应用数学和力学，第12卷第9期（1991年9月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 非均匀弹性地基圆板轴对称弯曲的一般解*

纪 振 义

（安徽建筑工业学院，1989年9月16日收到）

## 摘 要

本文在阶梯折算法的基础上，提出一个新的方法——精确解析法，得到了非均匀弹性地基圆板弯曲的一般解．文中导出了在任意轴对称载荷和边界条件下求解非均匀弹性地基圆板和中心带孔圆板弯曲的一般公式，并给出一致收敛于精确解的证明．文中得到的一般解可直接计算无弹性地基圆板的弯曲问题．问题最后归结为求解一个二元一次代数方程．文末给出算例，算例表明无论内力和位移均可得到满意的结果．

**关键词** 精确元解法 非均匀圆薄板 一般解

## 一、引 言

非均匀带有弹性地基圆板在工程中应用很广泛，如建筑物的底板等，求解它的弯曲问题有重大的实际意义．

在文[1]中，对均匀轴对称弹性地基圆板的研究给出以贝塞尔函数表示的解析解．文[2]则用边界元法，文[3]用点沉法求解任意载荷下弹性地基圆板的弯曲问题．但[1～3]中的方法将很难求解非均匀轴对称弹性地基圆板的弯曲问题．

本文在阶梯折算法的基础上[4]，提出精确解析法，利用此方法可以把非均匀弹性地基上圆板弯曲问题的变系数微分方程离散为常系数微分方程，这里不仅对弯曲刚度进行离散，同时也对径向坐标$r$进行离散．然后通过连续条件可将解写成一个用多项式表达的解析表达式，为优化提供方便，它可直接用于非均匀无弹性地基圆板的弯曲问题．文中给出证明，所得到的解一致收敛于精确解，内力和位移均有二阶收敛精度．容易处理实心圆板和中心带孔圆板的各种边界条件．

问题最后归结为求解一个二元一次代数方程组，计算既简便又迅速．文末给出算例，表明无论是内力还是位移均可得到满意结果，并收敛于精确解．

## 二、在任意轴对称载荷和边界条件下的一般解

对一非均匀轴对称带有弹性地基的圆板它的挠度微分方程可归结为一个变系数微分方程

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dM_r}{dr}\right)+\frac{dM_r}{dr}-\frac{dM_t}{dr}-k(r)w(r)+q(r)=0 \tag{2.1}$$

* 叶开沅推荐．

内力和位移的关系

$$\left.\begin{aligned}&M_r=-D(r)\left(\frac{d\theta}{dr}+\frac{\nu(r)}{r}\theta\right),\ M_t=-D(r)\left(\frac{\theta}{r}+\nu(r)\frac{d\theta}{dr}\right)\\&rQ_r=M_t-M_r-r\frac{dM_r}{dr},\ \theta=\frac{dw}{dr}\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

式中 $w,\theta$为圆板的挠度和转角；$M_r,M_t$为径向和周向弯矩；$Q_r$为径向剪力；$\nu(r)$ 和$k(r)$为圆板的泊松比和地基模量；$D(x)$ 为圆板的抗弯刚度，等于 $E(r)h^3(r)/12(1-\nu^2(r))$，这里$E(r)$和$h(r)$分别是板的弹性模量和厚度；$r$，$q(r)$为圆板的径向坐标和横向分布载荷。

我们把弹性地基板沿径向分布分为$N$ 个单元，可以把每个单元看作是均匀的. 设第$i$个单元的区间为$[r_{i-1},\ r_i)$，方程(2.1)可转化为

$$D_i\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)w+k(r)w=q(r)\qquad(r\in[r_{i-1},\ r_i))\tag{2.3}$$

如果在单元交接处满足连续条件

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}w(r_{i-1}-\varepsilon)=w(r_{i-1}),\ \lim_{\varepsilon\to0}r_{i-1}\theta(r_{i-1}-\varepsilon)=r_{i-1}\theta(r_{i-1})\\&\lim_{\varepsilon\to0}M_r(r_{i-1}-\varepsilon)=M_r(r_{i-1})=-D_i\left(\frac{d\theta}{dr}+\frac{\nu_i}{r}\theta\right)_{r=r_{i-1}}\\&\lim_{\varepsilon\to0}r_{i-1}Q_r(r_{i-1}-\varepsilon)=r_{i-1}Q_r(r_{i-1})=-\left[rD_i\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)w\right]_{r=r_{i-1}}\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

