应用数学和力学，第12卷第7期（1991年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

三阶中立型时滞方程无条件稳定的充要条件及时滞界限*

陈均平　李志勇

（重庆大学应用数学系，1989年12月16日收到）

摘　要

本文得到三阶定常中立型时滞方程无条件稳定的充要条件，这些条件是实用的代数判据．此外，还给出了时滞界限．

关键词　微分差分方程　无条件稳定性　代数判定

一、引言及引理

对给定的定常时滞系统

$$\frac{dx_s(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{sj}x_j(t)+b_{sj}x_j(t-\tau))\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

如果对任何$\tau\geqslant0$，系统的零解均为渐近稳定，则称此系统为无条件稳定[1]．在文献[1]～[4]中已具体给出一阶、二阶定常时滞方程、二维时滞系统及三阶滞后型方程无条件稳定的代数判定．

本文研究三阶定常线性中立型时滞方程

$$a_1\frac{d^3x(t)}{dt^3}+b_1\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c_1\frac{dx(t)}{dt}+d_1x(t)+a_2\frac{d^3x(t-\tau)}{dt^3}$$
$$+b_2\frac{d^2x(t-\tau)}{dt^2}+c_2\frac{dx(t-\tau)}{dt}+d_2x(t-\tau)=0\qquad(1.1)$$

其中 a_i，b_i，c_i，d_i（$i=1$，2）及$\tau\geqslant0$均为常数，得到了方程（1.1）无条件稳定的充要条件，这些条件是简明的代数判定．此外，还得到了方程（1.1）的时滞界限．

记方程（1.1）的特征方程为

$$\Delta(\lambda,\tau)=a_1\lambda^3+b_1\lambda^2+c_1\lambda+d_1+(a_2\lambda^3+b_2\lambda^2+c_2\lambda+d_2)\exp[-\lambda\tau]=0\qquad(1.2)$$

方程（1.1）是中立型的，只有一个常时滞τ，它的零解无条件稳定的充要条件仍然是特征方

* 张汝清推荐．

程(1.2)的根都具有负实部(见[5]的§5.4及§6.8)。特征方程(1.2)是一个超越方程，一般有无穷多个根。庞特里亚金定理[6]从理论上解决了方程(1.2)的根具有负实部的问题，但不便对具体的方程进行计算，所以寻求对方程(1.2)具有负实部的代数判定是有实用意义的。

下面定理的证明将使用以下引理。

引理1[7] 方程(1.1)无条件稳定的充要条件是：

(H_1) 当$\tau=0$时，方程

$$\Delta(\lambda,0)=(a_1+a_2)\lambda^3+(b_1+b_2)\lambda^2+(c_1+c_2)\lambda+d_1+d_2=0$$

的根均具有负实部；

(H_2) 对每一个$\tau>0$及$y\neq0$，有

$$\Delta(iy,\tau)=a_1(iy)^3+b_1(iy)^2+c_1(iy)+d_1+[a_2(iy)^3+b_2(iy)^2+c_2(iy)+d_2]\exp[-iy\tau]\neq0.$$

二、主 要 结 果

1. 方程(1.1)零解无条件稳定的充要条件

定理1 当$a_1\neq a_2$时，方程(1.1)的零解无条件稳定的充要条件是：

(H_1) $a_1+a_2>0$，$b_1+b_2>0$，$d_1+d_2>0$及$(b_1+b_2)(c_1+c_2)>(a_1+a_2)(d_1+d_2)$

或

$a_1+a_2<0$，$b_1+b_2<0$，$d_1+d_2<0$，

及 $(b_1+b_2)(c_1+c_2)>(a_1+a_2)(d_1+d_2)$；

(H_2) 当(H_1)满足时，下列条件之一成立；

(a) $\sigma>0$，$z_1\leqslant-\dfrac{A}{3}$；

(b) $\sigma=0$，$\max z_j\leqslant-\dfrac{A}{3}$ $(j=1,2,3)$；

(c) $\sigma<0$，$\max\cos\dfrac{\theta+2j\pi}{3}\leqslant\dfrac{A}{6}r^{-\frac{1}{3}}$ $(j=0,1,2)$

其中

$$A=(b_1^2-b_2^2-2a_1c_1+2a_2c_2)/(a_1^2-a_2^2)$$
$$B=(c_1^2-2b_1d_1-c_2^2+2b_2d_2)/(a_1^2-a_2^2)$$
$$C=(d_1^2-d_2^2)/(a_1^2-a_2^2)$$
$$\sigma=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3,\quad p=B-\frac{A^2}{3},\quad q=C-\frac{AB}{3}+\frac{2}{27}A^3$$
$$z_1=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\sigma}\right)^{1/3}+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\sigma}\right)^{1/3}$$
$$z_2=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\sigma}\right)^{1/3}\omega+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\sigma}\right)^{1/3}\omega^2$$
$$z_3=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\sigma}\right)^{1/3}\omega^2+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\sigma}\right)^{1/3}\omega$$

$$\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2,\ \omega^2=(-1-\sqrt{3}i)/2$$

