应用数学和力学，第 12 卷第 9 期（1991 年 9 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义变分不等式与极大极小定理

颜心力　李秉友

（西安冶金建筑学院）（河北师范大学）

摘　要

本文讨论映Hausdorff拓扑线性空间到 Riesz 空间[6]的算子变分问题．给出半序空间上变分不等式的绝对形式和相对形式．

关键词　有限闭集　KKM映射　Riesz空间　Gwinner定理

一、引　言

一般地变分不等式是讨论一元或二元泛函[1~2]，现在开始讨论映线性空间到半序线性空间的算子[3~5]．本文讨论映Hausdorff拓扑线性空间到Riesz空间[6]的算子变分问题．由于在半序线性空间上，"$\geqslant$"不能说就是"$\nless$"[4]，所以半序空间上的不等式有绝对不等式和相对不等式两种形式．

二、绝 对 形 式

定理1　设E为Hausdorff拓扑线性空间，E_1为(σ)-备的Riesz 空间，X为E的闭凸集．若

$$f: X\to E_1 \qquad \text{和} \qquad \varphi: X\times X\to E_1$$

均为(0)-有界，即$\exists\, u,\ v\in E$使对任意$x, y\in X$

$$u\leqslant f(x),\ \varphi(x,y)\leqslant v \ \text{和}\ \varphi(x,x)\geqslant\theta,$$

并且满足

（i）　$\forall\, x\in X$，$\{y\in X:\ f(y)+\varphi(x,y)\ngeqslant u,\ u\in E_1\}$为凸集　　(2.1)

（ii）　$\exists$紧集$K\subset E$及$x_0\in X\cap K$使

$$f(x)\nleqslant\varphi(x,x_0)+f(x_0) \qquad (\forall\, x\in X\backslash K) \tag{2.2}$$

（iii）　对任一有限维子空间$F\subset E$，$\forall\, y\in X$，$f(x)-\varphi(x,y)$关于$x\in X\cap F$为(0)-下半连续[6]，即$\forall\, y\in X$，若$f(x)-\varphi(x,y)$为(0)-有界且$\{x_n\}\subset D=X\cap F$，$x_n\to x$则

$$f(x)-\varphi(x,y)\leqslant(0)-\varliminf_{n\to\infty}[f(x_n)-\varphi(x_n,y)] \qquad (\forall\, y\in X) \tag{2.3}$$

（iv）　当$\{x_n\}\subset X\cap K$　　$(x_n\to x\in D)$，

---

* 张石生推荐．1990年5月21日收到．

$$f(x_n)\leqslant\varphi(x_n,y)+f(y)\quad(\forall y\in D)\tag{2.4}$$

时，有 $f(x)\leqslant\varphi(x,y)+f(y)\quad(\forall y\in D)$ (2.5)

则变分不等式

$$\varphi(x,y)\geqslant f(x)-f(y)\tag{2.6}$$

有解 $\bar{x}\in X\cap K$

证 对任一 $y\in X$，令

$$G(y)=\{x\in X:f(y)+\varphi(x,y)\geqslant f(x)\}\tag{2.7}$$

(a) $G:X\to 2^E$ 为KKM映射：若不然，则存在有限子集 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset X$ 使凸包 $\mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\not\subset\bigcup_{i=1}^n G(y_i)$。故存在 $\tilde{y}\in\mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$\tilde{y}=\sum_{i=1}^n\lambda_i y_i$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ 使 $\tilde{y}\in\bigcup_{i=1}^n G(y_i)$。从而 $\tilde{y}\overline{\in}G(y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且，

$$f(y_i)+\varphi(\tilde{y},y_i)\ngeqslant f(\tilde{y})\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.8}$$

由(2.1)知 $\Omega=\{y\in X:f(y)+\varphi(\tilde{y},y)\ngeqslant f(\tilde{y})\}$ 为凸集。于是由(2.8)有

$$\tilde{y}=\sum_{i=1}^n\lambda_i y_i\in\Omega\ \text{即}\ f(\tilde{y})+\varphi(\tilde{y},\tilde{y})\ngeqslant f(\tilde{y}).$$