不难证明，由(2.3)和(2.4)得到的$w$，$r\theta$，$M_r$和$rQ_r$一致收敛于(2.1)和(2.2) 的精确解. 式中带下标$i$的函数$(\cdots)_i$等于$(\cdots)_{r=(r_{i-1}+r_i)/2}$. 对于任意的$k(r)$，求解(2.3)仍是一桩困难的事. 为此，把(2.3)改写为

$$D_i\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)w+(r^2k(r)w)_{,r}-r(rk(r)w)_{,r}=qr\tag{2.5}$$

利用本文的方法，式(2.5)可以转化为

$$D_i\frac{d^4\bar{w}}{dr^4}=q(r)\qquad(r\in[r_{i-1},r_i))\tag{2.6}$$

此外在单元交接处须满足连续条件

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\bar{w}(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{w}(r_{i-1}),\ \lim_{\varepsilon\to0}\bar{r}_{i-1}\bar{\theta}(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{r}_i\bar{\theta}(r_{i-1})=\bar{r}_i\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_{r=r_{i-1}}\\&\lim_{\varepsilon\to0}\bar{M}_r(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{M}_r(r_{i-1})=-D_i\left[\frac{d^2\bar{w}}{dr^2}-\frac{\bar{r}_i}{r^2}(1-\nu_i)\frac{d\bar{w}}{dr}\right]_{r=r_{i-1}}\\&\lim_{\varepsilon\to0}\bar{r}_{i-1}\bar{Q}_r(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{r}_i\bar{Q}_r(r_{i-1})=\left[-D_i\bar{r}_i\frac{d^3\bar{w}}{dr^3}+(r-\bar{r}_i)k(r)r\bar{w}(r)\right]_{r=r_{i-1}}\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

可以证明，由(2.6)和(2.7)得到的$\bar{w}(r)$，$\bar{r}_i\bar{\theta}(r)$，$\bar{M}_r(r)$和$\bar{r}_i\bar{Q}_r(r)$在区间$[r_{i-1},\ r_i)$上一致收敛于(2.1)和(2.2)的精确解$w$，$r\theta$，$M_r$和$rQ_r$，并有二阶收敛精度. 式中$\bar{r}_i=(r_i+r_{i-1})/2$，$\varepsilon$是一个任意的正数.

假设圆板的半径为$R=r_N$，由(2.6)～(2.7)，一般解可以写为[6]

$$\{\delta(r)\}=[F_i(r-r_{i-1})]\{\delta(r_0)\}+\{P_i(r)\}+\sum_{m=1}^{i-1}\{r-r_m\}^{\circ}[F_i(r-r_{i-1})]\{A_m\}\quad(r\in[r_{i-1},r_i))$$

$$\{A_{i-1}\}=([F_{i-1}(r_{i-1}-r_{i-2})]-[I])\{\delta(r_0)\}+\{P_{i-1}(r_{i-1})\}+$$

$$+\sum_{m=1}^{i-2}\{r-r_m\}^{\circ}([F_{i-1}(r_{i-1}-r_{i-2})]-[I])\{A_m\} \tag{2.8}$$

这里，矢量

$$\{\delta(r)\}=\{\bar w(r)\ \ \bar r_i\bar\theta(r)\ \ \bar M_r(r)\ \ \bar r_i\bar Q_r(r)\}^T \tag{2.9}$$

