应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出版

拟变分不等式和社会平衡

丁 协 平

(四川师范大学，1990年9月14日收到)

摘 要

我们在仿紧设置下，在 Hausdorff 拓扑矢量空间内证明了一个广义拟变分不等式，推广了Zhou-Chen和Aubin的相应结果．作为应用，关于最优化问题的解和亚对策的社会平衡解的两个存在性定理被证明．这些定理改进和推广了 Kaczynski-Zeidan 和 Aubin 的最近结果．

关键词 拓扑矢量空间 极小极大不等式 广义拟变分不等式 最优化问题 社会平衡

一、引 言

最近 Zhou-Chen[1] 在紧设置下，证明了一个广义拟变分不等式，推广了 Aubin[2] 的定理6.4.21到局部凸拓扑矢量空间．

由应用 Ky Fan 的不动点定理[3]，Kaczynski-Zeidan[4] 在局部凸 Hausdorff 空间内证明了一个最优化问题解的存在性定理．

在本文内，我们将首先在Hausdorff 拓扑矢量空间的仿紧设置下证明一个广义拟变分不等式，推广了 Zhou-Chen[1] 的定理 3.1 和 Aubin[2] 的定理6.4.21．然后，应用我们的结果，关于最优化问题和亚对策的社会平衡解的两个存在性定理得到证明．这些定理推广了Kaczynski-Zeidan[4]的主要定理和Aubin[2]的定理6.4.23．

二、广义拟变分不等式

令M是一拓扑空间，E是一Hausdorff 拓扑矢量空间和E'是E的对偶空间（即是，E上一切连续线性泛函的矢量空间）．令2^E表E的一切非空子集的族．按照 Aubin [2, p.121]，一个映射$F:M\to 2^E$是上h-半连续的(u.h.c)，如果对每一 $p\in E'$ 和对每一$\lambda\in\mathbb{R}$，集$\{x\in M:\sup\limits_{u\in F(x)}\mathrm{Re}\langle p,u\rangle<\lambda\}$在$M$中是开集，其中$\mathbb{R}$是一切实数的集．

显然，每一上s-半连续(u.s.c.)映射是上d-半连续(u.d.c)的和每一上d-半连续映射是上h-半连续的（见 shih-Tan[5]）．

下面结果是 Ding-Tan[6] 的定理1的轻微变型，(也见Ding[7]的定理A)．

引理2.1 设X是拓扑矢量空间E的一非空凸子集和$\varphi:X\times X\to\mathbb{R}$有下列性质：

(a) 对每一固定的$y\in X$，$\varphi(x,y)$关于x在X的每一紧子集上是一下半连续函数；

(b) 对X的每一有限子集A和对每一$x\in\mathrm{co}(A)$，

$$\min_{y\in A}\varphi(x,y)\leqslant 0,$$

其中$\mathrm{co}(A)$是A的凸包。

(c) 存在一非空紧凸子集$X_0\subset X$和X的一非空紧子集K使得对每一$x\in X\setminus K$，有一$y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})$具有$\varphi(x,y)>0$。则存在$\hat{x}\in K$使得对一切$y\in X$，$\varphi(\hat{x},y)\leqslant 0$。

定理2.1 设E是一Hausdorff拓扑矢量空间，它的拓扑对偶E'分离E的点，X是E的一非空仿紧凸子集。假设

(i) $F:X\to 2^X$是上h-半连续的且具有非空紧凸值；

(ii) $f:X\times X\to\mathbb{R}$使得对每一$y\in X$，$f(x,y)$在X的每一紧子集上是x的下半连续函数；

(iii) $f(x,y)$在y点是0-对角凹(0-DCV)的（见[1]），即是，对任何有限子集$\{y_1,\cdots,y_m\}\subset X$和任何$x_0=\sum_{i=1}^m\lambda_i y_i\left(\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^m\lambda_i=1\right)$，

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i f(x_0,y_i)\leqslant 0;$$

(iv) 存在X的一非空紧凸子集X_0和X的一非空紧子集K使得对每一$x\in X\setminus K$，有一$y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap F(x)$具有$f(x,y)>0$。