从而有 $\varphi(\tilde{y},\tilde{y})\ngeqslant\theta$，这与假设条件 $\varphi(x,x)\geqslant\theta\ (\forall x\in X)$ 矛盾。故 G 为KKM映射。

(b) $\exists x_0\in X$ 使 $\overline{G(x_0)}$ 紧：若 X 紧，则由(2.7)知，$G(x_0)\subset X$ 且 $\overline{G(x_0)}$ 紧；若 X 非紧，由(ii)知，存在紧集 $K\subset E$ 及 $x_0\in X\cap K$ 使(2.2)成立。从而

$$X\backslash K\not\subset G(x_0)\subset X，所以 G(x_0)\subset X\cap K\subset K.$$

故 $\overline{G(x_0)}$ 紧。

(c) 对每一 $y\in X$，$G(y)$ 为有限闭集：设 F 为 E 的任一有限维子空间，$\{x_n\}\subset G(y)\cap F$ 且 $x_n\to x$（当 $n\to\infty$）。因 $x_n\in G(y)\subset X$，X 闭，所以 $x\in X$。下证 $x\in G(y)$。因 $x_n\in G(y)$，则 $f(y)+\varphi(x_n,y)\geqslant f(x_n)$。由于 $f(x_n)-\varphi(x_n,y)$ 为(0)-有界，故由(iii)有

$$f(x)-\varphi(x,y)\leqslant(0)-\varliminf_{n\to\infty}[f(x_n)-\varphi(x_n,y)]\leqslant f(y),$$

所以 $x\in G(y)$。又因 $x_n\in F$，显然 $x\in F$。故 $x\in G(y)\cap F\subset F$。

(d) 对含 x_0 的 $D=X\cap F$ 均有 $\left(\overline{\bigcap_{y\in D}G(y)}\right)\cap D=\left(\bigcap_{y\in D}G(y)\right)\cap D$：只需证当 $\{x_n\}\subset\bigcap_{y\in D}G(y)$ 且 $x_n\to x\in D$ 时，$x\in\bigcap_{y\in D}G(y)$。因 $x_0\in D$，所以 $\bigcap_{y\in D}G(y)\subset G(x_0)\subset X$，由（b）知 $G(x_0)\subset K$，所以 $\{x_n\}\subset\bigcap_{y\in D}G(y)\subset G(x_0)\subset X\cap K$，又因对每一 $y\in D$ 均有 $\{x_n\}\subset G(y)$ 即(2.4)成立。从而由(2.4)知(2.5)成立，即 $\forall y\in D$ 有 $x\in G(y)$。故 $x\in\bigcap_{y\in D}G(y)$。

(e) 上面已证明 G 满足Gwinner定理[7]的条件。故 $\exists\ \bar{x}\in\bigcap_{y\in X}G(y)$，即 $\forall y\in X$ 有 $f(\bar{x})\leqslant f(y)+\varphi(\bar{x},y)$。 Q. E. D.

推论1 设E，X，E_1，f，φ 满足定理1的条件且条件(i)(iii)(iv)成立。若 X 紧，则(2.6)在 X 中有解。

证 在定理1中取 $K=X$，则易知结论成立。 Q. E. D.

推论2 设 E，X，E_1，f，φ 满足定理1的条件且条件(i)(ii)成立，若还满足

(iii)′ $\forall y\in X$，$f(x)-\varphi(x,y)$ 关于 $x\in X$ 为(0)-下半连续。则(2.6)在 $X\cap K$ 中有解。

证 定理1中的(iii)显然满足. 下证(iv)亦满足. $\forall y\in D$, $\{x_n\}\subset X\cap K$, $x_n\to x\in D$, 因(2.4)$\Longleftrightarrow f(x_n)-\varphi(x_n,y)\leqslant f(y)$ ($\forall y\in D$). 从而由(iii)有

$$f(x)-\varphi(x,y)\leqslant(0)-\varliminf_{n\to\infty}[f(x_n)-\varphi(x_n,y)]\leqslant f(y)\qquad(\forall y\in D).$$

故定理1的条件(iv)满足. Q. E. D.