记号

$$\{r-r_m\}^{\circ}=\begin{cases}0 & (r<r_m)\\ 1 & (r\geqslant r_m)\end{cases}$$

为Heaviside函数，$[F_i(r)]$是一个$4\times4$矩阵，$\{P_i(r)\}$是一个$4\times1$向量，它们分别是(2.6)的基本解和特解，并满足

$$[F_i(0)]=[I],\qquad \{P_i(r_{i-1})\}=0 \tag{2.10}$$

利用(2.6)，(2.7)，(2.9)和(2.10)，我们可以得到

$$[F_i(r-r_{i-1})]=\begin{bmatrix}
1-\frac{\Delta r}{12D_i\bar r_i}k(r_{i-1})r_{i-1}(r-r_{i-1})^3 & \frac{r-r_{i-1}}{\bar r_i}+\frac{1}{2r^2_{i-1}}(1-\nu_i)(r-r_{i-1})^2 & -\frac{1}{2D_i}(r-r_{i-1})^2 & -\frac{1}{6D_i\bar r_i}(r-r_{i-1})^3\\
-\frac{\Delta r}{4D_i}k(r_{i-1})r_{i-1}(r-r_{i-1})^2 & 1+\frac{\bar r_i}{r_{i-1}}(1-\nu_i)(r-r_{i-1}) & -\frac{\bar r_i}{D_i}(r-r_{i-1}) & -\frac{1}{2D_i}(r-r_{i-1})^2\\
\frac{\Delta r\cdot r_{i-1}}{2\bar r_i}k(r_{i-1})(r-r_{i-1})-\frac{\Delta r}{4r^2}(1-\nu_i)k(r_{i-1})r_{i-1}(r-r_{i-1})^2 & -D_i\left[\frac{1}{r^2_{i-1}}(1-\nu_i)-\frac{1}{r^2}(1-\nu_i)\left[1+\frac{\bar r_i}{r_{i-1}}(1-\nu_i)(r-r_{i-1})\right]\right] & 1-\frac{\bar r_i}{r^2}(1-\nu_i)(r-r_{i-1}) & \frac{r-r_{i-1}}{\bar r_i}-\frac{1-\nu_i}{2r^2}(r-r_{i-1})^2\\
\frac{\Delta r}{2}k(r_{i-1})r_{i-1}+(r-\bar r_i)rk(r)\left[1-\frac{\Delta r}{12D_i\bar r_i}k(r_{i-1})r_{i-1}(r-r_{i-1})^3\right] & (r-\bar r_i)rk(r)\left(\frac{r-r_{i-1}}{\bar r_i}+\frac{1}{2r^2_{i-1}}(1-\nu_i)(r-r_{i-1})^2\right) & -\frac{1}{2D_i}(r-\bar r_i)rk(r)(r-r_{i-1})^2 & 1-\frac{r-\bar r_i}{6D_i\bar r_i}rk(r)(r-r_{i-1})^3
\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

这里$\Delta r=r_i-r_{i-1}$为第$i$个单元的长度，我们不难得到特解

$$\{P_i(r)\}=q\bar r_i\begin{Bmatrix}
\int_{r_{i-1}}^{r}\frac{1}{6D_i\bar r_i}(r-\rho)^3d\rho\\
\int_{r_{i-1}}^{r}\frac{1}{2D_i}(r-\rho)^2d\rho\\
\int_{r_{i-1}}^{r}\left[\frac{1}{\bar r_i}(r-\rho)+\frac{1-\nu_i}{2r^2}(r-\rho)^2\right]d\rho\\
\int_{r_{i-1}}^{r}\left[-1+\frac{r-\bar r_i}{6D_i\bar r_i}(r)r(r-\rho)^3\right]d\rho
\end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

如果有轴对称集中力$P$和集中力矩$M$分别作用在第 $i$ 个单元$r_p$和$r_m$ 处，注意它与横向分布载荷 $q_p(r)=P\delta(r-r_p)$，$q_m=-M\delta'(r-r_m)$等价，代入(2.12)直接积分可得对应的特解

$$\{P_i(r)\}_p=P\bar{r}_i\{r-r_p\}^\circ\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{6D_i\bar{r}_i}(r-r_p)^3\\ \dfrac{1}{2D_i}(r-r_p)^2\\ -\dfrac{1}{\bar{r}_i}(r-r_p)+\dfrac{1-\nu_i}{2r^2}(r-r_p)^2\\ -1+\dfrac{r-\bar{r}_i}{6D_i\bar{r}_i}k(r)r(r-r_p)^3\end{Bmatrix}$$

$$\{P_i(r)\}_m=-M\bar{r}_i\{r-r_m\}^\circ\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2D_i\bar{r}_i}(r-r_p)^2\\ \dfrac{1}{D_i}(r-r_p)\\ -\dfrac{1}{\bar{r}_i}+\dfrac{1-\nu_i}{r^2}(r-r_p)\\ \dfrac{r-\bar{r}_i}{2D_i\bar{r}_i}rk(r)(r-r_p)^2\end{Bmatrix}\tag{2.13}$$

