应用数学和力学，第12卷第7期（1991年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

矩阵奇异值分解问题重分析的摄动法*

吕振华　冯振东

（吉林工业大学，1989年6月29日收到）

摘　要

本文提出了一般实矩阵奇异值分解问题重分析的摄动法．这是一种简捷、高效的快速重分析方法，对于提高各种需要反复进行矩阵奇异值分解的迭代分析问题的计算效率具有较重要的实用价值．文中导出了奇异值和左、右奇异向量的直到二阶摄动量的渐近估计算式．文末指出了将这种摄动分析方法直接推广到一般复矩阵情况的途径．

关键词　矩阵代数　奇异值分解　重分析　摄动法

一、引　子

矩阵的奇异值分解（SVD）对于涉及到矩阵分析的各种工程和理论问题是一个有力的线性代数计算工具．尤其在处理复杂数学模型设计问题中的非准确数据和非精确计算方面，奇异值分解具有良好的数值稳定性．这正是它在许多科学计算领域中得到广泛应用的主要理论根据．目前，奇异值分解已成为求解一般线性代数方程组（特别如实验数据处理中的线性最小二乘问题的正规方程组）、计算一般矩阵的广义逆和对一般复杂矩阵进行近似逼近的可靠方法[1]，并且在约束系统的动力学分析和振动结构的分析模型识别等力学分支中也开始得到应用．

通过奇异值分解实现——$m\times n$ 实矩阵 A 的正交分解是与两个实对称半正定或正定矩阵 AA^T和A^TA的谱分解（即特征值——特征向量分解）紧密相关的．这正是奇异值具有良好稳定性的原因．实际上，矩阵A的奇异值σ_i和左、右奇异向量u_i，v_i 即由矩阵AA^T和 A^TA 的标准特征值问题的特征对所定义，即

$$AA^Tu_i=\sigma_i^2u_i \qquad (1\leqslant i\leqslant m) \tag{1.1}$$

$$A^TAv_i=\sigma_i^2v_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{1.2}$$

由此即得AA^T和A^TA的谱分解

$$AA^T=U\Sigma_m^2U^T, \qquad A^TA=V\Sigma_n^2V^T \tag{1.3}$$

及A的奇异值分解

$$A=USV^T \tag{1.4}$$

---

* 杨桂通推荐．

其中
$$U=[u_1,\ u_2,\cdots,\ u_m],\ U^T=U^{-1}$$
$$V=[v_1,\ v_2,\cdots,\ v_n],\ V^T=V^{-1}$$
$$\Sigma_r=\mathrm{diag}\ (\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_r)\qquad (r=m,n)$$
$$S=\begin{cases}\begin{bmatrix}\Sigma_n\\0\end{bmatrix} & (m>n)\\ \Sigma_m & (m=n)\\ [\Sigma_m,\ 0] & (m<n)\end{cases}$$

当$m\neq n$时，由于对$i>\min(m,n)$必有$\sigma_i=0$，所以A的奇异值通常是指$\sigma_i(1\leqslant i\leqslant\min(m,n))$。在规定了奇异值的次序后，它们是唯一的。但当$|m-n|>1$或存在多重奇异值时，左、右奇异向量矩阵$U$，$V$（它们是正交矩阵）二者或其中之一不唯一的。为便于进行具体的讨论，本文以下假定$m\geqslant n$，显然并不失一般性。而且就大多数实际问题中的数据矩阵而言，一般都是$m\geqslant n$的情况。此外，再规定所有奇异值是根据值的大小按降序排列的，即有
$$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$$
在实际问题中，A一般是满秩的，即 $\mathrm{rank}(A)=n$（尽管它往往是接近于亏秩的），但AA^T必然是奇异的（除非$m=n$），A^TA则可能是非奇异的也可能是奇异的。因此，σ_n可能是单重或多重零奇异值。

本文要研究的问题是：设一般$m\times n$实矩阵 $A(m\geqslant n)$ 由与其同形的矩阵A_0经摄动后而得，即
$$A=A_0+\varepsilon A_p\qquad (0<|\varepsilon|<1)\tag{1.5}$$
其中 εA_p是与A同形的摄动矩阵，ε为一小参数。如果已知A_0的奇异值分解为
$$A_0=U_0S_0V_0^T,\qquad S_0=\begin{bmatrix}\Sigma_{0n}\\0\end{bmatrix}\tag{1.6}$$
其中
$$U_0=[u_{01},\ u_{02},\cdots,\ u_{0m}],\ U_0^T=U_0^{-1}$$
$$V_0=[v_{01},\ v_{02},\cdots,\ v_{0n}],\ V_0^T=V_0^{-1}$$
$$\Sigma_{on}=\mathrm{diag}\ (\sigma_{01},\ \sigma_{02},\cdots,\ \sigma_{0n})$$
$$A_0A_0^Tu_{0i}=\sigma_0^2u_{0i}\qquad (1\leqslant i\leqslant m)\tag{1.7}$$
$$A_0^TA_0v_{0i}=\sigma_{0i}^2v_{0i}\qquad (1\leqslant i\leqslant n)\tag{1.8}$$
则可采用摄动分析方法，从$(\Sigma_{0n},\ U_0,\ V_0)$出发渐近地估计$(\Sigma_n,\ U,\ V)$，由此近似地得到$A$的奇异值分解式(1.4)，这一问题显然具有广泛的实际背景。

