_1^2 \cos^2 \omega_n t}{2} \omega_n^2 R^2 \rho \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (\sin^2 \varphi + 2n \cos \varphi + n^2 + 1) \sin \varphi \operatorname{tg}^{2n} \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi}{2} h(\varphi) d\varphi \quad (2.15)$$

利用 $T_{\max} = U_{\max}$ 可得:

$$\omega_n^2 = \frac{E}{R^2(1+\mu)\rho} \cdot \frac{1}{12R^2} \cdot 4n^2(n^2-1)^2 \frac{I(n, h)}{J(n, h)} \quad (2.16)$$

$$I(n, h) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} \frac{\operatorname{tg}^{2n}(\varphi/2)}{\sin^3 \varphi} h^3(\varphi) d\varphi \quad (2.17)$$

$$J(n, h) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (n^2 + 1 + \sin^2 \varphi + 2n \cos \varphi) \sin \varphi \cdot \operatorname{tg}^{2n} \frac{\varphi}{2} h(\varphi) d\varphi \quad (2.18)$$

为便于分析, 引入无量纲频率^[2]

$$\Omega_n = \omega_n R \left[\frac{(1-\mu^2)\rho}{E} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} n(n^2-1) \left[\frac{(1-\mu)I(n, h)}{3J(n, h)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

文献[2]仅分析了等厚度的情况, 这时 Ω_n 与厚度和半径之比, 泊松比有关. 本文定义如下两个无量纲频率.

$$\bar{\Omega}_n = 4n^2(n^2-1)^2 R^{-2} I(n, h) / J(n, h) \quad (2.20)$$

$$\bar{\Omega}_{n,0} = I(n) / J(n) \quad (2.21)$$

$$I(n) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} \left(\operatorname{tg}^{2n} \frac{\varphi}{2} / \sin^3 \varphi \right) d\varphi \quad (2.22)$$

$$J(n) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (n^2 + 1 + \sin^2 \varphi + 2n \cos \varphi) \sin \varphi \operatorname{tg}^{2n} \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad (2.23)$$

定义(2.20)与泊松比 μ 无关, 在等厚度情况下, 定义了(2.21)式, 它仅与环向波数及 φ_0 , φ_F 有关. 此外 Ω_n 与谐振频率 ω_n 成正比, 而 $\bar{\Omega}_n$, $\bar{\Omega}_{n,0}$ 与 ω_n^2 成正比.

给定 φ_0 , 任意 φ_F 的 Ω_n 对 $\varphi_F = 90^\circ$ 的 Ω_n 的变化量为:

$$\Delta(\Omega_n, \varphi_F | \varphi_0) = \Omega_n(\varphi_0, \varphi_F) - \Omega_n(\varphi_0, 90^\circ) \quad (2.24)$$

Ω_n 的变化率为:

$$\sigma(\Omega_n, \varphi_F | \varphi_0) = \Delta(\Omega_n, \varphi_F | \varphi_0) / \Omega_n(\varphi_0, 90^\circ) \quad (2.25)$$

类似地, $\bar{\Omega}_{n0}$ 的变化量为:

$$\Delta(\bar{\Omega}_{n0}, \varphi_F | \varphi_0) = \bar{\Omega}_{n0}(\varphi_0, \varphi_F) - \bar{\Omega}_{n0}(\varphi_0, 90^\circ) \quad (2.26)$$

$\bar{\Omega}_{n0}$ 的变化率为:

$$\sigma(\bar{\Omega}_{n0}, \varphi_F | \varphi_0) = \Delta(\bar{\Omega}_{n0}, \varphi_F | \varphi_0) / \bar{\Omega}_{n0}(\varphi_0, 90^\circ) \quad (2.27)$$

三、计算结果及分析

首先用(2.19)式计算等厚度下, $h/R=0.01, \mu=0.3$ 的完整半球壳. 其计算结果与有关文献的数值列于表1, 进行比较. 其中文献[2]的为计算值, 文献[3]的为实验值.

