应用数学和力学，第12卷第7期（1991年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于圆薄板大挠度问题的正交条件解法*

戴世强

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所，1990年7月20日收到）

摘　　要

本文重新考察了钱伟长教授求解圆薄板大挠度问题的系统近似法，发现此法实质上可视为奇异摄动理论中的变形参数法．以无量纲中心挠度为小参数，将挠度、中面薄膜力和载荷参数作渐近展开，我们对所得的递推方程给出了正交条件(可解性条件)，据此可确定圆薄板的刚度特性．本文指出，利用圆薄板小挠度解和正交条件，可以不经求解方程而导得载荷参数与中心挠度关系的三阶近似以及中心点、边缘处的薄膜力的首项近似．文中对若干特例（均布载荷、复合载荷、各种边界条件）进行了具体计算，所得的结果与钱伟长、叶开沅、黄黔等人在文[1～4]中给出的结果完全相符．

关键词　圆薄板　大挠度　变形参数法　正交条件　摄动理论

一、引　　言

钱伟长教授[1,2]早年以中心挠度为摄动参数，提出了一种系统近似法，成功地解决了均布载荷和集中载荷作用下的弹性圆薄板的大挠度问题，并引发了一系列相关的工作，叶开沅教授[3]对此作了全面总结，国内外公认了钱伟长解的长处（参看[3，4]中的评述）．过去一般认为钱伟长的解法是一种正则摄动法．作者最近较为细致地研究了他的解法，发现应将它纳入奇异摄动理论中的变形参数法[5]的范畴．他从物理实际出发，一改前人直接以无量纲载荷参数为摄动参数的做法（该法效果不佳），选定中心挠度为小参数，把载荷参数也按该小参数展开，在摄动求解过程中确定展开系数；如果不作这样的展开，则高阶摄动方程无解．这种对参数进行变形的方法目前通称为变形参数法，又称为Lindstedt-Poincaré方法，在量子力学中称为Rayleigh-Schrödinger方法，在四十年代之前，似乎未见有人在固体力学中应用这一方法．

在按上述方法对圆薄板大挠度问题的摄动方程求解时，出现一系列非齐次线性常微分方程，高阶项的平衡方程具有齐次边界条件，这就有可能给出这些方程的正交条件（可解性条件）[5]，从而确定载荷展开式的系数．下一节我们对一般的对称载荷分布、一般的边界条件给出问题的基本方程及其摄动递推方程，并导得了摄动的平衡方程的伴随方程和正交条件．在第三至五节中，分别对三种特殊情形（均布载荷、边缘固定夹紧；均布载荷、一般边界条件；复合载荷、边缘固定夹紧）进行具体计算，不经求解方程导出三阶近似的载荷参数-中

* 国家自然科学基金资助的课题．

心挠度关系以及中心、边缘处薄膜力的首项近似，它们与文[1～4]中的已知结果完全一致。

相对于直接求解递推方程来说，本文的正交条件解法似乎较为简单，只涉及一些初等的积分过程；若实际问题中只需要了解板壳的典型弹性特征，则我们的方法有较大的优越性。

二、基本方程和正交条件

设圆薄板的半径为R，厚度为h；横向载荷为$qF(r)$(q为载荷参数)，挠度为$w(r)$，中面薄膜力为$N_r(r)$，$N_t(r)$，它们满足Kármán方程：

$$\begin{cases} D\dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}r\dfrac{dw}{dr}=N_r\dfrac{dw}{dr}+\dfrac{q}{r}\displaystyle\int_0^r F(r)dr \\ r\dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r^2N_r)=-\dfrac{1}{2}Eh\left(\dfrac{dw}{dr}\right)^2 \\ N_t=\dfrac{d}{dr}(rN_r) \end{cases} \tag{2.1}$$

式中 E为杨氏模量，$D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$，ν为泊松比。

边界条件为

$$\begin{cases} 当r=R时：w=0,\ \dfrac{d^2w}{dr^2}+\dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr}=-\dfrac{k_2}{D}\dfrac{dw}{dr} \\ \qquad N_r=-\dfrac{k_1}{Eh}\left[r\dfrac{dN_r}{dr}+(1-\nu)N_r\right) \\ 当r=0时：\dfrac{dw}{dr},\ N_r有限 \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 对于边缘简单支承，$k_1=0$，$k_2=0$；对于边缘简单铰支，$k_1=\infty$，$k_2=0$；