(v) 集$\Sigma=\{x\in X:\sup_{y\in F(x)}f(x,y)>0\}$在$X$内是开的。则存在一点$\hat{x}\in K$使得

(1) $\hat{x}\in F(\hat{x})$和

(2) $\sup_{y\in F(\hat{x})}f(\hat{x},y)\leqslant 0$。

证明 假设对每一$x\in X$，结论(1)和(2)不成立。则对每一$x\in X$，或者$x\notin F(x)$或者$x\in\Sigma$。如果$x\notin F(x)$，由Rudin[8, p.70]的定理3.19，存在$p\in E'$使得

$$\mathrm{Re}\langle p,x\rangle-\sup_{y\in F(x)}\mathrm{Re}\langle p,y\rangle>0.$$

对每一$p\in E'$，令

$$V(p)=\{x\in X:\mathrm{Re}\langle p,x\rangle-\sup_{y\in F(x)}\mathrm{Re}\langle p,y\rangle>0\}$$

则$X=\Sigma\cup(\bigcup_{p\in E'}V(p))$。由$F$的上$h$-半连续性，每一$V(p)$是开的。因为$\Sigma$是开的和$X$是仿紧的，从Kelley[9, p.158]推得存在$\{\Sigma,(V(p):\ p\in E')\}$的一开局部有限精细$\{\Sigma',(V'(p):\ p\in E')\}$使得$\Sigma'\subset\Sigma$和对每一$p\in E'$，$V'(p)\subset V(p)$。因为每一仿紧空间是正规的，由Kelley[9, p.171]，存在X上的具有非负实值的连续函数族β_0，β_p，$p\in E'$使得对每一$x\in X$，$\beta_0(x)+\sum_{p\in E'}\beta_p(x)=1$，$\beta_0$和每一$\beta_p$分别在$\Sigma'$和$V'(p)$的外面点的值为0。

定义映射φ：$X\times X\to\mathbb{R}$如下：

$$\varphi(x,y)=\beta_0(x)f(x,y)+\sum_{p\in E'}\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p,x-y\rangle.$$

则我们有下列性质：

（a） 因为$\{\Sigma', (V'(p):\ p\in E')\}$是局部有限的，每一点$x\in X$有一邻域仅与集族$\{\Sigma', (V'(p):\ p\in E')\}$的有限多个集相交。所以对每一$x\in X$，在和$\sum\limits_{p\in E'}\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p, x-y\rangle$中仅有有限多项有非零值。因此对每一$y\in X$，函数$x\mapsto\sum\limits_{p\in E'}\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p, x-y\rangle$在$X$上是连续的。由(ii)，对每一$y\in X$，$\varphi(x,y)$在$X$的每一紧子集上是$x$的下半连续函数；

（b） 我们主张对每一有限集$A=\{y_1,\cdots,y_m\}\subset X$和对每一$x\in \mathrm{co}(A)$，$\min\limits_{y\in A}\varphi(x,y)\leqslant 0$。

如果不真，则存在X的一有限子集$A=\{y_1,\cdots,y_m\}$和$x=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j y_j\in\mathrm{co}(A)$，$\lambda_j\geqslant 0$和$\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j=1$使得

$$\varphi(x,y_j)>0 \qquad (j=1,\cdots,m)$$

即是

$$\beta_0(x)f(x,y_j)+\sum_{p\in E'}\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p, x-y_j\rangle>0 \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{*}$$

另一方面，我们有

$$0=\sum_{p\in E'}\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p, x-x\rangle=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Big(\sum_{p\in E'}\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p, x-y_j\rangle\Big).$$

由（*）式推得

$$\beta_0(x)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f(x,y_j)>0。$$

因为$\beta_0(x)\geqslant 0$，我们必有

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f(x,y_j)>0,$$

这与条件(iii)矛盾。因此我们的主张成立。

（c） 由(iv)，存在X的一非空紧凸子集X_0和一非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，有$y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap F(x)$具有$f(x,y)>0$。如果$x\in\Sigma'$，则$\beta_0(x)>0$，使得$\beta_0(x)f(x,y)>0$；如果对某$p\in E'$，$x\in V'(p)\subset V(p)$，则$\beta_p(x)>0$且

$$\mathrm{Re}\langle p, x\rangle>\sup_{z\in F(x)}\mathrm{Re}\langle p, z\rangle\geqslant\mathrm{Re}\langle p, y\rangle.$$