虽然一般实际应用的 SVD 算法是利用 House-holder 变换法和 QR 迭代法直接由 A 得到其奇异值和相应的奇异向量[1]，而不必求解特征值问题(1.1)和(1.2)，但本文将基于式(1.1)和(1.2)，利用实对称矩阵特征值问题重分析的摄动法[4,5]，实现矩阵 A 的近似奇异值分解。这是一种简捷、高效的快速重分析方法，对于提高各种需要反复进行矩阵奇异值分解的迭代分析问题的计算效率具有较重要的实用价值。特别对于一些需要得到一系列相近矩阵的奇异值的近似估计而对其精度要求不十分高的应用问题，这种摄动计算方法尤为有效。

二、摄动分析方法

记
$$A_0A_0^T=B_0,\ A_0^TA_0=C_0,\ \sigma_0^2=\lambda_{0i}$$
$$AA^T=B,\ A^TA=C,\ \sigma_i^2=\lambda_i$$

将式(1.1)、(1.2)、(1.7)、和(1.8)重写为

$$B_0 u_{0i}=\lambda_{0i}u_{0i} \qquad (1\leqslant i\leqslant m) \tag{2.1}$$

$$Bu_i=\lambda_i u_i \qquad (1\leqslant i\leqslant m) \tag{2.2}$$

$$C_0 v_{0i}=\lambda_{0i}v_{0i} \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2.3}$$

$$Cv_i=\lambda_i v_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2.4}$$

根据式(1.5)可得到

$$B=B_0+\varepsilon B_1+\varepsilon^2 B_2 \tag{2.5}$$

$$C=C_0+\varepsilon C_1+\varepsilon^2 C_2 \tag{2.6}$$

其中 $B_1=A_0A_p^T+A_pA_0^T$, $B_2=A_pA_p^T$.

$C_1=A_0^TA_p+A_p^TA_0$, $C_2=A_p^TA_p$

虽然，B_1、B_2、C_1和C_2均为对称矩阵。式(2.1)～(2.6)定义了相似的两组关于两个实对称矩阵的标准特征值问题之间的摄动关系。如前所述，B_0一般总是半正定的。为不失一般性，假定C_0也是半正定的。这种标准特征值问题是文献[4]、[5]中研究的实对称矩阵对的广义特征值问题的特例，故可要用与[4]、[5]中的摄动分析理论相似的摄动方法建立式(2.2)和(2.4)的完备特征解的渐近估计算式。

(一) 奇异值和右奇异向量的摄动法

现一般性地假定式(2.3)的特征值$\lambda_{0i}(1\leqslant i\leqslant n)$中有一$k$重非零特征值$\lambda_{0,h+1}=\lambda_{0,h+2}=\cdots=\lambda_{0,h+k}$和一$(n-l)$重零特征值$\lambda_{0,l+1}=\lambda_{0,l+2}=\cdots=\lambda_{0n}=0$，则式(2.4)的特征对$(\lambda_i, v_i)$可被展开成如下渐近表达式

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda_{0i}+\varepsilon\lambda_{1i}+\varepsilon^2\lambda_{2i}+\cdots \\ v_i=\tilde{v}_{0i}+\varepsilon v_{1i}+\varepsilon^2 v_{2i}+\cdots\end{cases} \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2.7}$$

其中

$$\tilde{v}_{0i}=\begin{cases} v_{0i} & (1\leqslant i\leqslant h \text{ 或 } h+k+1\leqslant i\leqslant l) \\ \sum\limits_{j=h+1}^{h+k} v_{0j}f_{ji}=V_{0c}f_i & (h+1\leqslant i\leqslant h+k) \\ \sum\limits_{j=l+1}^{n} v_{0j}g_{ji}=V_{0d}g_i & (l+1\leqslant i\leqslant n)\end{cases} \tag{2.8}$$

$$V_{0c}=[v_{0,h+1},\ \cdots,\ v_{0,h+k}],\quad V_{0d}=[v_{0,l+1},\cdots,v_{0n}]$$

$$f_i=\{f_{h+1,i},\cdots,\ f_{h+k,i}\}^T,\quad g_i=\{g_{l+1,i},\cdots,g_{ni}\}^T$$