通过(2.8)式，即可求出带有轴对称集中力和集中力矩$M$ 作用的非均匀弹性地基圆板弯曲的一般解。

把$r=r_N$代入(2.8)式，可得

$$\{\delta(r_N)\}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}&k_{14}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}&k_{24}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}&k_{34}\\k_{41}&k_{42}&k_{43}&k_{44}\end{bmatrix}\{\delta(r_0)\}+\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{Bmatrix}\tag{2.14}$$

这里$k_{ij}$和$f_i$均为已知量，我们按$\{\delta(r)\}$中元素的次序编上号。例如，当$w$和$M_r$在边界上已知时，则已知边界条件的编号为(1,3)，未知边界条件是(2,4)。若在$r=r_0$处已知边界条件的编号为($m_1$，$m_2$)，未知边界条件的编号为($m_3$,$m_4$)，在$r=r_N$处已知边界条件的编号为($n_1$,$n_2$)，则问题最后归结为求解二元一次方程组

$$\begin{bmatrix}k_{n_1m_3}&k_{n_1m_4}\\k_{n_2m_3}&k_{n_2m_4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{m_3}(r_0)\\\delta_{m_4}(r_0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta_{n_1}(r_N)\\\delta_{n_2}(r_N)\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}f_{n_1}\\f_{n_2}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}k_{n_1m_1}&k_{n_1m_2}\\k_{n_2m_1}&k_{n_2m_2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{m_1}(r_0)\\\delta_{m_2}(r_0)\end{Bmatrix}\tag{2.15}$$

式中记号$\delta_m(r_0)$表示$\{\delta(r_0)\}$中第$m$个元素。求出$\{\delta(r_0)\}$，利用(2.8)式，即可求出圆板任一点的位移和内力。

当问题是中心带孔的圆板，可直接用(2.8)式求解。对于实心圆板，问题比较复杂。当$r_0=0$时，$[F_1(r-r_0)]$将出现奇异。注意在圆心处的边界条件

$$\lim_{r_0\to0}\delta_2(r_0)=\theta(0)=0,\ \lim_{r_0\to0}\delta_4(r_0)=\lim_{r_0\to0}r_0Q_r(r_0)=\frac{-P}{2\pi}$$

因此让矩阵$[P_1(r-r_0)]$中奇异元素 $F_{12}=F_{32}=F_{42}=0$，$F_{22}=1$ (2.16)

不会改变原问题的解。通过(2.16)，我们消除了$[F_1(r-r_0)]$的奇异性。式中$P$为作用于圆心

处的集中力，$F_{ij}$是$[F_1(r-r_0)]$中第$i$行第$j$列元素．此外由于

$$\lim_{r_1\to 0}F_{33}=1-\frac{1}{2}(1-\nu_1),\ \lim_{r_1\to 0}F_{34}=2-\frac{1}{2}(1-\nu_1)$$

我们可得在圆心处的弯矩

$$M_r(0)=\left[1-\frac{1}{2}(1-\nu_1)\right]\delta_3(0)+\left[2-\frac{1}{2}(1-\nu_1)\right]\delta_4(0)$$

这里$\delta_3(0)$和$\delta_4(0)$由(2.15)式所决定．

## 三、收敛性证明

我们把(2.6)式改写为

$$D_i\frac{d}{dr}\left(\bar{r}_i\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{\bar{r}_i}\frac{d}{dr}\bar{r}_i\frac{d}{dr}\right)\bar{w}+(\bar{r}_i rk(r)\bar{w})_{,r}-\bar{r}_i(rk(r)\bar{w})_{,r}=q\bar{r}_i \tag{3.1}$$