使得$\beta_p(x)\mathrm{Re}\langle p, x-y\rangle>0$。注意到$X=\Sigma'\cup(\bigcup\limits_{p\in E'}V'(p))$，我们必有$\varphi(x,y)>0$。

由引理2.1，存在一点$\hat{x}\in K$使得对一切$y\in X$，

$\varphi(\hat{x},y)\leqslant 0$；即是

$$\beta_0(\hat{x})f(\hat{x},y)+\sum_{p\in E'}\beta_p(\hat{x})\mathrm{Re}\langle p, \hat{x}-y\rangle\leqslant 0 \qquad (\forall y\in X) \tag{**}$$

现在选取$\hat{y}\in F(\hat{x})$使得每当$\beta_0(\hat{x})>0$时，

$$\beta_0(\hat{x})f(\hat{x},\hat{y})>0.$$

如果对某$p\in E'$，$\beta_p(\hat{x})>0$，则$\hat{x}\in V'(p)\subset V(p)$且因此

$$\operatorname{Re}\langle p,\hat{x}\rangle>\sup_{z\in F(\hat{x})}\operatorname{Re}\langle p,z\rangle\geqslant\operatorname{Re}\langle p,\hat{y}\rangle,$$

从而对$p\in E'$，每当$\beta_p(\hat{x})>0$时

$$\beta_p(\hat{x})\operatorname{Re}\langle p,\hat{x}-\hat{y}\rangle>0.$$

因为$\hat{x}\in X=\Sigma'\cup(\bigcup_{p\in E'}V'(p))$，我们必有

$$\beta_0(\hat{x})f(\hat{x},\hat{y})+\sum_{p\in E'}\beta_p(\hat{x})\operatorname{Re}\langle p,\hat{x}-\hat{y}\rangle>0,$$

这与(**)式矛盾。因此存在$\hat{x}\in X$使定理2.1的结论(1)和(2)成立。条件(iv)蕴含$\hat{x}\in K$。定理证毕。

注2.1. 注意到在定理2.1中，当$X=X_0=K$时，条件(iv)平凡满足。因此定理2.1在下列两方面改进了Zhou-Chen[1]的定理3.1：(1) E不必是局部凸空间；(2) X可以不是紧集。特别定理2.1改进和推广了Aubin[2]的定理6.4.21。

系2.1. 令E是一Hausdorff拓扑矢量空间，它的对偶E'分离E的点和X是E的一非空仿紧凸子集。假设

(i) F：$X\to 2^X$是连续的具有非空紧凸值；

(ii) f：$X\times X\to\mathbb{R}$是下半连续的和$f(x,y)$在y是0-DCV；

(iii) 存在X的一非空紧凸子集X_0和一非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，有$y\in\operatorname{co}(X_0\cup\{x\})\cap F(x)$满足$f(x,y)>0$。则存在一点$\hat{x}\in K$使得

$$\hat{x}\in F(\hat{x})\text{和}\sup_{y\in F(\hat{x})}f(\hat{x},y)\leqslant 0.$$

证明 因为F和f都是下半连续的，从Aubin[2]的命题3.1.19推得函数

$$x\mapsto\sup_{y\in F(x)}f(x,y)$$

在X上是下半连续的，因此集

$$\Sigma=\{x\in X:\sup_{y\in F(x)}f(x,y)>0\}$$

在X内是开的。结论从定理2.1推得。

注2.2 系2.1改进和推广了Aubin[2]的系6.4.22到拓扑矢量空间。

三、最优化问题

令$E_1,\cdots,E_n$是Hausdorff拓扑矢量空间和$E=\prod_{i=1}^{n}E_i$是乘积空间。对$x=(x_1,\cdots,x_n)\in E$和$i\in\{1,\cdots,n\}$，我们将使用下面记号：

$$E_{\hat{i}}=\prod_{j\neq i}E_j\text{和}x_{\hat{i}}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\in E_{\hat{i}}.$$

给定$X\subset E$，X_i和$X_{\hat{i}}$将分别表示X在E_i和$E_{\hat{i}}$上的投影。对任何$y\in X_{\hat{i}}$，定义X在y点的截痕

为

$$F_i(y)=\{z\in X_i:\ 存在x\in X使得x_i=z和x_{\hat{i}}=y\}.$$

E的一子集X称为有连续截痕性质，如果对$i=1,\cdots,n$，映射

$$F_i:\ X_{\hat{i}}\to 2^{X_i},\quad y\mapsto F_i(y)$$

是连续的（即是，F_i既上半连续也下半连续）.