当$\sigma<0$时，令$\sigma=-\alpha$，$\sqrt{\sigma}=\sqrt{\alpha}i$，$i=\sqrt{-1}$

$$r\exp[i\theta]=-\frac{q}{2}+\sqrt{\alpha}i$$

证 由霍尔维茨定理知道，定理1的条件（H_1）是引理中$\Delta(\lambda,0)=0$的根具有负实部的充要条件，为证明本定理，我们去找出引理的条件（H_2）不成立的充要条件，即存在一个实数$y\neq0$及$\tau>0$使得$\Delta(iy,\tau)=0$的充要条件。

$\Delta(iy,\tau)=0$的充要条件是方程

$$\left.\begin{aligned}&(d_2-b_2y^2)\cos\tau y+(c_2y-a_2y^3)\sin\tau y=b_1y^2-d_1\\&-(d_2-b_2y^2)\sin\tau y+(c_2y-a_2y^3)\cos\tau y=a_1y^3-c_1y\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

有实解，而（2.1）有实解的充要条件是方程

$$H(y)=(c_2y-a_2y^3)^2+(d_2-b_2y^2)^2-(b_1y^2-d_1)^2-(c_1y-a_1y^3)^2=0\tag{2.2}$$

有实根。因此引理的条件（H_2）成立的充要条件是方程$H(y)=0$无非零实根。

令 $t=y^2$，方程（2.2）当 $a_1\neq a_2$时化为

$$H^*(t)=t^3+At^2+Bt+C=0\tag{2.3}$$

再令$t=z-A/3$，则（2.3）化为

$$H^{**}(z)=z^3+pz+q=0\tag{2.4}$$

（2.3）、（2.4）中的A，B，C，p，q表示如前。方程（2.4）$H^{**}(z)=0$的三个根$z_j(j=1,2,3)$不是正根的条件如下：

（a） 当$\sigma>0$时，z_1为实根且z_2、z_3为复根。故$t\leqslant0$等价于$z_1\leqslant A/3$。

（b） 当$\sigma=0$时，$z_j(j=1,2,3)$均为实根，故$t\leqslant0$等价于$\max z_j\leqslant A/3$（$j=1,2,3$）。

（c） 当$\sigma<0$时，令$\sigma=-\alpha(\alpha>0)$，$\sqrt{\sigma}=\sqrt{\alpha}i$，并令 $r\exp[i\theta]=-\frac{q}{2}+\sqrt{\alpha}i$，则

$$z_j=2r^{1/3}\cos\frac{\theta+2j\pi}{3}\qquad(j=0,1,2)$$

则$t\leqslant0$等价于

$$\max\ \cos\frac{\theta+2j\pi}{3}\leqslant\frac{A}{6}r^{-\frac{1}{3}}\qquad(j=0,1,2)$$

综上所述，得证。

推论1 当$a_1\neq a_2$及$A=0$时，方程（1.1）的零解无条件稳定的充要条件是：(i)定理1的条件（H_1）成立；(ii) $\sigma>0$，$q=c\geqslant0$成立，或(ii)$'$ $\sigma=0$，$q=0$成立。

推论2 当$a_1\neq a_2$及$d_1=d_2$时，方程（1.1）的零解无条件稳定的充要条件是：(i)定理1的条件（H_1）成立；(ii)$A^2-4B\leqslant0$成立，或(ii)$'$ $A^2-4B>0$，$A>0$且$B>0$成立。

定理2 当$a_1=a_2$时，方程（1.1）的零解无条件稳定的充要条件是：(i)定理1的条件（H_1）成立；(ii)二次方程$At^2+Bt+C=0$无正实根，其中

$$A=b_1^2-b_2^2-2a_1c_1+2a_2c_2$$
$$B=c_1^2-c_2^2-2b_1d_1+2b_2d_2$$
$$C=d_1^2-d_2^2$$

证 只需注意到当$a_1=a_2$时，令$t=y^2$，方程（2.2）$H(y)=0$可化为二次方程，$At^2+Bt+C=0$，其中A，B，C的表示如上，从引理及定理1证明的分析可以得证。

2. 方程（1.1）的时滞界限

现在讨论时滞界限，如果存在一个正数τ_0，使得当$0\leqslant\tau<\tau_0$时，方程（1.1）的零解是渐近稳定，而当$\tau\geqslant\tau_0$时，方程（1.1）的零解是不稳定的，则称τ_0为时滞界限。