同时把(2.5)和(3.1)分别写成算子形式

$$A_iw=rq(r),\ \bar{A}_i\bar{w}=\bar{r}_iq(r)\qquad (r\in[r_{i-1},r_i)) \tag{3.2}$$

因为$A_i$和$\bar{A}_i$均为线性算子，因此内积

$$\lim_{N\to\infty}(\varphi,Aw-\bar{A}\bar{w})=\lim_{N\to\infty}\left(\varphi,\sum_{i=1}^{N}(A_iw-\bar{A}_i\bar{w})\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\varphi,\sum_{i=1}^{N}(r-r_i)q(r)\right)=0 \tag{3.3}$$

这里$\varphi\in w_2^{(2)}$，$w_2^{(2)}$为索伯列夫空间，利用分部积分，当$N\to\infty$时，我们有

$$\lim_{N\to\infty}(\varphi,Aw-\bar{A}\bar{w})=\lim_{N\to\infty}(A^*\varphi,w-\bar{w})+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big\{-\varphi(rQ_r-\bar{r}_i\bar{Q}_r)$$
$$-\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)\left[D_i\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)w-\frac{d^2\bar{w}}{dr^2}\right]+\left[\frac{D_i}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(r\frac{dw}{dr}-\bar{r}_i\frac{d\bar{w}}{dr}\right)\right]-\left(D_ir\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right)(w-\bar{w})\Big\}\right|_{r_{i-1}}^{r_i}$$
$$=\lim_{N\to\infty}(A^*\varphi,w-\bar{w})+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big\{-\varphi(rQ_r-\bar{r}_i\bar{Q}_r)+r\theta^*(M_r-\bar{M}_r)$$
$$-M_r^*\left[r\frac{dw}{dr}-\bar{r}_i\frac{d\bar{w}}{dr}\right]+rQ_r^*(w-\bar{w})\Big\}\Big|_{r_{i-1}}^{r_i}=0 \tag{3.4}$$

这里 $A^*=A,\theta^*=\dfrac{d\varphi}{dr},M_r^*=-D_i\left(\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}+\dfrac{\nu_i}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}\right),\ Q^*=-D_ir\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}r\dfrac{d}{dr}\right)\varphi$ (3.5)

并假定在$[r_0,r_N]$上连续．利用单元交接处的连续条件(2.4)和(2.7)及4个已知边界条件，同时令4个未知边界条件对应的共轭边界条件为零，则可得

$$\lim_{N\to\infty}(A^*\varphi,\ w-\bar{w})=0 \tag{3.6}$$

根据Hilbert-伴随算子的逆定理，当$A$在给定的边界条件有逆算子$A^{-1}$存在时，$A^*$在零共轭边界零件下也有逆，特别地当 $A^*\varphi=w-\bar{w}$
时有唯一解$\varphi\in w_2^{(2)}$，可使$M_r^*$和$rQ_r^*$在区间$[r_0,r_N]$连续．因此我们有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{r_0}^{r_N}(w-\bar{w})^2dr=0 \tag{3.7}$$

因$w-\tilde{w}$，$r\theta-\bar{r}_i$ ，$M_r-\tilde{M}_r$和$rQ_r-\bar{r}_i\tilde{Q}_r$在$[r_0,r_N]$上连续，因此有界，通过(3.7)式很容易证明$\tilde{w}$，$\bar{r}_i\tilde{\theta}$，$\tilde{M}_r$和$\bar{r}_i\tilde{Q}_r$一致收敛于(2.5)的解$w$，$r\theta$，$M_r$和$rQ_r$。

现给出在单元交接处位移和内力均具有二阶收敛的证明，由(3.4)，(3.6)，(2.4)，(2.7)，并利用已知边界条件和零共扼边界条件，有

$$\int_{r_0}^{r_m}\varphi(Aw-\bar{A}\tilde{w})dr+O_1(\Delta r^2)=[-\varphi(rQ_r-\bar{r}_i\tilde{Q}_r)+r\theta^*(M_r-\tilde{M}_r)$$

$$-M_r^*\left(r\frac{dw}{dr}-\bar{r}_i\frac{d\tilde{w}}{dr}\right)+rQ_r^*(w-\tilde{w})]_{r=r_m}+O_2(\Delta r^2)=0\qquad(0<m\leqslant N)\qquad(3.8)$$