表1 计算结果 Ω_n 的比较 ($\varphi_0=0^\circ, \varphi_F=90^\circ$)

n	2	3	4	5	6	7	8	9
文献 [2]	0.012	0.034	0.064	0.102	0.146	0.197	0.253	0.315
文献 [3]	0.0125	0.0342	0.0717	0.1050	0.1500	0.2050	0.2583	0.3230
本 文	0.0127	0.0356	0.0687	0.1118	0.1647	0.2273	0.2995	0.3814

由表1看出: 在 $n \leq 5$ 时, 本文结果与实验值吻合得好, $n \geq 6$ 时相差略大. 实际应用中多是 $n \leq 4$ 的振动, 特别对HRG^[1], 仅仅使用 $n=2$ 的四波腹振动. 由于上述计算公式非常简单, 因此在工程应用中有较大的价值.

1. φ_0, φ_F 对频率的影响规律

表2给出等厚度下, $h/R=0.01, \mu=0.3$ 时, 不同 φ_0, φ_F 对应 $n=2$ 时的 Ω_2 , 表3给出了由表2得到的 $\sigma(\Omega_2, \varphi_F | \varphi_0)$. 从表2, 表3看出: 在所分析 $10^\circ \geq \varphi_0 \geq 0^\circ, 90^\circ \geq \varphi_F \geq 75^\circ$ 范围内, Ω_2 对 φ_F 的变化较大, 而对 φ_0 的变化不敏感.

表2 $\Omega_2(\varphi_0, \varphi_F)$ 值

$\varphi_0 \backslash \varphi_F$	75°	78°	81°	84°	87°	90°
0°	0.01451	0.01396	0.01350	0.01314	0.01286	0.01266
5°	0.01450	0.01395	0.01349	0.01313	0.01285	0.01265
10°	0.01446	0.01391	0.01347	0.01311	0.01283	0.01264

表3 $\sigma(\Omega_2, \varphi_F | \varphi_0)$ 值

$\varphi_0 \backslash \varphi_F$	75°	78°	81°	84°	87°
0°	14.67%	10.29%	6.70%	3.82%	1.60%
5°	14.61%	10.24%	6.67%	3.80%	1.59%
10°	14.42%	10.11%	6.58%	3.74%	1.58%

表4给出了等厚度下, 不同 φ_0, φ_F 时的 $\bar{\Omega}_{n0}(\varphi_0, \varphi_F)$ 值. 表5给出了 $\varphi_0=0^\circ$ 时, $\varphi_F=75^\circ$ 对 $\varphi_F=90^\circ$ 的变化量 $\Delta(\bar{\Omega}_{n0}, 75^\circ | 0^\circ)$ 及变化率 $\sigma(\bar{\Omega}_{n0}, 75^\circ | 0^\circ)$ 的值.

从表4, 表5看出: $\bar{\Omega}_{n0}$ 对 φ_F 变化较敏感, 对 φ_0 变化不敏感. 随着 n 的增加, $\bar{\Omega}_{n0}$ 对 φ_F 的

表4

 $\bar{\Omega}_{n0}(\varphi_0, \varphi_F)$ 值表

n	φ_0	φ_F					
		75°	78°	81°	84°	87°	90°
2	0°	0.2507	0.2320	0.2171	0.2055	0.1968	0.1907
	10°	0.2488	0.2304	0.2159	0.2046	0.1960	0.1901
3	0°	0.1148	0.1077	0.1023	0.0984	0.0957	0.0941
	10°	0.1147	0.1077	0.1023	0.0984	0.0957	0.0941
4	0°	0.0667	0.0630	0.0602	0.0582	0.0569	0.0562
	10°	0.0667	0.0630	0.0602	0.0582	0.0569	0.0562
5	0°	0.0436	0.0413	0.0395	0.0383	0.0375	0.0372
	10°	0.0436	0.0413	0.0395	0.0383	0.0376	0.0372
6	0°	0.0307	0.0291	0.0279	0.0271	0.0266	0.0264
	10°	0.0307	0.0291	0.0279	0.0271	0.0266	0.0264
7	0°	0.0228	0.0216	0.0207	0.0201	0.0198	0.0196
	10°	0.0228	0.0216	0.0207	0.0201	0.0198	0.0196
8	0°	0.0175	0.0167	0.0160	0.0155	0.0152	0.0151
	10°	0.0175	0.0167	0.0160	0.0155	0.0152	0.0151
9	0°	0.0139	0.0132	0.0127	0.0123	0.0129	0.0120
	10°	0.0139	0.0132	0.0127	0.0123	0.0129	0.0120