有关这种展开技巧的理论基础请参阅文献[4]和[5]。此处只需简要地指出：对于孤立特征值λ_{0i}，与其对应的λ_i和v_i均为小参数ε的连续函数；对于重特征值λ_{0j}，与其对应的λ_j仍是连续的，但相应的v_j是不唯一的和极端病态灵敏的，因而它不能保证是连续的。然而，矩阵C_0的对应于重特征值λ_{0j}的不变特征子空间（即式(2.8)中的子矩阵V_{0c}或V_{0d}的列空间）是确定的且稳定的。在此子空间中可以找到一组特征向量$\tilde{v}_{0j}$，使v_j成为连续的，因而渐近展开式(2.7)是有意义的。

将式(2.6)和(2.6)代入式(2.4)，展开之，按小参数ε的幂次分别得出各阶渐近方程：

ε^0阶 $$(C_0-\lambda_{0i}I_n)\tilde{v}_{0i}=\{0\} \tag{2.9}$$

ε^1阶 $\quad (C_0-\lambda_{0i}I_n)v_{1i}+(C_1-\lambda_{1i}I_n)\bar{v}_{0i}=\{0\}$ (2.10)

ε^2阶 $\quad (C_0-\lambda_{0i}I_n)v_{2i}+(C_1-\lambda_{1i}I_n)v_{1i}$
$$+(C_2-\lambda_{2i}I_n)\bar{v}_{0i}=\{0\} \tag{2.11}$$
…… $(1\leqslant i\leqslant n)$

式(2.9)是式(2.3)的一种略为不同的形式。依次求解式(2.10)和(2.11)即可分别得到 f_i, g_i, λ_{1i}, v_{1i}, λ_{2i}和 v_{2i}。至于三阶以上的摄动量，亦可类似地确定，但为了兼顾提高估计精度和减少计算量，一般只估计到二阶摄动量是合适的。

1．对应于孤立特征值$\lambda_{0i}(1\leqslant i\leqslant h$或$h+k+1\leqslant i\leqslant l)$的摄动法

对式(2.10)和(2.11)均左乘v_{0i}^T，可得
$$\lambda_{1i}=v_{0i}^TC_1v_{0i} \tag{2.12}$$
$$\lambda_{2i}=v_{0i}^TC_2v_{0i}+v_{0i}^T(C_1-\lambda_{1i}I_n)v_{1i} \tag{2.13}$$
取特征向量系$\{v_{0i}\}_{i=1}^n$作为n维实向量空间R^n的正交正规化基，v_{1i}和v_{2i}在此基中的线性表示为
$$v_{si}=\sum_{j=1}^n v_{0j}e_{sji}=V_0e_{si} \qquad (s=1,2) \tag{2.14}$$
其中 $\quad e_{si}=\{e_{s1i},\ e_{s2i},\cdots,e_{sni}\}^T$

对式(2.10)和(2.11)均左乘$v_{0r}^T(r\neq i)$，并引入式(2.14)，可得
$$e_{1ri}=v_{0r}^TC_1v_{0i}/(\lambda_{0i}-\lambda_{0r}) \tag{2.15}$$
$$e_{2ri}=(v_{0r}^TC_1v_{1i}+v_{0r}^TC_2v_{0i}-\lambda_{1i}e_{1ri})/(\lambda_{0i}-\lambda_{0r}) \tag{2.16}$$
为确定系数e_{1ii}和e_{2ii}，需引入v_i的正规化条件作为补充方程，即
$$v_i^Tv_i=1 \tag{2.17}$$
将式(2.7)中v_i的展开式代入式(2.17)，展开之，仍按ε的幂次分别得出各阶渐近方程：

ε^0阶 $\quad v_{0i}^Tv_{0i}=1$ (2.18)

ε^1阶 $\quad 2v_{0i}^Tv_{1i}=0$ (2.19)

ε^2阶 $\quad 2v_{0i}^Tv_{2i}+v_{1i}^Tv_{1i}=0$ (2.20)