令$f_1,\cdots,f_n$：$X\to\mathbb{R}$是实值函数．我们关心下列最优化问题(P_1)：寻求$\bar{x}\in X$使得

$$\max\{f_i(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{i-1},z,\bar{x}_{i+1},\cdots,\bar{x}_n):\ z\in F_i(\bar{x}_{\hat{i}})\}=f_i(\bar{x})\quad(i=1,\cdots,n).$$

定理3.1 令E的拓扑对偶E'分离E的点和X是E的一非空仿紧凸子集且具有连续截痕性质使得每一$F_i(x_{\hat{i}})$是紧的．令$f_1,\cdots,f_n$：$X\to\mathbb{R}$是连续函数使得

（i） 对任何$i=1,\cdots,n$和$x\in X$，定义在$F_i(x_{\hat{i}})$上的映射．

是凹的 $z\mapsto f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},z,x_{i+1},\cdots,x_n)\triangleq f_i(z,x_{\hat{i}})$

（ii） 存在X的一非空紧凸子集X_0和一非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，有

$y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap\prod_{i=1}^{n}F_i(x_{\hat{i}})$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}[f_i(y_i,x_{\hat{i}})-f_i(x_i,x_{\hat{i}})]>0.$$

则存在最优化问题(P_1)的一解$\bar{x}\in K$.

证明 定义映射F：$X\to 2^X$和f：$X\times X\to\mathbb{R}$如下：

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_{\hat{i}})和\ f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[f_i(y_i,x_{\hat{i}})-f_i(x_i,x_{\hat{i}})].$$

因为X有连续截痕性质使得每一$F_i(x_{\hat{i}})$是紧的，所以F是连续的，具有非空紧凸值．对任何有限集$\{y^1,\cdots,y^m\}\subset X$和对任何$x=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y^j$，$\lambda_j\geqslant 0$和$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=1$ $\left(x_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_i^j,\ i=1,\cdots,n\right)$，

由(i)，我们有

$$f_i(x_i,x_{\hat{i}})=f_i\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_i^j,\ x_{\hat{i}}\right)\geqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_i(y_i^j,x_{\hat{i}}).$$

因此

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f(x,y^j)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left[\sum_{i=1}^{n}(f_i(y_i^j,x_{\hat{i}})-f_i(x_i,x_{\hat{i}}))\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_i(y_i^j,x_{\hat{i}})-f_i(x_i,x_{\hat{i}})\right]\leqslant 0.$$

所以f在y点是0-DCV．显然f是连续的．

由(ii)，容易看出系2.1的条件(iii)被满足．从系2.1推得存在一点$\bar{x}\in K$使得

$$\bar{x}\in F(\bar{x})和\ \sup_{y\in F(x)}f(\bar{x},y)\leqslant 0.$$

因此前一结论蕴含$\bar{x}_i\in F_i(\bar{x}_{\hat{i}})(i=1,\cdots,n)$．对每一$i=1,\cdots,n$和$y_i\in F_i(x_{\hat{i}})$，选取$\bar{y}\in X$使得$\bar{y}_i=y_i$和$\bar{y}_j=x_j$，$j\neq i$，则有$\bar{y}\in F(\bar{x})$和

$$f_i(y_i,\bar{x}_{\hat{i}})-f(\bar{x}_i,\bar{x}_{\hat{i}})=f_i(\bar{y}_i,\bar{x}_{\hat{i}})-f_i(\bar{x}_i,\bar{x}_{\hat{i}})+\sum_{j\neq i}(f_j(\bar{y}_j,\bar{x}_{\hat{j}})$$

$$-f_j(\bar{x}_j,\bar{x}_{\hat{j}}))=f(\bar{x},\bar{y})\leqslant 0.$$

由此推得对一切$i=1,\cdots,n$和对一切$y_i\in F(\bar{x}_{\hat{i}})$

$$f_i(y_i,\bar{x}_{\hat{i}})\leqslant f_i(\bar{x}_i,\bar{x}_{\hat{i}})=f(\bar{x}).$$

注意到对一切$i=1,\cdots,n$, $\bar{x}_i\in F_i(\bar{x}_{\hat{i}})$, 我们有

$$f_i(\bar{x})=\max\{f_i(z,\bar{x}_{\hat{i}}):\ z\in F_i(\bar{x}_{\hat{i}})\}\qquad(i=1,\cdots,n).$$

定理证毕.