表5

 $\varphi_0=0^\circ$, 不同n下的 Δ 及 σ

n	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	0.0601	0.0207	0.0105	0.0064	0.0043	0.0032	0.0024	0.0019
σ	31.50%	21.94%	18.60%	17.15%	16.44%	16.09%	15.94%	15.91%

变化的敏感度减小。

2. 厚度变化对频率的影响

考虑壁厚沿母线方向是均匀变化的情况, 记 T_0 , T_F 分别为 φ_0 , φ_F 处的壁厚。表6给出了用(2.16)式计算 $n=2$ 的半球壳谐振频率 $\omega_2(\varphi_0, \varphi_F)$ 的结果, 其中 $T_F=0.5\text{mm}$ 。球壳的其它参数为: $E=1.911 \times 10^6 \text{N/mm}^2$, $\rho=7.85 \text{g/cm}^3$, $\mu=0.3$, $R=24.65 \text{mm}$ 。表7给出了由表6计算得到的在 $\varphi_0=0^\circ$ 时, $\varphi_F=75^\circ$ 的 ω_2 对 $\varphi_F=90^\circ$ 的 ω_2 的变化率。表8给出了由表6得到的 $\varphi_F=90^\circ$ 时, $\varphi_0=10^\circ$ 的 ω_2 对 $\varphi_0=0^\circ$ 的变化率。从表6~表8看出: 对 $n=2$ 的谐振频率 ω_2 , 当 φ_0 不变时, φ_F 增加时将减小, 减小的程度随 T_0 单调增, 而当 φ_F 不变 φ_0 增加时, $T_0/T_F > 1$ 时 ω_2 增加, 且随 T_0/T_F 单调增; $T_0/T_F < 1$ 时, ω_2 减小, 且随 T_0/T_F 单调减。更简洁地说, φ_F 不变, φ_0 变化时, ω_2 的变化量与 $\ln(T_0/T_F)$ 有相同的变化规律。另外, 由公式(2.16)可知, $T_0=0.5\text{mm}$, $T_F=1.0\text{mm}$ 时的 ω_2 是 $T_0=0.25\text{mm}$, $T_F=0.5\text{mm}$ 时的2倍, 结合表6可知: 壳体壁厚由薄到厚(从 φ_0 到 φ_F)比由厚到薄对谐振频率 ω_2 的影响要大。

采用数值计算的方式不可能穷尽各种各样的壁厚变化情况, 为此, 我们从本质上分析

表6 $T_F \equiv 0.5 \text{ mm}$, 不同 T_0 对应的 $\omega_2(\varphi_0, \varphi_F)$ (Hz)

$T_0(\text{mm})$	φ_F	75°	78°	81°	84°	87°	90°
	φ_0						
0.25	0°	860.4	832.3	809.9	792.7	780.5	772.9
	10°	844.3	818.1	797.3	781.5	770.4	763.9
0.375	0°	917.3	884.8	858.5	837.8	822.5	812.1
	10°	906.2	875.2	850.1	830.4	815.9	806.2
0.5	0°	983.1	945.5	914.7	890.0	871.0	857.3
	10°	979.3	942.4	912.2	887.9	869.3	855.9
1.0	0°	1312.7	1258.6	1205.0	1159.8	1122.3	1091.8
	10°	1362.8	1295.8	1239.0	1191.0	1151.0	1118.3
1.5	0°	1745.8	1651.9	1570.8	1500.9	1441.1	1390.6
	10°	1842.9	1740.5	1651.9	1575.3	1509.7	1453.8