由推论1与推论2的证明有

定理2 设E, E_1, f, φ同定理1, 但X为E中的紧凸集. 若还满足

(i) $\forall x\in X$, $\{y\in X: f(y)+\varphi(x,y)\ngeqslant u,\ u\in E_1\}$为凸集;

(ii) $\forall y\in X$, $f(x)-\varphi(x,y)$关于$x\in X$为(0)-下半连续. 则(2.6)有解$\bar{x}\in X$.

当$f\equiv\theta$时, 下面定理与定理2等价.

定理3 (推广的Fanky极大极小不等式) 设E为Hausdorff拓扑线性空间, E_1为(σ)-备的Riesz空间, $X\subset E$为紧凸集. 若$\varphi: X\times X\to E_1$满足

(i) $\forall y\in X$, $\varphi(x,y)$关于$x\in X$为(0)-下半连续;

(ii) $\forall x\in X$, $\{y\in X: \varphi(x,y)\nleqslant u,\ u\in E_1\}$为凸集.

则存在$x_0\in X$使

$$\sup_{y\in X}\varphi(x_0,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,y)\leqslant\sup_{x\in X}\varphi(x,x).$$

证 首先证$\phi(x)=\sup\limits_{y\in X}\varphi(x,y)$下半连续. 任取$\bar{x}\in X$, 由定义, $\forall\varepsilon\geqslant0$, $\varepsilon\in E$, $\exists\bar{y}\in X$使

$$\phi(\bar{x})-\varepsilon\leqslant\varphi(\bar{x},\bar{y}).$$

取$x_n\to\bar{x}$. 因

$$\varphi(x_n,\bar{y})\leqslant\sup_{y\in X}\varphi(x_n,y)=\phi(x_n),$$

于上式两端对n取下极限并注意(i), 则有

$$\phi(\bar{x})-\varepsilon\leqslant\varphi(\bar{x},\bar{y})\leqslant(0)-\varliminf_{n\to\infty}\varphi(x_n,\bar{y})=(0)-\varliminf_{n\to\infty}\phi(x_n).$$

由ε的任意性, 所以有$\phi(\bar{x})\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\phi(x_n)$.

其次, 证$\phi(x)$在X上达到下确界. 因E_1为(σ)-备, 所以$\exists m\in E_1$使

$$m=\inf_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,y)=\inf_{x\in X}\phi(x),$$

从而$\exists\{x_n\}\in X$与$a\in E_1$使$\phi(x_n)\leqslant m+\frac{1}{n}a$, $n=1,2,\cdots$. 又因X紧, 所以$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$使

$$x_{n_k}\to x_0\in X\ \text{且}\ m\leqslant\phi(x_{n_k})\leqslant m+\frac{1}{n_k}a.$$

所以$m=(0)-\varliminf\limits_{k\to\infty}\phi(x_{n_k})$. 又由$\phi(x)$的下半连续性, 有

$$m\leqslant\phi(x_0)\leqslant(0)-\varliminf_{k\to\infty}\phi(x_{n_k})=m.$$

故$m=\phi(x_0)$.

第三, 证定理2$\Rightarrow$定理3. 令

$$\psi(x,y)=\sup_{x\in X}\varphi(x,x)-\varphi(x,y),$$

则$\forall x\in X$, $\psi(x,x)\geqslant\theta$且

$$(0)-\varliminf_{n\to\infty}[-\psi(x_n,y)]=-\sup_{x\in X}\varphi(x,x)+(0)-\varliminf_{n\to\infty}[+\varphi(x_n,y)]$$

$$\geqslant-\sup_{x\in X}\varphi(x,x)+\varphi(x,y)=-\psi(x,y),$$

$$\{y\in X:\psi(x,y)=\sup_{x\in X}\varphi(x,x)-\varphi(x,y)\not\geqslant\sup_{x\in X}\varphi(x,x)-u\}\text{为凸集，}$$