系3.1 设E的拓扑对偶E'分离E的点和X是E的一非空紧凸子集具有连续截痕性质. 设$f_1,\cdots,f_n$: $X\to\mathbb{R}$使得对任何$i=1,\cdots,n$和对任何$x\in X$, 定义在$F_i(x_{\hat{i}})$上的映射$z\to f_i(z,x_{\hat{i}})$是凹的, 则最优化问题(P_1)存在一解$\bar{x}\in X$.

证明 注意到在定理3.1中, 当 $X=X_0=K$ 时, 条件(ii)被平凡地满足, 因此结论从定理3.1推得.

注3.1. 定理3.1推广了 Kaczynski-Zeidan[2] 的主要定理到非紧设置且在定理3.1和系3.1中, $E_1,\cdots,E_n$不必是局部凸拓扑矢量空间.

四、亚对策的社会平衡

在本节中, 我们将研究 n 人非合作对策. 由n个策略集X_i, 定义在策略集的乘积空间$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$上的n个损失函数f_i和由

$$C_i(x_{\hat{i}})=\{x\in X_i:\ f_i(x_i,x_{\hat{i}})=\inf_{y_i\in X_i}f_i(y_i,x_{\hat{i}})\}$$

所定义的典型决策规则定义一个对策.

如果我对对策附加上一可行性概念,即是,当其他局中人已经选择了他们的策略$x_j\in X_j$, $j\neq i$时, 通过n个集值函数F_i限制第i个局中人的策略只能在子集$F_i(x_{\hat{i}})\subset X_i$中选取, 则通常称此对策为一个亚对策. 在亚对策中, 其他局中人对局中人j的影响如下:

(a) 间接影响为限制局中人j的可行策略于$F_j(x_{\hat{j}})$.

(b) 直接影响为影响局中人j的损失函数f_j.

结合这两个影响, 导致可行决策规则由下式定义:

$$\bar{C}_i(x_{\hat{i}})=\{x_i\in F_i(x_{\hat{i}}):\ f_i(x_i,x_{\hat{i}})=\inf_{y_i\in F_i(x_{\hat{i}})}f_i(y_i,x_{\hat{i}})\}.$$

与这些决策规则一致的多元策略 $x\in X$ 被称为亚对策的社会平衡. 于是, 它们由下列条件定义:

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad 对每一\ i=1,\cdots,n,\ x_i\in F(x_{\hat{i}})\ (可行性)\\&\text{(ii)}\quad 对每一\ i=1,\cdots,n,\ f_i(x_i,x_{\hat{i}})=\inf_{y_i\in F_i(x_{\hat{i}})}f_i(y_i,x_{\hat{i}}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

下面我们始终假设$E_1,\cdots,E_n$是Hausdorff拓扑矢量空间和$E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ 是乘积空间且E的拓扑

对偶E'分离E中的点。

定理4.1 假设对一切$i=1,\cdots,n$,

（i） 策略集$X_i\subset E_i$是凸的使得乘积$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$在E内是仿紧的。

（ii） 损失函数f_i是连续的且对每一$x_{\hat{i}}\in X_{\hat{i}}$，函数$y_i\mapsto f_i(y_i,x_{\hat{i}})$是凸的。

（iii） 可行映射F_i: $X_{\hat{i}}\to 2^{X_i}$是连续的且具有紧凸值。

（iv） 存在X的一非空紧凸子集X_0和一非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，有

$y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap\prod_{i=1}^{n}F_i(x_{\hat{i}})$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_i,x_{\hat{i}})-f_i(y_i,x_{\hat{i}})]>0$。