因$\varphi$，$\theta^*$，$M_r^*$和$Q_r^*$的任意性，由（3.8）即可得位移和内力在单元交接处均具有二阶收敛速率。由以上结论，在$\{\delta(r_0)\}$确定后，利用(2.8)式求任一点的$\{\delta(r)\}(r\in[r_m,r_{m+1}))$时，如果将区间$[r_m,r]$作为一个单元来考虑，这样得到的$\{\delta(r)\}$可具有二阶收敛速率。

同理可证(2.5)的解一致收敛于(2.1)的解，也具有二阶收敛速率。因此(2.6）的解也一致收敛于(2.1)的解，具有二阶精度。

## 四、算　　例

**算例1**　一个均匀实心圆板，它的半径$R=10$cm，板厚$t=1$cm，弹性模量$E=1000\times9.8$N/cm$^2$，泊松比$\nu=0.17$。圆板中心受集中力$P=2\pi$的作用。圆板周边固支。表1给出单元数目$N=30$时，地基模量$k=0$和$k=0.27766\times9.8$N/cm$^2$时位移和内力的计算结果。表2给出$N$增大时，位移和内力收敛情况。

**算例2**　为一简支的均匀实心圆板。板的半径，板厚、载荷，弹性模量和泊松比与例1相同。表3给出了$N=30$，弹性地基模量 $k=0$ 和 $k=0.27766\times9.8$N/cm$^2$时位移和内力计算结果。

**算例3**　一个变厚度无弹性地基简支圆板，受均布载荷$q$作用。板的半径为$R$，弹性模量为$E$。板厚 $h=h_0+r(h_1-h_0)/R$

**表　1　　承受集中载荷均匀固支圆板位移和内力($N=30$)**

| $r/R$ | | 0.0 | | 0.2 | | 0.4 | | 0.6 | | 0.8 | | 1.0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ |
| 本文解 | $w$ | 0.1492 | 0.1197 | 0.1219 | 0.0952 | 0.0800 | 0.0604 | 0.0398 | 0.0291 | 0.0109 | 7.7$E$-3 | 0 | 0 |
| | $r\theta$ | 0 | 0 | −0.0381 | −0.0328 | −0.0860 | −0.0690 | −0.1076 | −0.0813 | −0.0835 | −0.0603 | 0 | 0 |
| | $M_r$ | 1.260 | 1.121 | 0.4292 | 0.3131 | 0.0318 | −0.0240 | −0.2036 | −0.1843 | −0.3713 | −0.2802 | −0.5015 | −0.3516 |
| | $rQ_r$ | −1 | −1 | −1 | −0.9418 | −1 | −0.8154 | −1 | −0.6959 | −1 | −0.6301 | −1 | −0.6176 |
| 精确解 | $w$ | 0.1457 | | 0.1211 | | 0.0796 | | 0.0397 | | 0.0108 | | 0 | |
| | $r\theta$ | 0 | | −0.0375 | | −0.0854 | | −0.1072 | | −0.0832 | | 0 | |
| | $M_r$ | ∞ | | 0.4415 | | 0.0360 | | −0.2012 | | −0.3695 | | −0.5000 | |
| | $rQ_r$ | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | |
| [3]解 | $w$ | | 0.1167 | | 0.0947 | | 0.0603 | | 0.0291 | | 7.7$E$-3 | | 0 |