…… $(1\leqslant i\leqslant n)$

将式(2.14)分别代入式(2.19)和(2.20)，即得
$$e_{1ii}=0 \tag{2.21}$$
$$e_{2ii}=-\frac{1}{2}v_{1i}^Tv_{1i}=-\frac{1}{2}e_{1i}^Te_{1i} \tag{2.22}$$
利用式(2.21)，还可将式(2.13)简化为
$$\lambda_{2i}=v_{0i}^T(C_1v_{1i}+C_2v_{0i}) \tag{2.23}$$
这样，就确定了式(2.7)中对应于全部孤立特征值λ_{0i}的λ_i和v_i的直到二阶摄动量的估计算式
$$\begin{cases}\lambda_i\approx\lambda_{0i}+\varepsilon\lambda_{1i}+\varepsilon^2\lambda_{2i}\\ v_i\approx v_{0i}+\varepsilon v_{1i}+\varepsilon^2v_{2i}\end{cases} \quad (1\leqslant i\leqslant h\text{或}h+k+1\leqslant i\leqslant l) \tag{2.24}$$
2．对应于k重非零特征值$\lambda_{0i}(h+1\leqslant i\leqslant h+k)$的摄动法

对式(2.10)和(2.11)均左乘V_{0o}^T，可得
$$(V_{0o}^TC_1V_{0o}-\lambda_{1i}I_k)f_i=\{0\} \tag{2.25}$$

$$V_{0c}^T(C_1-\lambda_{1i}I_n)v_{1i}+(V_{0c}^TC_2V_{0c}-\lambda_{2i}I_k)f_i=\{0\} \tag{2.26}$$

式(2.25)是关于k阶实对称方阵$V_{0c}^TC_1V_{0c}$的标准特征值问题，解之即得λ_{1i}和f_i。一般地有$k\ll n$，因此式((2.25)是易于求解的。然后对式(2.26)左乘f_i^T，可得

$$\lambda_{2i}=f_i^TV_{0c}^T((C_1-\lambda_{1i}I_n)v_{1i}+C_2V_{0c}f_i)/f_i^Tf_i \tag{2.27}$$

对v_{1i}和v_{2i}，仍采用形如式(2.14)的特征向量展开式，同时将矩阵V_0和向量e_{1i}，e_{2i}写成如下分块形式

$$\begin{aligned}V_0&=[[v_{01},\cdots,v_{0h}],\ [v_{0,h+1},\cdots,v_{0,h+k}],\\&\quad[v_{0,h+k+1},\cdots,v_{0l}],\ [v_{0,l+1},\cdots,v_{0n}]]\\&=[V_{0a},\ V_{0c},\ V_{0b},\ V_{0d}]\\e_{si}&=\{\{e_{s1i},\cdots,e_{shi}\},\ \{e_{s,h+1,i},\cdots,e_{s,h+k,i}\},\\&\quad\{e_{s,h+k+1,i},\cdots,e_{sli}\},\ \{e_{s,l+1,i},\ \cdots,\ e_{sni}\}\}^T\\&=\{e_{sai}^T,\ e_{sci}^T,\ e_{sbi}^T,\ e_{sdi}^T\}^T\qquad(s=1,2)\end{aligned}$$

则可将式(2.14)改写为

$$\begin{aligned}v_{si}&=\sum_{j=h+1}^{h+k}v_{0j}e_{sji}+\sum_{r\neq j}v_{0r}e_{sri}\\&=V_{0c}e_{sci}+V_{0\bar c}e_{s\bar ci}\qquad(s=1,2)\end{aligned} \tag{2.28}$$

其中 $V_{0\bar c}=[V_{0a},\ V_{0b},\ V_{0d}]$，$e_{s\bar ci}=\{e_{sai}^T,\ e_{sbi}^T,\ e_{sdi}^T\}^T$

对式(2.10)和(2.11)均左乘$V_{0\bar c}^T$，并将式(2.8)和(2.28)代入，可得

$$e_{1\bar ci}=(\lambda_{0i}I_{n-k}-\Lambda_{0\bar c})^{-1}V_{0\bar c}^TC_1V_{0c}f_i \tag{2.29}$$

$$e_{2\bar ci}=(\lambda_{0i}I_{n-k}-\Lambda_{0\bar c})^{-1}V_{0\bar c}^T((C_1-\lambda_{1i}I_n)v_{1i}+C_2V_{0c}f_i) \tag{2.30}$$

其中 $\Lambda_{0\bar c}=\mathrm{diag}(\lambda_{01},\cdots,\lambda_{0h},\ \lambda_{0,h+k+1},\cdots,\lambda_{0n})$

为确定e_{1ci}和e_{2ci}，仍与前类似地需要v_i的正规化条件作为补充方程，这只需在式(2.18)～(2.20)中以$V_{0c}f_i$代换v_{0i}即可。但为便于下面的推导，现将它们以矩阵形式写出：