对于边缘固定夹紧，$k_1=\infty$，$k_2=\infty$；对于边缘可移夹紧，$k_1=0$，$k_2=\infty$；

对于其它弹性支承，$k_1\geqslant 0$，$k_2\geqslant 0$。

引进无量纲变量：

$$\begin{cases} x=r^2/R^2,\ W=\sqrt{3(1-\nu^2)}\,w/h \\ S=3(1-\nu^2)R^2N_r/Eh^3,\ T=3(1-\nu^2)R^2N_t/Eh^3 \\ Q=\dfrac{3}{4}(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}\,qR^4/Eh^4 \end{cases} \tag{2.3}$$

于是，Kármán方程和边界条件化为

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\frac{dW}{dx}\right)=S\frac{dW}{dx}+QG(x),\quad G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x F(R\sqrt{x})dx \tag{2.4a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xS)=-\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 \tag{2.4b}$$

$$T=S+2x\frac{dS}{dx} \tag{2.4c}$$

和

$$\begin{cases} 当x=1时：W=0,\quad \dfrac{dW}{dx}=-\lambda\dfrac{d^2W}{dx^2},\quad S=-\mu\dfrac{dS}{dx} \\ 当x=0时：\sqrt{x}\dfrac{dW}{dx},\ S有限 \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $$\lambda=2\left[\frac{k_2 a}{D}+(1+\nu)\right]^{-1}, \quad \mu=2\left[\frac{Eh}{k_1}+(1-\nu)\right]^{-1} \tag{2.6}$$

因此，问题归结为在边界条件(2.5)下求解方程组(2.4)。

令中心挠度$W(0)=W_m$，以W_m为小参数作渐近展开

$$\begin{cases} Q=q_1W_m+q_3W_m^3+\cdots \\ W=w_1(x)W_m+w_3(x)W_m^3+\cdots \\ S=S_2(x)W_m^2+S_4(x)W_m^4+\cdots \\ T=T_2(x)W_m^2+T_4(x)W_m^4+\cdots \end{cases} \tag{2.7}$$

代入方程(2.4)和边界条件(2.5)，比较W_m^n($n=1$，2，3，…)的系数，得到递推方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left(x\dfrac{dw_1}{dx}\right)=q_1G(x)=H_1(x), \\ w_1(1)=0,\ w_1'(1)+\lambda w''(1)=0,\ w_1(0)=1 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}(xS_2)=-\dfrac{1}{2}w_1'^2=H_2(x) \\ S_2(1)+\mu S_2'(1)=0,\ S_2(0)\text{有限} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left(x\dfrac{dw_3}{dx}\right)=S_2w_1'+q_3G(x)=H_3(x) \\ w_3(1)=0,\ w_3'(1)+\lambda w_3''(1)=0,\ w_3(0)=0 \end{cases} \tag{2.10}$$

…………

且有 $$T_2=S_2+2x\frac{dS_2}{dx} \tag{2.11}$$

作为预备步骤，我们给出(2.10)那种类型的问题的可解性条件（正交 条 件）。讨论如下问题：

$$\begin{cases} L\varphi=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x\dfrac{d\varphi}{dx}\right)=H(x) \qquad (x\in[0,1]) & (2.12a) \\ \varphi(0)=0,\ \varphi(1)=0,\ \varphi'(1)+\lambda\varphi''(1)=0 & (2.12b) \end{cases}$$

我们证明如下定理：

定理 1 问题(2.12a，b)的可解性条件（正交条件）为

$$\langle\psi,\ H\rangle=\int_0^1\psi(x)H(x)dx=0 \tag{2.13}$$

其中 $$\psi=x\ln x-\lambda x \tag{2.14}$$

证明 通过分部积分并利用边界条件(2.12b)，得到

$$\langle\psi,L\varphi\rangle=[(1-\lambda)\psi(1)+\lambda\psi'(1)]\varphi''(1)-\psi(0)\varphi'(0)-\langle\varphi,\tilde{L}\psi\rangle \tag{2.15}$$

其中 $$\tilde{L}\psi=-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) \tag{2.16}$$