定理3 若定理1的条件（H_1）成立，并且方程

$$H(y)=(c_2y-a_2y^3)^2+(d_2-b_2y^2)^2-(b_1y^2-d_1)^2-(c_1y-a_1y^3)^2=0$$

有非零实根$y_j\neq0(\max j=6)$，则方程（1.1）的时滞界限

$$\tau_0=\min\frac{1}{y_j}\arccos\frac{A_j}{B_j}$$

其中

$$A_j=y_j^2(a_1y_j^2-c_1)(c_2-a_2y_j^2)+(b_1y_j^2-d_1)(d_2-b_2y_j^2)$$
$$B_j=(d_2-b_2y_j^2)^2+y_j^2(c_2-a_2y_j^2)^2$$

证 若存在$y_j\neq0$为方程$H(y)=0$的根，并注意到定理1的条件（H_1）成立时，$B_j\neq0$。故从（2.1）可以得到

$$\cos\tau y_j=\frac{y_j^2(a_1y_j^2-c_1)(c_2-a_2y_j^2)+(b_1y_j^2-d_1)(d_2-b_2y_j^2)}{(d_2-b_2y_j^2)^2+y_j^2(c_2-a_2y_j^2)^2}$$
$$\triangleq A_j/B_j$$

记

$$\tau_0=\min\frac{1}{y_j}\arccos A_j/B_j\qquad(\max j=6)$$

当定理1的条件（H_1）成立时，方程$\Delta(\lambda,0)=0$的一切根都在λ-平面虚轴的左侧，即$\mathrm{Re}\lambda<0$。现在τ_0是特征方程$\Delta(\lambda,\tau)=0$的根达到λ-平面虚轴的最小正数。故当$0\leqslant\tau<\tau_0$时，方程$\Delta(\lambda,\tau)=0$的一切根都位于λ-平面虚轴的左侧，即对任何$y\neq0$及$\tau\in[0,\tau_0)$时，$\Delta(iy,\tau)\neq0$，证毕。

例1 给定中立型时滞方程

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+\frac{1}{2}\frac{d^3x(t-\tau)}{dt^3}+\frac{71}{40}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{9}{40}\frac{d^2x(t-\tau)}{dt^2}+\frac{6}{5}\frac{dx(t)}{dt}$$
$$+\frac{4}{5}\frac{dx(t-\tau)}{dt}+\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(t-\tau)=0$$

容易验算定理1的条件（H_1）成立，并可计算得$H^*(t)=t^3+2t^2-t=0$的三个根为$t_1=0$，$t_{2,3}=-1\pm\sqrt{5}/4$，从而$H(y)=0$有根$t=y^2=-1+\sqrt{5}/4>0$，由此可计算得$\tau_0\approx7.123$。由定理3知道当$0\leqslant\tau<\tau_0$时，此方程的零解是渐近稳定的。

例2 给定中立型时滞方程

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+2\frac{d^3x(t-\tau)}{dt^3}-\frac{7}{3\sqrt{3}-5}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{6\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}-5}\frac{d^2x(t-\tau)}{dt^2}$$
$$-\frac{8-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{4\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}-5}\frac{dx(t-\tau)}{dt}$$
$$-\sqrt{3}x(t)+3x(t-\tau)=0$$

容易验算定理1的条件（H_1）成立，并可算得$A=0$，$B=-2$，$C=2$，$\sigma=19/27$，$q=C=2$，由推论1知此方程的零解是无条件稳定的。

参 考 文 献

[1] 秦元勋、刘永清、王联、郑祖庥，《带有时滞的动力系统的运动稳定性》(第二版)，科学出版社，北京(1989)。

[2] 刘永清、宋中昆，《大型动力系统的理论与应用》(卷1)，华中工学院出版社，武汉(1988)。

[3] 余元洪，二阶滞后系统的时滞界限，应用数学学报，8(3)(1985)，334—339。

[4] 陈均平、周进，三阶常系统线性滞后型方程无条件稳定的代数判定，重庆大学学报，9(6)(1990)，54—56。

[5] Bellman, R. and K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, New York, Academic Press (1963).

[6] Pontrjagin, L. S., On the zeros of some elementary transcendental functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **6** (1942), 115—134.

[7] 余元洪，一类中立型方程解的渐近稳定性，应用数学学报，8(4)(1985)，467—471。

The Sufficient and Necessary Conditions of Unconditional Stability and the Delay Bound of the Third-Order Neutral Delay Differential Equation

Chen Jun-ping　　Li Zhi-yong

(*Department of Applied Mathematics of Chongqing University, Chongqing*)

Abstract

In this paper, the sufficient and necessary conditions of the unconditional stability, and the delay bound of the third-order neutral delay differential equation with real constant coefficients are given. The conditions are brief and practical algebraic criterions. Furthermore, we get the delay bound.

Key words differential-difference equations, unconditional stability, algebraic criterion