ε^0阶 $$F^TF=I_k \tag{2.31}$$

ε^1阶 $$F^TV_{0c}^TV_{1c}+V_{1c}^TV_{0c}F=[0] \tag{2.32}$$

ε^2阶 $$F^TV_{0c}^TV_{2c}+V_{1c}^TV_{1c}+V_{2c}^TV_{0c}F=[0] \tag{2.33}$$

……

其中 $F=[f_{h+1},\ f_{h+2},\cdots,f_{h+k}]$

$V_{sc}=[v_{s,h+1},\cdots v_{s,h+k}]\qquad(s=1,2)$

式(2.31)给出了f_i的正规化条件。另外，将式(2.28)也写成矩阵形式

$$V_{sc}=V_{0c}E_{scc}+V_{0\bar c}E_{s\bar cc}\qquad(s=1,2) \tag{2.34}$$

其中 $E_{scc}=[e_{sc,h+1},\cdots,e_{sc,h+k}]$，

$E_{s\bar cc}=[e_{s\bar c,h+1},\cdots,e_{s\bar c,h+k}]$

对式(2.32)和(2.33)均左乘F（它也是正交矩阵），将式(2.34)代入，即得

$$E_{1cc}=[0] \tag{2.35}$$

$$E_{2cc}=-\frac{1}{2}FV_{1c}^TV_{1c}=-\frac{1}{2}FE_{1\bar cc}^TE_{1\bar cc} \tag{2.36}$$

利用式(2.31)和(2.35)，还可将式(2.27)和(2.30)简化为

$$\lambda_{2i}=f_i^TV_{0c}^T(C_1V_{0\bar c}e_{1\bar ci}+C_2V_{0c}f_i) \tag{2.37}$$

$$e_{2\bar{c}i}=(\lambda_{0i}I_{n-k}-\Lambda_{0\bar{c}})^{-1}(V_{0\bar{c}}^T(C_1V_{0\bar{c}}e_{1\bar{c}i}+C_2V_{0c}f_i)-\lambda_{1i}e_{1\bar{c}i}) \tag{2.38}$$

于是，又确定了式(2.7)中对应于k重特征值λ_{0i} $(h+1\leqslant i\leqslant h+k)$的全部$\lambda_i$和$v_i$的二阶摄动估计算式

$$\begin{cases}\Lambda_c\approx\Lambda_{0c}+\varepsilon\Lambda_{1c}+\varepsilon^2\Lambda_{2c}\\ V_c\approx V_{0c}F+\varepsilon V_{1c}+\varepsilon^2V_{2c}\end{cases} \tag{2.39}$$

其中　$V_c=[v_{h+1},\cdots,v_{h+k}]$，$\Lambda_c=\mathrm{diag}(\lambda_{h+1},\cdots,\lambda_{h+k})$

$\Lambda_{sc}=\mathrm{diag}(\lambda_{s,h+1},\cdots,\lambda_{s,h+k})\quad(s=1,2)$

3．对应于$(n-l)$重零特征值$\lambda_{0i}=0$ $(l+1\leqslant i\leqslant n)$的摄动法

这与上面关于对应于k重非零特征值的摄动法并无实质上的差异，只需在式(2.25)、(2.29)、(2.34)～(2.39)中进行相应的符号代换即可得所需结果：

$$\begin{cases}\Lambda_d\approx\Lambda_{0d}+\varepsilon\Lambda_{1d}+\varepsilon^2\Lambda_{2d}\\ V_d\approx V_{0d}G+\varepsilon V_{1d}+\varepsilon^2V_{2d}\end{cases} \tag{2.40}$$

$$\begin{cases}(V_{0d}^TC_1V_{0d}-\lambda_{1i}I_{n-l})g_i=\{0\}\\ g_i^Tg_i=1\end{cases} \tag{2.41}$$

$$\lambda_{2i}=g_i^TV_{0d}^T(C_1V_{0\bar{d}}e_{1\bar{d}i}+C_2V_{0d}g_i) \tag{2.42}$$

$$V_{sd}=V_{0d}E_{sdd}+V_{0\bar{d}}E_{s\bar{d}d}\qquad(s=1,2) \tag{2.43}$$

$$\begin{cases}E_{1dd}=0\\ E_{1\bar{d}d}=-\Lambda_{0\bar{d}}^{-1}V_{0\bar{d}}^TC_1V_{0d}G\end{cases} \tag{2.44}$$

$$\begin{cases}E_{2dd}=-\dfrac{1}{2}GV_{1d}^TV_{1d}=-\dfrac{1}{2}GE_{1\bar{d}d}^TE_{1\bar{d}d}\\ E_{2\bar{d}d}=\Lambda_{0\bar{d}}^{-1}(E_{1\bar{d}d}\Lambda_{1d}-V_{0\bar{d}}^T(C_1V_{0\bar{d}}E_{1\bar{d}d}+C_2V_{0d}G))\end{cases} \tag{2.45}$$