如果ψ满足(2.12a)的伴随微分方程

$$\tilde{L}\psi=0 \tag{2.17}$$

和边界条件

$$\psi(0)=0,\ (1-\lambda)\psi(1)+\lambda\psi'(1)=0 \tag{2.18}$$

则(2.15)式的右端为零。容易看到，(2.14)式中给出的ψ满足(2.17)和(2.18)式，这时有

$$\langle\psi,L\varphi\rangle=\langle\psi,H\rangle=0 \tag{2.19}$$

定理证毕。

推论 1 当$\lambda=0$时，即当边界条件(2.12b)变成

$$\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi'(1)=0 \tag{2.20}$$

时，问题（2.12a,b）的正交条件（可解性条件）为

$$\langle x\ln x,\ H\rangle=\int_0^1 H(x)x\ln x dx=0 \tag{2.21}$$

三、均布载荷、边缘固定夹紧的情形

这是文[1]所考察的情形，此时，$F=G=1$，$\lambda=0$，$\mu=2/(1-\nu)$。问题（2.8）(即小挠度问题）的解为

$$w_1=(x-1)^2,\ q_1=4 \tag{3.1}$$

q_1也可由

$$\langle x\ln x,\ Lw_1\rangle=-w_1(0)=-1=\langle x\ln x,\ q_1\rangle=-\frac{1}{4}q_1 \tag{3.2}$$

求得。

于是，问题（2.9）变为

$$\begin{cases} L_1S_2=\dfrac{d^2}{dx^2}(xS_2)=-2(x-1)^2=H_2 \\ S_2(1)+\mu S_2'(1)=0,\ S_2(0)\text{有限} \end{cases} \tag{3.3}$$

由分部积分得

$$\langle x,\ L_1S_2\rangle=\int_0^1 x\frac{d^2}{dx^2}(xS_2)dx=S_2'(1)$$

$$=\langle x,\ H_2\rangle=-2\int_0^1 x(x-1)^2dx=-\frac{1}{6} \tag{3.4}$$

从而有

$$S_2'(1)=-\frac{1}{6},\quad S_2(1)=\frac{1}{6}\mu \tag{3.5}$$

类似地，由

$$\left\langle x-\frac{1}{1-\mu},\ L_1S_2\right\rangle=\frac{1}{1-\mu}S_2(0)$$

$$=\left\langle x-\frac{1}{1-\mu},H_2\right\rangle=\frac{3+\mu}{6(1-\mu)} \tag{3.6}$$

导得 $$S_2(0)=\frac{1}{6}(3+\mu) \tag{3.7}$$

由（2.11），(3.5)，(3.7）得出

$$T_2(1)=\frac{1}{6}(\mu-2),\quad T_2(0)=\frac{1}{6}(3+\mu) \tag{3.8}$$

这样，我们给出了边缘和中心处的薄膜力首项近似。

现在来考察问题(2.10)：

$$\begin{cases} Lw_3=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x\dfrac{dw_3}{dx}\right)=S_2w_1'+q_3=H_3(x) \\ w_3(0)=w_3(1)=w_3'(1)=0 \end{cases} \tag{3.9}$$

由正交条件（2.21）得到

$$\langle x\ln x,\ H_3\rangle=I_1+I_2=0 \tag{3.10}$$

其中 $$I_1=\int_0^1 xS_2w_1'\ln x dx,\quad I_2=q_3\int_0^1 x\ln x\,dx=-\frac{1}{4}q_3 \tag{3.11}$$

引进辅助函数

$$\begin{cases} f(x)=\int_1^x w_1'(x)\ln x dx=(x^2-2x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \\ g(x)=\int_0^x f(x)dx,\quad g(1)=-\frac{5}{18} \end{cases} \tag{3.12}$$

通过分部积分并利用方程(2.9)，得到

$$\begin{aligned} I_1&=-[S_2'(1)+S_2(1)]g(1)+\int_0^1 H_2(x)g(x)dx \\ &=-[S_2'(1)+S_2(1)]g(1)-\frac{1}{6}f(0)-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^5\ln x dx \end{aligned} \tag{3.13}$$

利用（3.5）和（3.12）后，我们有

$$I_1=-\frac{5}{108}(1-\mu)+\frac{41}{360} \tag{3.14}$$

将（3.11）和（3.14）式代入（3.10）式，求得

$$q_3=\frac{41}{90}-\frac{5}{27}(1-\mu)=\frac{173-73\nu}{270(1-\nu)} \tag{3.15}$$

从而得到载荷参数-中心挠度的三阶近似关系式

$$Q=4W_m+\frac{173-73\nu}{270(1-\nu)}W_m^3+O(W_m^5) \tag{3.16}$$

与钱伟长[1]的经典结果一致.