**表 2　随$N$增大时，固支圆板位移和内力的收敛情况**

| $N$ | | 5 | | 10 | | 60 | | 120 | | 精确解 | [3]解 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ |
| $r/R=0$ | $w$ | 0.1917 | 0.1582 | 0.1638 | 0.1329 | 0.1468 | 0.1175 | 0.1460 | 0.1168 | 0.1457 | 0.1167 |
| | $M_r$ | 0.1927 | 0.0647 | 0.6122 | 0.4750 | 1.666 | 1.527 | 0.2072 | 1.932 | ∞ | |
| $r/R=0.5$ | $w$ | 0.0634 | 0.0466 | 0.0600 | 0.0446 | 0.0588 | 0.0437 | 0.0588 | 0.0437 | 0.0588 | 0.0438 |
| | $r\theta$ | −0.1105 | −0.0870 | −0.1044 | −0.0814 | −0.1011 | −0.7086 | −0.1010 | 0.0785 | −0.1010 | |
| | $M_r$ | −0.1650 | −0.1858 | −0.1163 | −0.1351 | −0.0954 | −0.1143 | −0.0948 | −0.1136 | −0.0945 | |
| | $rQ_r$ | −1 | −0.7389 | −1 | −0.1464 | −1 | −0.7516 | −1 | −0.7518 | −1 | |
| $r/R=1$ | $M_r$ | 0.5357 | −0.3749 | −0.5107 | −0.3571 | −0.5004 | −0.3511 | −0.5001 | −0.3509 | −0.5000 | |
| | $rQ_r$ | −1 | −0.5995 | −1 | −0.6110 | −1 | −0.6185 | −1 | −0.6188 | −1 | |

**表 3　承受集中载荷均匀简支圆板位移和内力($N=30$)**

| $r/R$ | | 0.0 | | 0.2 | | 0.4 | | 0.6 | | 0.8 | | 1.0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ | $k=0$ | $k=0.278$ |
| 本文解 | $w$ | 0.3997 | 0.1845 | 0.3618 | 0.1585 | 0.2899 | 0.1188 | 0.1997 | 0.0773 | 0.1008 | 0.03762 | 0 | 0 |
| | $r\theta$ | 0 | 0 | −0.0580 | −0.0358 | −0.1659 | −0.0832 | −0.2874 | −0.1224 | −0.4031 | −0.1542 | −0.4995 | −0.1842 |
| | $M_r$ | 1.762 | 1.190 | 0.9307 | 0.3962 | 0.5333 | 0.1004 | 0.2979 | $4.9E-3$ | 0.1302 | −0.0105 | 0 | 0 |
| | $r\theta_r$ | −1 | −1 | −1 | −0.9063 | −1 | −0.6785 | −1 | −0.4106 | −1 | −0.1918 | −1 | −0.1022 |
| 精确解 | $w$ | 0.3947 | | 0.3601 | | 0.2888 | | 0.1990 | | 0.1005 | | 0 | |
| | $r\theta$ | 0 | | −0.0574 | | −0.1651 | | −0.2864 | | −0.4019 | | −0.4980 | |
| | $M_r$ | ∞ | | 0.9415 | | 0.5360 | | 0.2988 | | 0.1305 | | 0 | |
| | $rQ_r$ | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | |
| [3]解 | $w$ | | 0.1813 | | 0.1579 | | 0.1186 | | 0.0772 | | 0.0376 | | 0 |

这里$h_0$和$h_1$分别是$r=0$和$r=R$处板的厚度。表 4 给出当$h_0/h_1=1$和$h_0/h_1=2.33$ 时挠度和弯矩的计算结果。由于$\bar{M}_r$和$\bar{r}_i\tilde{\theta}$分别收敛于精确解$M_r$和$r\theta$。利用(2.2)式，不难得到周向弯矩

$$M_t(r)=\lim_{N\to\infty}\left(\nu_i\bar{M}_r-D_i(1-\nu_i^2)\frac{\bar{r}_i\tilde{\theta}}{r^2}\right)\qquad(r\in[r_{i-1},r_i))$$

$M_t$的计算结果也列于表4。

**表 4　承受均布载荷变厚度简支圆板的挠度和弯曲**

| $\frac{h_0}{h_1}$ | $N$ | $w_{max}=\alpha qR^2/Eh_0$ | $M_r=\beta qR^2$ | | $M_t=\beta qR^2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $r=0$　$\beta$ | $r=0.5R$　$\beta$ | $r=0$　$\beta$ | $r=0.5R$　$\beta$ | $r=R$　$\beta$ |
| 1 | 8 | 0.2778 | 0.2089 | 0.1531 | 0.2089 | 0.1784 | 0.0955 |
| | 30 | 0.7417 | 0.2037 | 0.1524 | 0.2037 | 0.1760 | 0.0938 |
| | 250 | 0.7383 | 0.2031 | 0.1523 | 0.2031 | 0.1758 | 0.0938 |
| | 解析解[1] | 0.738 | 0.203 | 0.152 | 0.203 | 0.176 | 0.094 |
| 2.33 | 8 | 2.141 | 0.2997 | 0.1975 | 0.2997 | 0.1680 | 0.0279 |
| | 30 | 2.054 | 0.3031 | 0.1958 | 0.3031 | 0.1669 | 0.0273 |
| | 250 | 2.047 | 0.3055 | 0.1957 | 0.3055 | 0.1668 | 0.0273 |
| | 解析解[1] | 2.04 | 0.304 | 0.196 | 0.304 | 0.167 | 0.029 |