其中　$\Lambda_d=\mathrm{diag}(\lambda_{l+1},\cdots,\lambda_n)$，$V_d=[v_{l+1},\cdots,v_n]$

$$\begin{cases}\Lambda_{sd}=\mathrm{diag}(\lambda_{s,l+1},\cdots,\lambda_{sn})\\ V_{sd}=[v_{s,l+1},\cdots,v_{sn}]\end{cases}\qquad(s=0,1,2)$$

$\Lambda_{0\bar{d}}=\mathrm{diag}(\lambda_{01},\cdots,\lambda_{0l})$，$V_{0\bar{d}}=[v_{01},\cdots,v_{0l}]$

$E_{sdd}=[e_{sd,l+1},\cdots,e_{sdn}]$

$(s=1,2)$

$E_{s\bar{d}d}=[e_{s\bar{d},l+1},\cdots,e_{s\bar{d}n}]$

$e_{si}=\{\{e_{s1i},\cdots,e_{sli}\},\ \{e_{s,l+1,i},\cdots,e_{sni}\}\}^T$

$\quad=\{e_{s\bar{d}i}^T,\ e_{sdi}^T\}^T\qquad(s=1,2)$

$G=[g_{l+1},\cdots,g_n]$

式(2.41)是关于$(n-l)$阶实对称方阵$V_{0d}^TC_1V_{0d}$的标准特征值问题，解之即得λ_{1i}和g_i。一般地有$n-l\ll n$，故此特征值问题也是易于求解的。

综合式(2.24)、(2.39)和(3.40)，即完整地给出了全部σ_i和v_i $(1\leqslant i\leqslant n)$的二阶摄动估计

$$\begin{cases}\Sigma_n=\Lambda^{1/2},\ \Lambda\approx\Lambda_0+\varepsilon\Lambda_1+\varepsilon^2\Lambda_2\\ V\approx V_0+\varepsilon V_1+\varepsilon^2V_2\end{cases} \tag{2.46}$$

其中　$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_n)$

$$\Lambda_s=\mathrm{diag}(\lambda_{s1},\ \lambda_{s2},\cdots,\lambda_{sn})\qquad(s=0,1,2)$$
$$\bar{V}_0=[V_{0a},\ V_{0c}F,\ V_{0b},\ V_{0d}G]$$
$$V_s=[v_{s1},\ v_{s2},\cdots,v_{sn}]\qquad(s=1,2)$$

（二）左奇异向量的近似确定方法

矩阵A的左奇异向量$u_i(1\leqslant i\leqslant m)$的确定也可基于式(2.1)、(2.2)和(2.5)等按与上述类似的摄动分析方法进行。但因已得到了A的全部奇异值σ_i的估计，故可直接利用A的奇异值分解式来估计u_i。

由式(2.46)中Σ_n的估计结果可知非零奇异值$\sigma_i(>0)$的个数$p(\leqslant n)$，即有

$$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_p>\sigma_{p+1}=\cdots=\sigma_m=0$$

将A的奇异值分解式写成如下分块形式

$$A=USV^T=[U_p,U_{m-p}]\begin{bmatrix}\Sigma_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_p^T\\ V_{n-p}^T\end{bmatrix}=U_p\Sigma_pV_p^T \tag{2.47}$$

由此得 $$U_p=AV_p\Sigma_p^{-1} \tag{2.48}$$

其中 $$U_p=[u_1,\ u_2,\cdots,u_p],\ V_p=[v_1,\ v_2,\cdots,v_p]$$
$$\Sigma_p=\mathrm{diag}(\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\sigma_p)$$

于是可由式(2.48)得到U_p的估计。至于$U_{m-p}=[u_{p+1},\cdots,u_m]$，它应由张成$A^T$的零空间的任意$(m-p)$个正交正规化向量$u_i$构成，即

$$\begin{cases}A^Tu_i=0\\ u_i^Tu_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}\end{cases}\qquad(p+1\leqslant i\quad j\leqslant m) \tag{2.49}$$

因 rank$(A)=p$，所以由此方程组必可求得$(m-p)$个线性无关的解向量，然后对其进行正交正规化处理即可。

如果矩阵A的阶数很高，则通过求解齐次线性方程组(2.49)来确定U_{m-p}需花费较大的运算量。因此，也可仍然采用前述的摄动分析方法来渐近地估计U_{m-p}。设$p\geqslant l$首先与式(2.7)和(2.8)类似地令

$$u_i=\bar{u}_{0i}+\varepsilon u_{1i}+\varepsilon^2u_{2i}+\cdots\qquad(l+1\leqslant i\leqslant m) \tag{2.50}$$