四、均布载荷、一般边界条件的情形

本节讨论均布载荷、一般边界条件的情形，此时仍有 $F=G=1$，但 λ，μ 的值可有不同的组合。相应的小挠度问题（2.8）的解为

$$w_1=\frac{1}{1+2\lambda}[(x-1)^2-2\lambda(x-1)],\quad q_1=\frac{4}{1+2\lambda} \tag{4.1}$$

类似于上节，可得

$$\begin{cases} S_2'(1)=\int_0^1 xH_2dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 xw_1'^2dx \\ \quad =-\frac{2}{(1+2\lambda)^2}\int_0^1 x(x-1-\lambda)^2dx=-\frac{1}{6(1+2\lambda)^2}(1+4\lambda+6\lambda^2) \\ S_2(1)=\frac{\mu}{6(1+2\lambda)^2}(1+4\lambda+6\lambda^2) \end{cases} \tag{4.2}$$

和 $$\begin{aligned} S_2(0)&=(1-\mu)\int_0^1\left(x-\frac{1}{1-\mu}\right)H_2(x)dx \\ &=\frac{1}{6(1+2\lambda)^2}[(3+8\lambda+6\lambda^2)+\mu(1+4\lambda+6\lambda^2)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

对于相应的问题(2.10)，按第二节的定理，应用正交条件（2.13），即

$$\langle x\ln x-\lambda x,\ H_3\rangle=J_1+J_2=0 \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}J_1&=\int_0^1 xS_2w_1'(\ln x-\lambda)dx\\ J_2&=q_3\int_0^1(\ln x-\lambda)dx=-\frac{1}{4}(1+2\lambda)q_3=-\frac{q_3}{q_1}\end{aligned} \tag{4.5}$$

为了计算J_1，采用类似于上节的步骤，引进辅助函数

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_1^x(\ln x-\lambda)w_1'dx=\frac{2}{1+2\lambda}\int_1^x(x-1-\lambda)(\ln x-\lambda)dx\\ &=\frac{1}{1+2\lambda}\Big[x^2\ln x-2(1+\lambda)x\ln x-\frac{1}{2}(1+2\lambda)x^2\\ &\quad+2(1+\lambda)^2x-\left(\frac{3}{2}+3\lambda+2\lambda^2\right)\Big]\end{aligned} \tag{4.6}$$

和

$$g(x)=\int_0^x f(x)dx,\ g(1)=-\frac{1}{18(1+2\lambda)}(5+15\lambda+18\lambda^2) \tag{4.7}$$

从而由分部积分得到

$$\begin{aligned}J_1&=-[S_2'(1)+S_2(1)]\,g(1)+\int_0^1 H_2(x)g(x)dx\\ &=-[S_2'(1)+S_2(1)]g(1)+\frac{2\lambda^3}{3(1+2\lambda)^2}g(1)+\frac{(1+\lambda)^4}{6(1+2\lambda)^2}f(0)\\ &\quad-\frac{1}{3(1+2\lambda)^3}\int_0^1(x-1-\lambda)^5(\ln x-\lambda)dx\end{aligned} \tag{4.8}$$

利用(4.2)，(4.6)和(4.7)式算出J_1，并由（4.3）和（4.4）得到

$$\begin{aligned}q_3=\frac{4}{1+2\lambda}J_1=\frac{1}{270(1+2\lambda)^4}&[73+388\lambda+825\lambda^2+840\lambda^3+360\lambda^4\\ &+10\mu(5+35\lambda+108\lambda^2+162\lambda^3+108\lambda^4]\end{aligned} \tag{4.9}$$

与钱伟长、叶开沅[2]给出的结果完全一致。

五、复合载荷、边缘固定夹紧的情形

本节讨论边缘固定夹紧圆薄板受中心集中载荷与均布载荷的复合情形，设中心挠度不为零。黄黔[4]曾对此情形作过全面讨论，他引进了几种不同于W_m的小参数，可对中心挠度不加限制。按文[4]，这时有

$$G(x)=\beta+\alpha x,\ \lambda=0,\ \mu=\frac{2}{1-\nu} \tag{5.1}$$

对给定的载荷，β和α为两个确定的参数。

问题（2.8）的解为

$$\left\{\begin{aligned}w_1&=\frac{1}{4}q_1[\beta(x-1)^2-4\alpha(x-1)+4\alpha x\ln x]\\ q_1&=\frac{4}{4\alpha+\beta}\end{aligned}\right. \tag{5.2}$$