表7 不同 T_0 对应的频率变化率 $\sigma(\omega_2, 75^\circ | 0^\circ)$

$T_0(\text{mm})$	0.25	0.375	0.5	1.0	1.5
σ_2	11.32%	12.95%	14.67%	20.23%	25.54%

表8 不同 T_0 对应的频率变化率 $\sigma(\omega_2, 10^\circ | 90^\circ)$

$T_0(\text{mm})$	0.25	0.375	0.5	1.0	1.5
σ_2	-1.16%	-0.73%	-0.16%	2.43%	4.54%

它。可以得到一些原则性的结论。

3. $\varphi_0, \varphi_F, h(\varphi)$ 变化的数学和物理本质

考查一个与谐振频率有关的量:

$$\Omega_n^* = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} A(\varphi) h^3(\varphi) d\varphi / \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} B(\varphi) h(\varphi) d\varphi \quad (3.1)$$

$$A(\varphi) = \text{tg}^{2n}(\varphi/2) / \sin^3 \varphi, \quad B(\varphi) = (n^2 + 1 + \sin^2 \varphi + 2n \cos \varphi) \sin \varphi \cdot \text{tg}^{2n}(\varphi/2)$$

在 $h(\varphi) = \text{const}$ 时可以研究 $\bar{\Omega}_{n0}$, 重写如下:

$$\bar{\Omega}_{n0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} A(\varphi) d\varphi / \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} B(\varphi) d\varphi \quad (3.2)$$

$$A'(\varphi) = (2n - 3 \cos \varphi) \text{tg}^{2n}(\varphi/2) / \sin^4 \varphi \quad (3.3)$$

$$B'(\varphi) = [2n(n^2 + 1) + 2n \sin^2 \varphi + (5n^2 + 1) \cos \varphi + 2n \cos 2\varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi] \text{tg}^{2n}(\varphi/2) \quad (3.4)$$

$$[B(\varphi) - A(\varphi)]' = \text{tg}^{2n}(\varphi/2) \cdot C(\varphi)$$

$$C(\varphi) = 2n(n^2 + 1) + 2n \sin^2 \varphi + (5n^2 + 1) \cos \varphi + 2n \cos 2\varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi - (2n - 3 \cos \varphi) / \sin^4 \varphi \quad (3.5)$$

当 $n \geq 2$ 时, $A'(\varphi) > 0, B'(\varphi) > 0$, 结合式(3.3)~(3.5)可知: 当 $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$, $n \geq 2$ 时, $A(\varphi), B(\varphi)$ 均非负且单调增. $C(\varphi)$ 的零点只有一个, 记为 φ_n . 表9给出了不同 n 对应的 $\varphi_n, A(\varphi_n), B(\varphi_n)$, 及 $A(90^\circ), B(90^\circ)$. 可以看出: φ_n 下的 $A(\varphi_n), B(\varphi_n)$ 相对 90° 时的很小.

表9 $\varphi_n, A(\varphi_n), B(\varphi_n), A(90^\circ), B(90^\circ)$ 诸值表

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi_n(^{\circ})$	24.51	24.71	23.20	21.70	20.38	19.25	18.28	17.43
$A(\varphi_n)$	3.12×10^{-2}	1.51×10^{-3}	5.16×10^{-5}	1.32×10^{-6}	2.70×10^{-8}	4.54×10^{-10}	6.52×10^{-12}	8.13×10^{-14}
$B(\varphi_n)$	8.14×10^{-3}	7.22×10^{-4}	3.04×10^{-5}	8.75×10^{-7}	1.92×10^{-8}	3.40×10^{-10}	5.06×10^{-12}	6.50×10^{-14}
$A(90^\circ)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$B(90^\circ)$	6	11	18	27	38	51	66	83

对(3.2)式改写如下:

$$\bar{Q}_{n,0} = \frac{\sum_{i=0}^N A_i}{\sum_{i=0}^N B_i} \tag{3.6}$$

$$A_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} A(\varphi) d\varphi, \quad B_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} B(\varphi) d\varphi, \quad \varphi_N = \varphi_F$$

图3给出了 $n=2$ 时 $A(\varphi), B(\varphi)$ 曲线. 从数学意义上说: $\bar{Q}_{n,0}$ 即是在 (φ_0, φ_F) 区域 $A(\varphi)$ 曲线下的面积与 $B(\varphi)$ 曲线下的面积之比值.

从物理本质上说: A_i, B_i 分别代表着在球壳 $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ 范围上具有的“弹性势能”和“动能”. 在 (φ_0, φ_F) 范围的球壳相对于在完整半球壳(即 $\varphi_0=0^\circ, \varphi_F=90^\circ$)上, 约束了 $(0^\circ, \varphi_0), (\varphi_F, 90^\circ)$ 球壳所对着的“弹性势能”和“动能”. 图3 $A(\varphi), B(\varphi)$ 曲线代表了壳体上“弹性势能”, “动能”的变化规律.