**算例4**　为一固支变厚度非均匀弹性地基圆板，它在圆心处受一集中力$P=-2\pi$作用，它的半径$R=10$，泊松比$\nu=0.17$，板的弹性模量$E$，地基模量$k$和厚度$h$在［0,$R$］中呈线性分

布。在圆心处$E(0)=1000$，$h(0)=1$和$k(0)=0.27766$，在$r=R$处，$E(10)=2000$，$h(10)=2$和$k(10)=0.55532$。在表5中给出当$N=30$和60时，位移和内力的计算结果。

表 5 非均匀变厚度弹性地基圆板的位移和内力

| $r/a$ | | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N=30$ | $w$ | −0.0349 | −0.0223 | −0.0113 | −4.4$E$-3 | −9.9$E$-4 | 0 |
| | $r\theta$ | 0 | 0.0130 | 0.0177 | 0.0149 | 8.4$E$-3 | 0 |
| | $M_r$ | −0.5739 | 0.0381 | 0.2960 | 0.4334 | 0.5306 | 0.6125 |
| | $rQ_r$ | 1 | 0.9833 | 0.9491 | 0.9189 | 0.9032 | 0.9003 |
| $N=60$ | $w$ | −0.0337 | −0.0221 | −0.0112 | −4.4$E$-3 | −9.9$E$-4 | 0 |
| | $r\theta$ | 0 | 0.0128 | 0.0176 | 0.0149 | 8.3$E$-3 | 0 |
| | $M_r$ | −0.9655 | 0.0241 | 0.2904 | 0.4301 | 0.5282 | 0.6107 |
| | $rQ_r$ | 1 | 0.9835 | 0.9494 | 0.9193 | 0.9036 | 0.9008 |

从以上四个算例可以看出，由本文的方法计算的结果是满意的，并收敛于精确解。对于在圆心处受集中力作用的实心圆板，$M_r$ 在圆心处的值趋于无穷大。算例结果表明，在这种情况下，由本文方法得到的$M_r$在偏离圆心处仍可收敛于精确解。

## 参 考 文 献

[1] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition. Mc Graw-Hill Book Company(1959).

[2] 沈锡英、郑大同，应用边界元素法计算文克勒尔地基圆板，工程力学，2 (2) (1985), 10—19.

[3] 文丕华，求解弹性地基圆板问题的点沉法，工程力学，4 (2) (1987), 18—26.

[4] 叶开沅，非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解，Ⅳ，非均匀变厚度梁的弯曲，稳定和自由振动，兰州大学学报，力学专号，1 (1979), 133—157.

[5] 纪振义，阶梯折算法的收敛条件及其一般格式，应用数学和力学，9 (12) (1988), 1117—1127.

# The General Solution for Axial Symmetrical Bending of Nonhomogeneous Circular Plates Resting on an Elastc Foundation

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

**Abstract**

In this paper, a new method, the exact analytic method, is presented on the basis of step reduction method. By this method, the general solution for the bending of nonhomogenous circular plates and circular plates with a circular hole at the center resting on an elastic foundation is obtained under arbitrary axial symmetrical loads and boundary conditions. The uniform convergence of the solution is proved. This general solution can also be applied directly to the bending of circular plates without elastic foundation. Finally, it is only necessary to solve a set of binary linear algebraic equation. Numerical examples are given at the end of this paper which indicate satisfactory results of stress resultants and displacements can be obtained by the present method.

**Key words** exact analytic method, nonhomogeneous circular thin plate, general solution