类似于第三节，可得

$$\begin{cases} S_2'(1) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x w_1'^2 dx = -\dfrac{1}{288} q_1^2(36\alpha^2 + 20\alpha\beta + 3\beta^2) \\ S_2(1) = -\mu S_2'(1) = \dfrac{\mu}{288} q_1^2(36\alpha^2 + 20\alpha\beta + 3\beta^2) \end{cases} \tag{5.3}$$

同样还可求得，$S_2(0)$，$T_2(0)$，$T_2(1)$。

为确定q_3，利用正交条件(2.21)，我们有

$$\int_0^1 x S_2 w_1' \ln x dx + q_3 \int_0^1 \left(\beta + \frac{\alpha}{x}\right) x \ln x dx = K_1 + K_2 = 0 \tag{5.4}$$

其中，容易算得

$$K_2 = -\frac{4\alpha+\beta}{4} q_3 = -\frac{q_3}{q_1} \tag{5.5}$$

类似地有

$$f(x) = \int_0^x w_1' \ln x dx = \frac{1}{2} q_1 \left\{ \beta\left[\frac{1}{2}x^2\ln x - x\ln x - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{3}{4}\right] \right.$$

$$\left. + 2\alpha[x\ln^2 x - 2x\ln x - 2(x-1)] \right\} \tag{5.6}$$

$$g(x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2} q_1 \left\{ \frac{1}{36}\beta[6x^2(x-3)\ln x - 5x^3 + 27x(x-1)] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\alpha[2x^2\ln^2 x - 6x^2\ln x + 7x^2 - 8x] \right\} \tag{5.7}$$

$$K_1 = -[S_2'(1) + S_2(1)]g(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 w_1'^2 g(x) dx \tag{5.8}$$

利用已经给出的结果算得

$$q_3 = q_1 K_1 = \frac{1}{(4\alpha+\beta)^4} \left\{ 8\left(\frac{191}{81}\alpha^3 + \frac{473}{284}\alpha^2\beta + \frac{6473}{16200}\alpha\beta^2 + \frac{73}{1160}\beta^3\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{81}(648\alpha^3 + 540\alpha^2\beta + 154\alpha\beta^2 + 15\beta^3) \right\} \tag{5.9}$$

验证、比较，与黄黔[4]给出的结果完全一致。

六、结　　束　　语

众所周知，高阶摄动项的方程求解过程通常比较繁杂，应用本文给出的正交条件解法，可局部地避开这一过程。对本文讨论的圆薄板大挠度问题来说，如果只需要了解中心和边缘处的弹性特征，则应用正交条件，进行一些初等积分，至少可以少解两个方程，对于这里讨论的三阶近似是这样，对于更高阶的近似也是如此。

本文方法的思路可望应用于更为复杂的板壳非线性弯曲和稳定性问题。

致谢　本文完成过程中曾与黄黔同志进行过有益的讨论，谨此志谢。

参 考 文 献

[1] Chien Wei-zang (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7 (1947), 102—113.

[2] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，**10** (1954), 209—238.

[3] 叶开沅，柔韧性构件（杆、膜、板壳）的大挠度问题，兰州大学 (1984).

[4] 黄黔，复合载荷下圆薄板的大挠度问题，应用数学和力学，**4**, 8 (1983), 711—720.

[5] 戴世强，PLK方法，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》(钱伟长主编)，科学出版社出版，北京 (1981), 33—86.

On the Method of Orthogonality Conditions for Solving the Problem of Large Deflection of Circular Plate

Dai Shi-qiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, we reexamine the method of successive approximation presented by Prof. Chien Wei-zang for solving the problem of large deflection of a circular plate, and find that the method could be regarded as the method of strained parameters in the singular perturbation theory. In terms of the parameter representing the ratio of the center deflection to the thickness of the plate, we make the asymptotic expansions of the deflection, membrane stress and the parameter of load as in Ref.[1], and then give the orthogonality conditions (i. e. the solvability conditions) for the resulting equations, by which the stiffness characteristics of the plate could be determined. It is pointed out that with the solutions for the small deflection problem of the circular plate and the orthogonality conditions, we can derive the third order approximate relations between the parameter of load and the center deflection and the first-term approximation of membrane stresses at the center and edge of the plate without solving the differential equations. For some special cases (i. e. under uniform load, under compound load, with different boundary conditions), we deduce the specific expressions and obtain the results in agreement with the previous ones given by Chien wei-zang, Yeh Kai-yuan and Hwang Chien in Refs.[1-4].

Key words circular plate, large deflection, method of strained parameters, orthogonality condition, perturbation theory