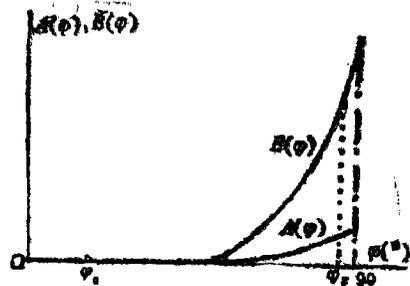


图3 $A(\varphi), B(\varphi)$ 曲线

于是, 从上面分析看出: 对 $\bar{Q}_{2,0}$, 在 $\varphi_0 \in [0^\circ, 30^\circ]$, 当 φ_F 一定大时 $\bar{Q}_{2,0}$ 随 φ_0 变化很小, 而对 φ_F 变化较大.

考查式(3.1), 从数学上讲, $h(\varphi)$ 相当于对 $A(\varphi), B(\varphi)$ 积分的权函数, 而在物理上相当于是在所对应的球壳上“弹性势能”, “动能”的增益函数. 从上面有关的分析可知: $h(\varphi)$ 在 $A(\varphi), B(\varphi)$ 较大, 也即 φ 较大的范围对 $\bar{Q}_{2,0}$ 的影响大一些; 而在 φ 较小的范围对 $\bar{Q}_{2,0}$ 的影响很小.

由于 $A(\varphi), B(\varphi)$ 中含有 $\text{tg}^{2n}(\varphi/2)$ 因子, 结合表9, 可以断言: 对 $n \geq 3, \bar{Q}_{n,0}$ 的规律与 $\bar{Q}_{2,0}$ 相一致.

四、结 论

利用 Lord Rayleigh 条件, 本文详细地分析了底端 (φ_0) 固支, 顶端 (φ_F) 开口的半球壳的弯曲振动. 得到了壳体谐振频率随 φ_0, φ_F 及壁厚 $h(\varphi)$ 的变化规律, 归纳如下:

1. 在 $15^\circ \geq \varphi_0 \geq 0^\circ$, $90^\circ \geq \varphi_F \geq 60^\circ$, 谐振频率 ω_n 对 φ_0 变化不敏感, 对 φ_F 变化较敏感. 当 φ_0 固定时, ω_n 随 φ_F 单调减.

2. 壳体壁厚 $h(\varphi)$ 变化对 ω_n 的影响程度随 φ 的增大而增加. 顺便指出, 从“稳频”的角度来说, 在实际加工中, 壁厚的加工精度在不同的 φ 区域可以有不同的要求, φ 小时精度可低些, φ 大时精度应提高.

此外, 给出了上述结论的数学和物理本质的解释, 这对研制以半球壳作为无部件的仪器仪表, 特别是半球谐振子陀螺仪 HRG 有重要的应用价值.

参 考 文 献

- [1] Scott, W. B., *Delco Makes Low-Cost Gyro Prototype*, AW & ST, Oct. (1982), 64—71.
- [2] Lin Gau-feng, Analytical solutions for open nonshallow spherical shell vibrations, AD 74269, Sep. (1979).
- [3] Hwang, C., Some experiments on the vibration of a hemispherical shell, *J. Appl. Mech.*, 33(4) (1966), 817—824.
- [4] Ross, E. W., Jr., Natural frequencies and mode shapes for axisymmetric vibration of deep spherical shells, *J. Appl. Mech.*, 32 (1965), 553—561.
- [5] Flügge, W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, Germany (1962).

On Flexural Vibration of Hemispherical Shell

Fan Shang-chun Liu Guang-yu Wang Zhen-jun

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

This paper makes detailed analyses for the flexural vibration (frequency) of the hemispherical shell and presents the varying laws of frequency as the varying boundary angles and the wall thickness of the above shell. It is of important value to develop the instrument, such as hemispherical resonator gyro (HRG), whose sensing component is a hemispherical shell.

Key words: hemispherical shell, flexural vibration, resonant frequency, resonator gyro