则存在一社会平衡$\bar{x}\in K$，即是一多元策略$\bar{x}$满足(4.1)。

证明 我们设

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_{\hat{i}})\text{ 和 }f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_i,x_{\hat{i}})-f_i(y_i,x_{\hat{i}})).$$

由(iii)，F: $X\to 2^X$是连续的且有非空紧凸值。由(ii)，函数f: $X\times X\to\mathbb{R}$是连续的。对任何有限子集$\{y^1,\cdots,y^m\}\subset X$和对任何$x=\sum_{j=1}^{m}\lambda_jy^j$, $\lambda_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=1\left(x_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda^jy_i^j,\ i=1,\cdots,n\right)$，由(ii)，我们有

$$f_i(x_i,x_{\hat{i}})=f_i\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_jy_i^j,x_{\hat{i}}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_jf_i(y_i^j,x_{\hat{i}})\qquad(i=1,\cdots,n)$$

由此推得

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_jf(x,y^j)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left[\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_i,x_{\hat{i}})-f_i(y_i^j,x_{\hat{i}}))\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_i,x_{\hat{i}})-\sum_{j=1}^{m}\lambda_jf_i(y_i^j,x_{\hat{i}})\right)\leqslant 0.$$

因此f在y点是 0-DCV。由(iv)，容易验证系2.1的条件(iii)被满足。系2.1蕴含存在$\bar{x}\in K$使得

$$\bar{x}\in F(\bar{x})\text{和}\sup_{y\in F(\bar{x})}f(\bar{x},y)\leqslant 0.$$

第一结论蕴含$\bar{x}_i\in F(\bar{x}_{\hat{i}})$ $(i=1,\cdots,n)$。第二结论蕴含对一切$i=1,\cdots,n$和对一切$y_i\in F_i(\bar{x}_{\hat{i}})$, $f_i(\bar{x}_i,\bar{x}_{\hat{i}})\leqslant f_i(y_i,\bar{x}_{\hat{i}})$。这由取$\bar{y}$使得$\bar{y}_i=y_i$和$\bar{y}_j=\bar{x}_j$, $j\neq i$即可得证，因为$\bar{y}\in F(\bar{x})$和

$$f(\bar{x},\bar{y})=f_i(\bar{x}_i,\bar{x}_{\hat{i}})-f_i(\bar{y}_i,\bar{x}_{\hat{i}})+\sum_{j\neq i}(f_j(\bar{x}_j,\bar{x}_{\hat{j}})-f_j(\bar{y}_j,x_{\hat{j}}))$$

$$=f_i(\bar{x}_i,\bar{x}_{\hat{i}})-f_i(y_i,\bar{x}_{\hat{i}})\leqslant 0.$$

因此$\bar{x}\in K$满足条件(3.1)，即是$\bar{x}$是一社会平衡。

注4.1 定理4.1改进和推广了 Aubin[2] 的定理6.4.23 到拓扑矢量空间的非紧设置。

参考文献

[1] Zhou, J. X. and G. Chen, Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 213—225.

[2] Aubin, J. P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, New York (1984).

[3] Fan, K., Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Natn. Acad. Sci.*, USA, **38** (1952), 121—126.

[4] Kaczynski, T. and V. Zeidan, An application of Ky Fan fixed point theorem to an optimization problem, *Nonlinear Anal. TMA*, **13**(3) (1989), 259—261.

[5] Shih, M.H. and K. K. Tan, Covering theorems of convex sets related to fixed-point theorems, *Nonlinear and Convex Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York (1987), 235—244.

[6] Ding, X.P. and K.K. Tan, A minimax inequality with applications to existence of equilibrium point and fixed point theorems (submitted).

[7] Ding, X.P., Generalized variational inequalities and generalized quasi-variational inequalities I, *J. Sichuan Normal Univ.*, 2 (1990), 6—14.

[8] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York (1973).

[9] Kelley, J., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1955).

Quasi-Variational Inequalities and Social Equilibrium

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

A quasi-variational inequality is proved in paracompact setting which generalizes the results of Zhou Chen and Aubin. As applications, two existence theorems on the solutions of optimization problems and social equilibria of metagames are showed which improve and extend the recent results of Kaczynski-Zeidan and Aubin.

Key words topological vector space, minimax inequality, generalized quasi-variational inequality, optimization problem, social equilibria