从而ψ满足定理2的假设条件．所以$\exists\ \bar{x}\in X$使$\psi(\bar{x},y)\geqslant\theta$ 即 $\varphi(\bar{x},y)\leqslant\sup\limits_{x\in X}\varphi(x,x)$．从而 $\sup\limits_{y\in X}\varphi(\bar{x},y)\leqslant\sup\limits_{x\in X}\varphi(x,x)$．由于$X$紧且$\sup\limits_{y\in X}\varphi(x,y)$关于$x\in X$下半连续，故$\exists\ x_0\in X$使

$$\sup_{y\in X}\varphi(x_0,y)=\inf_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,y)\leqslant\sup_{y\in X}\varphi(\bar{x},y)\leqslant\sup_{x\in X}\varphi(x,x).$$

第四，证定理3⇒定理2．令$\psi(x,y)=-\varphi(x,y)$，由定理2的条件知，$\forall\ x\in X$，$\varphi(x,x)\geqslant\theta$．所以$\psi(x,x)\leqslant\theta$．令$x_n\to x$(当$n\to\infty$)，则有

$$(0)-\varliminf_{n\to\infty}\psi(x_n,y)=(0)-\varliminf_{n\to\infty}[-\varphi(x_n,y)]\geqslant-\varphi(x,y)=\psi(x,y),$$

$$\{y\in X:\psi(x,y)=-\varphi(x,y)\not\leqslant-u,\ u\in E_1\}\text{为凸集．}$$

从而$\psi(x,y)$满足定理3的条件，所以$\exists\ \bar{x}\in X$使$\sup\limits_{y\in X}\psi(\bar{x},y)\leqslant\sup\limits_{x\in X}\psi(x,x)$，故$\psi(\bar{x},y)\leqslant\theta(\forall\ y\in X)$．即$\varphi(\bar{x},y)\geqslant\theta(\forall\ y\in X)$．亦即当$f=\theta$时$\varphi(\bar{x},y)\geqslant f(\bar{x})-f(y)$． Q. E. D.

三、相 对 形 式

定理4 设E，E_1，X，f，φ同定理1，但$\varphi(x,x)\not<\theta$，$\forall\ x\in X$，还满足

(i) $\{y\in X:f(y)+\varphi(x,y)<u,\ \forall\ x\in X,\ u\in E_1\}$为凸集 (3.1)

(ii) $\exists$紧集$K\subset E$及$x_0\in X\cap K$，使

$$\varphi(x,x_0)+f(x_0)<f(x)\qquad(\forall\ x\in X\setminus K)\tag{3.2}$$

(iii)设F为E的有限维子空间，$\forall\ y\in X$，$f(x)-\varphi(x,y)$关于$x\in D=X\cap F$为(0)-下半连续；

(iv) 当$\{x_n\}\subset X\cap K$，$x_n\to x\in D$，且

$$\varphi(x_n,y)+f(y)\not<f(x_n)\qquad(\forall\ y\in D)\tag{3.3}$$

时，有

$$\varphi(x,y)+f(y)\not<f(x)\qquad(\forall\ y\in D)\tag{3.4}$$

则$\forall\ y\in X$，变分不等式

$$\varphi(x,y)\not<f(x)-f(y)\tag{3.5}$$

有解$\bar{x}\in X\cap K$．

证 对$y\in X$，令$G(y)=\{x\in X:f(y)+\varphi(x,y)\not<f(x)\}$．

(a) G为KKM映射：若不然，则$\exists\ \{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset X$使$\mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\not\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}G(y_i)$．

所以$\exists\ \tilde{y}\in\mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$\tilde{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iy_i$，$\lambda_i\geqslant0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$使$\tilde{y}\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}G(y_i)$．从而$\tilde{y}\in G(y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$f(y_i)+\varphi(\tilde{y},y_i)<f(\tilde{y})$．由(i)知$\Omega=\{y\in X:f(y)+\varphi(\tilde{y},y)<f(\tilde{y})\}$为凸集．故$\tilde{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iy_i\in\Omega$，从而$f(\tilde{y})+\varphi(\tilde{y},\tilde{y})<f(\tilde{y})$，于是$\varphi(\tilde{y},\tilde{y})<\theta$．这与定理的假设矛盾．故$G$为KKM映射．