其中 $$\bar{u}_{0i}=\sum_{j=l+1}^{m}u_{0j}q_{ji}=U_{0d'}q_i \tag{2.51}$$

$$U_{0d'}=[u_{0,l+1},\cdots,u_{0m}],\ q_i=\{q_{l+1},\cdots,q_{mi}\}^T$$

然后按与前面第(一)·3节中类似的过程，基于式(2.1)、(2.2)和(2.5)可得出确定式(2.50)中的u_{1i}和u_{2i}的估计算法：

$$\begin{cases}(U_{0d'}^TB_1U_{0d'}-\lambda_{1i}I_{m-l})q_i=\{0\}\\ q_i^Tq_i=1\end{cases}\qquad(l+1\leqslant i\leqslant m) \tag{2.52}$$

$$U_{sd'}=U_{0d'}W_{sd'd'}+U_{0\bar{d}'}W_{s\bar{d}'d'}\quad(s=1,2) \tag{2.53}$$

$$\begin{cases}W_{1d'd'}=0\\ W_{1\bar{d}'d'}=-\Lambda_{0\bar{d}'}^{-1}U_{0\bar{d}'}^TB_1U_{0d'}Q\end{cases} \tag{2.54}$$

$$\begin{cases} W_{2d'd'}=-\dfrac{1}{2}QU_{1d'}^T U_{1d'}=-\dfrac{1}{2}QW_{1\bar{d}'d'}^T W_{1\bar{d}'d'} \\ W_{2\bar{d}'d'}=\Lambda_{0\bar{d}'}^{-1}(W_{1\bar{d}'d'}\Lambda_{1d'}-U_{0\bar{d}'}^T(B_1U_{0\bar{d}'}W_{1\bar{d}'d'}+B_2U_{0d'}Q)) \end{cases} \tag{2.55}$$

其中

$$\Lambda_{0\bar{d}'}=\mathrm{diag}(\lambda_{01},\cdots,\lambda_{0l}),\ U_{0\bar{d}'}=[u_{01},\cdots,u_{0l}]$$

$$\Lambda_{1d'}=\mathrm{diag}(\lambda_{1,l+1},\cdots,\ \lambda_{1m})$$

$$U_{sd'}=[u_{s,l+1},\cdots,u_{sm}]\qquad(s=1,2)$$

$$\begin{cases} W_{sd'd'}=[w_{sd',l+1},\cdots,w_{sd'm}] \\ W_{s\bar{d}'d'}=[w_{s\bar{d}',l+1},\cdots,w_{s\bar{d}'m}] \end{cases}\ (s=1,2)$$

$$w_{si}=\{\{w_{s1i},\cdots,w_{sli}\},\ \{w_{s,l+1,i},\cdots,w_{smi}\}\}^T$$

$$=\{w_{s\bar{d}'i}^T,\ w_{sd'i}^T\}^T\qquad(s=1,2)$$

$$Q=[q_{l+1},\cdots,q_m]$$

式(2.52)是关于$(m-l)$阶实对称方阵$U_{0d'}^T B_1U_{0d'}$的标准特征值问题，但因$\lambda_{1,l+1}\sim\lambda_{1n}$已通过求解式(2.41)得到，且$\lambda_{1,n+1}=\cdots=\lambda_{1m}=0$，所以式(2.52)已成为一些齐次线性方程组，解之即得q_i，由此可确定$U_{1d'}$和$U_{2d'}$，进而得

$$U_{d'}\approx U_{0d'}Q+\varepsilon U_{1d'}+\varepsilon^2U_{2d'} \tag{2.56}$$

其中

$$U_{d'}=[u_{l+1},\ u_{l+2},\cdots,u_m]$$

取出$U_{d'}$的最后$(m-p)$列，即为U_{m-p}的估计。但若$p<l$，则式(2.56)仅给出了U_{m-p}的后$(m-l)$列，至于其前$(l-p)$列，也易予按与第(一)·1或和第(一)·2节类似的过程估计之，此处不再赘述。

三、结 束 语

本文提出了一般实矩阵奇异值分解问题重分析的摄动法，导出了奇异值和左、右奇异向量的直到二阶摄动量的渐近估计算式。为便于进行具体的推导，文中对矩阵A的基本性质做了某些假定，比如设A的行数m不少于列数n以及A只有一组多重非零奇异值。但所给出的摄动分析方法是一般性的，可以毫无困难地应用于$m<n$或具有多个多重非零奇异值的矩阵。