(b) $\exists\ x_0\in X$使$\overline{G(x_0)}$紧：若X紧，因$G(x_0)\subset X$，所以$\overline{G(x_0)}$紧；若X非紧，由(ii)

知，∃紧集K及$x_0\in X\cap K$使(3.2)成立，从而$X\backslash K\not\subset G(x_0)\subset X$，所以$G(x_0)\subset X\cap K\subset K$，故$\overline{G(x_0)}$紧。

(c) 对每一$y\in X$，$G(y)$为有限闭集：设F为E的有限维子空间，$\{x_n\}\subset G(y)\cap F$，$x_n\to x$(当$n\to\infty$)。因$x_n\in G(y)$，则$f(y)+\varphi(x_n,y)\not< f(x_n)$。由(iii)有

$$f(x)-\varphi(x,y)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}[f(x_n)-\varphi(x_n,y)]\not> f(y),$$

所以$f(x)-\varphi(x,y)\not> f(y)$，$\forall y\in X$。故$x\in G(y)$，从而$x\in G(y)\cap F$。

(d) 对含x_0的$D=X\cap F$，均有$\left(\overline{\bigcap_{y\in D}G(y)}\right)\cap D=\left(\bigcap_{y\in D}G(y)\right)\cap D$：设$\{x_n\}\subset\bigcap_{y\in D}G(y)$，$x_n\to x\in D$。因$x_0\in D$，所以$\bigcap_{y\in D}G(y)\subset G(x_0)\subset X$。由(b)知，$G(x_0)\subset K$，所以$(x_n)\subset\bigcap_{y\in D}G(y)\subset G(x_0)\subset X\cap K$。又因对每一$y\in D$，均有$\{x_n\}\subset G(y)$，即(3.3)成立。由(iv)知(3.4)成立。所以对每一$y\in D$有$x\in G(y)$，即$x\in\bigcap_{y\in D}G(y)$。

(e) 现已证得G满足Gwinner定理的条件，所以存在$\bar{x}\in\bigcap_{y\in X}G(y)$。即对每一$y\in X$均有

$$f(\bar{x})\not> f(y)+\varphi(\bar{x},y).$$

又因$x_0\in X$，$G(x_0)\subset X\cap K$，所以$\bar{x}\in\bigcap_{y\in X}G(y)\subset G(x_0)\subset X\cap K$。 Q. E. D.

定理5 设E，E_1，f，φ同定理4，但X为E中的紧凸集。并且还满足：

(i) $\forall x\in X$，$\{y\in X: f(y)+\varphi(x,y)<u,\ u\in E_1\}$为凸集；

(ii) $\forall y\in X$，$f(x)-\varphi(x,y)$关于x为(0)-下半连续。则(3.5)有解$\bar{x}\in X$。

证 取$K=X$，则知定理4的(ii)满足。显然定理4的(iii)满足。下证满足定理4的(iv)。设$\forall y\in D$，$\{x_n\}\subset X\cap K$，$x_n\to x\in D$(当$n\to\infty$)。因

$$(3.3)\Leftrightarrow f(y)\not< f(x_n)-\varphi(x_n,y),$$

所以由(ii)有

$$f(x)-\varphi(x,y)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}[f(x_n)-\varphi(x_n,y)]\not> f(y).$$

即(3.4)成立。从而由定理4知本定理成立。 Q. E. D.

定理6 设E是Hausdorff拓扑线性空间，E_1为(σ)-备的Riesz空间，$X\subset E$为紧凸集。若$\varphi: X\times X\to E_1$满足：

(i) $\forall y\in X$，$\varphi(x,y)$关于$x\in X$为(0)-下半连续；

(ii) $\forall x\in X$，$\{y\in X:\varphi(x,y)>u,\ u\in E_1\}$为凸集。

则∃$x_0\in X$使

$$\sup_{y\in X}\varphi(x_0,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,y)\not>\sup_{x\in X}\varphi(x,x).$$

证 首先令$\phi(x)=\sup_{y\in X}\varphi(x,y)$。同定理3的方法一样，可证得$\phi(x)$下半连续且达到下确界。下证当$f=\theta$时，定理5⇔定理6。

(⇒)令$\psi(x,y)=\sup_{x\in X}\varphi(x,x)-\varphi(x,y)$，则$\forall x\in X$，$\psi(x,x)\not<\theta$，且

$$(0)-\varliminf_{n\to\infty}[-\psi(x_n,y)]=-\sup_{x\in X}\varphi(x,x)+(0)-\varliminf_{n\to\infty}[+\varphi(x_n,y)]$$

$$\geqslant-\sup_{x\in X}\varphi(x,x)+\varphi(x,y)=-\psi(x,y),$$

$$\{y\in X:\psi(x,y)=\sup_{x\in X}\varphi(x,x)-\varphi(x,y)<\sup_{x\in X}\varphi(x,x)-u\}\text{为凸集}.$$

从而$\psi(x,y)$满足定理5的条件，所以∃$\bar{x}$使$\psi(\bar{x},y)\not<\theta$，即$\varphi(\bar{x},y)\not>\sup_{x\in X}\varphi(x,x)$，

从而$\sup\limits_{y\in X}\varphi(\bar{x},y)\not\succ\sup\limits_{x\in X}\varphi(x,x)$. 由于$X$紧且$\sup\limits_{y\in X}\varphi(x,y)$下半连续，故$\exists\, x_0\in X$使

$$\sup_{y\in X}\varphi(x_0,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,y)\leqslant\sup_{y\in X}\varphi(\bar{x},y)\not\succ\sup_{x\in X}\varphi(x,x).$$

即

$$\sup_{y\in X}\varphi(x_0,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,y)\not\succ\sup_{x\in X}\varphi(x,x).$$

($\Leftarrow$)令$\psi(x,y)=-\varphi(x,y)$. 由定理5的条件，$\forall x\in X$，$\varphi(x,x)\not\prec\theta$，所以$\psi(x,x)\not\succ\theta$. 令$x_n\to x$(当$n\to\infty$)，于是

$$(0)-\varliminf_{n\to\infty}\psi(x_n,y)=(0)-\varliminf_{n\to\infty}[-\varphi(x_n,y)]\geqslant-\varphi(x,y)=\psi(x,y),$$

又 $\{y\in X:\psi(x,y)=-\varphi(x,y)>-u,\ u\in E_1\}$为凸集. 从而$\psi(x,y)$满足定理6的条件. 所以$\exists\,\bar{x}\in X$使 $\sup\limits_{y\in X}\varphi(\bar{x},y)\not\succ\sup\limits_{x\in X}\varphi(x,x)$.

所以$\psi(\bar{x},y)\not\succ\theta$ ($\forall y\in X$)，即$\varphi(\bar{x},y)\not\prec\theta$ ($\forall y\in X$). Q. E. D.

参考文献

[1] Aubin, J.P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, New York, Wiley-Interscience Publication (1984).

[2] Lassonde, M., On the use of KKM multifunctions in fixed point theorems and scalated topic, *J. Math. Anal. Appl.*, 9 (1983) 151—201.

[3] 史樹中，完备向量格的凸集分离定理及应用，数学年刊，6A (4) (1985), 431—438.

[4] 王苏生，半序线性空间的凸锥分离定理及其应用，应用数学学报，9 (3) (1986), 309—318.

[5] Bardaro, C. and P. Ceppitelli, Some further generalizations of Kanster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 132 (1988), 484—490.

[6] 关肇直，《泛函分析讲义》，高等教育出版社，北京 (1958).

[7] Gwinner, J., On fixed points and variational inequalities—A circular tour, *Nonlinear Anal.*, 5 (5) (1981), 565—583.

Generalized Variational Inequalities and Minimax Theorems

Yan Xin-li

(Xi'an Institute of Metallurgy and Construction Eng., Xi'an)

Li Bing-you

(Hebei Normal University, Shijiazhuang)

Abstract

In the present paper we discuss the variational problem of operator which maps a Hausdorff topological linear space into a Riesz space[6]. We give absolute inequality and relative ineguality, respectively.

Key words finite closed set, KKM mapping, Riesz space, Gwinner theorem