当A为m阶实对称半正定或正定方阵时，其奇异值分解即为其谱分解，即有

$$Au_i=\sigma_iu_i\qquad(1\leqslant i\leqslant m) \tag{3.1}$$

$$A=U\Sigma_mV^T\qquad V=U \tag{3.2}$$

因此，这类矩阵奇异值分解问题重分析的摄动计算量可大大减少。另外，若A为一般m阶实对称方阵，其某些特征值将是负数，且其奇异值σ_i等于其特征值μ_i的绝对值，即$\sigma_i=|\mu_i|$ $(1\leqslant i\leqslant m)$；其对应于同一奇异值$\sigma_i$的左、右奇异向量$u_i$和$v_i$是相同的或仅是相位相反的，即有

$$Au_i=\mu_iu_i\qquad(1\leqslant i\leqslant m) \tag{3.3}$$

$$A=U\Sigma_mV^T,\qquad V=UD_s \tag{3.4}$$

其中

$D_s=\mathrm{diag}(\mu_1/|\mu_1|,\ \mu_2/|\mu_2|,\cdots,\mu_p/|\mu_p|,1,\cdots,1)$此处假定$A$的非零奇异值的

个数为$p(\leqslant m)$。显然，这种情况下的摄动分析也可直接对式(3.3)进行，从而可节省很多计算量。

本文讨论的一般实矩阵奇异值分解问题是各种实际应用问题中最常见的。但在某些特殊的应用领域或理论研究中，有时也可能遇到复矩阵的奇异值分解问题。因此，也有必要研究一般复矩阵奇异值分解问题重分析的高效近似方法。对此，我们将指出，本文对一般实矩阵所建立的摄动理论可直接被推广或移植到一般复矩阵的情况。事实上，当A为一般$m\times n$复矩阵时，AA^H和A^HA分别为m阶和n阶半正定或正定 Hermite 矩阵，它们的特征值问题为

$$AA^H u_i=\sigma_i^2 u_i \qquad (1\leqslant i\leqslant m) \tag{3.5}$$

$$A^H A v_i=\sigma_i^2 v_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{3.6}$$

或

$$AA^H U=U\Sigma_m^2, \qquad A^H AV=V\Sigma_n^2 \tag{3.7}$$

其特征值σ_i^2均为非负实数，$\sigma_i(\geqslant 0)(1\leqslant i\leqslant \min(m,n))$即为$A$的奇异值；特征向量$u_i$和$v_i$即为$A$的左、右奇异向量，它们一般均为复向量。矩阵$U$和$V$分别为$m$阶和$n$阶酉矩阵。仍设$m\geqslant n$，则矩阵$A$的奇异值分解即为如下酉分解

$$A=USV^H, \qquad S=\begin{bmatrix} \Sigma_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

其中

$$U^H=U^{-1}, \qquad V^H=V^{-1}$$

由于 Hermite 矩阵与实对称矩阵以及酉矩阵与正交矩阵均具有极其相似或平行的性质（后者为前者的特例），所以只要对本文给出的一般实矩阵奇异值分解问题重分析的摄动法的各个估计算式进行适当的形式上的改变，简言之，只需以 Hermite 转置符号“H”代换转置符号“T”，即可建立起一般复矩阵奇异值分解问题重分析的摄动理论。

参 考 文 献

[1] Forsythe, G. E., et al., 《计算机数值计算方法》（计九三译），清华大学出版社，北京 (1987)，253—307.

[2] 蒋尔雄等，《线性代数》，人民教育出版社，北京（1978），468—473.

[3] 孙继广，《矩阵扰动分析》，科学出版社，北京（1987），14—15，134—136.

[4] 胡海昌，《多自由度结构固有振动理论》，科学出版社，北京（1987），1—26.

[5] 吕振华、冯振东、方传流，线性特征值问题在模态坐标系中的矩阵摄动法，振动工程学报，2，(2) (1989)，59—94.

Perturbation Method for Reanalysis of the Matrix Singular Value Decomposition

Lü Zhen-hua Feng Zhen-dong

(*Jilin University of Technology, Changchun*)

Abstract

The perturbation method for the reanalysis of the singular value decomposition (SVD) of general real matrices is presented in this paper. This is a simple but efficient reanalysis technique for the SVD, which is of great significance to enhance computational efficiency of the iterative analysis problems that need to repeatedly carry out the matrix singular value decompositions. The asymptotic estimate formulas for the singular values and the corresponding left and right singular vectors up to second-order perturbation components are derived. At the end of the paper the way to extend the perturbation method to the case of general complex matrices is adavnced.

Key words matrix algebra, singular value decomposition, reanalysis, perturbation method