

# 环面薄膜的膨胀失稳\*

尚新春 程昌钧

(兰州大学力学系, 1990年9月22日收到)

## 摘 要

本文从有限弹性理论出发对超弹性薄膜轴对称大变形问题进行了一般的数学描述. 基于本文所导出的基本方程, 应用打靶法数值地分析了Mooney-Rivlin型类橡胶环面薄膜的大变形膨胀失稳问题. 给出了上、下极限载荷和位移载荷曲线.

**关键词** 超弹性 大变形 基本方程 打靶法 膨胀失稳

## 一、引 言

薄膜大变形问题是有限弹性理论中的一个重要问题. Green和Adkins<sup>[1]</sup>, Eringen<sup>[2]</sup>等曾指出球形薄膜在大变形膨胀过程中会发生失稳现象. 在环面整体半径远远大于其横截面半径的假设下, Kydoniefs和Spencer应用摄动法研究了环面薄膜的大变形膨胀问题<sup>[3]</sup>. 在同样的假设下, Hill仍用摄动法分析了环面厚薄的膨胀变形<sup>[4]</sup>. 上述有关环面膜的研究中均限制了几个参数必须是一个小参数, 因而具有一定的局限性.

本文在较大几何和材料参数范围内, 应用打靶法研究了环面薄膜的膨胀失稳问题. 首先, 从有限弹性理论出发将超弹性薄膜轴对称大变形问题归结为非线性常微分方程组的两点边值问题. 其次, 针对Mooney-Rivlin型类橡胶环面薄膜的膨胀失稳问题进行了数值求解, 得到了上、下极限载荷. 计算结果表明薄膜是否会发生失稳的决定因素是材料参数, 而几何参数只是在量的方面影响着失稳. 并且, 失稳前后位移和厚度都有较大突变.

## 二、问题的一般数学描述

薄膜的轴对称大变形可用其中面的变形来描述. 取空间柱坐标系 $(r, \theta, z)$ 与物质柱坐标系 $(R, \Theta, Z)$ 重合. 设变形前中面是以 $Z$ 为对称轴的光滑旋转曲面 $Z=Z(R)$ ,  $R \in [a, b]$ . 假设薄膜的变形始终保持几何形状上的轴对称性. 因此,  $\theta \equiv \Theta$ , 并且薄膜变形前、后中面上的经线和纬线既是主伸长迹线又是主曲率线. 记 $A, \alpha$ 分别为变形前后中面外法线与 $Z$ 轴的夹角. 其中 $A=A(R)=\arctg(dZ/dR)$ 是已知函数.  $H, h$ 分别为变形前、后薄膜的厚度. 径向、

\* 陈至达推荐.  
国家教委博士点基金资助项目.

纬向和法向主伸长率为

$$\lambda_1 = \frac{\cos A}{\cos \alpha} \frac{dr}{dR}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H} \quad (2.1a, b, c)$$

变形后中面经线和纬线的主曲率为

$$\kappa_1 = \frac{d}{dR}(\sin \alpha) \Big/ \frac{dr}{dR}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin \alpha}{r} \quad (2.2)$$

并且, 变形后中面上单位弧长的经向、纬向薄膜力  $T_1, T_2$  满足如下平衡方程

$$d(rT_1)/dR = (T_2 + rP_1)dr/dR, \quad \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 = P_3 \quad (2.3)$$

其中  $P_1$  和  $P_3$  分别是变形后中面上单位面积的经向和法向载荷。一般来说, 它们是  $r$  和  $\alpha$  的已知函数, 即  $P_1 = P_1(r, \alpha), P_3 = P_3(r, \alpha)$

假设薄膜是由各向同性的不可压超弹性物质制成的, 因此, 有本构方程

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2H \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \\ T_2 &= 2H \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中,  $W = W(I_1, I_2)$  是应变能函数,

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}, \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + (\lambda_1 \lambda_2)^2$$

是应变不变量。由于材料是不可压的, 故有

$$\lambda_3 = 1/\lambda_1 \lambda_2 \quad (2.5)$$

(2.1a, b), (2.2)~(2.4) 是 8 个未知变量  $r(R), \alpha(R), \lambda_1(R), \lambda_2(R), \kappa_1(R), \kappa_2(R), T_1(R), T_2(R)$  满足的 8 个方程。Yang 和 Feng 曾采用  $\lambda_1(R), r(R), r'(R)$  为基本未知量将这 8 个方程简化为一组常微分方程<sup>[6]</sup>。由于通常情况下边界条件是用  $r, \alpha, T_1$  写出的, 因此, 选用  $\lambda_1, r, r'$  为基本未知量在提出边界条件时显得有些不太方便。本文改用  $r, \alpha, h$  为基本未知量使得边界条件的描述较为简单。

将(2.5)代入(2.1c)得到  $\lambda_1 = HR/hr$ , 再将此式代入(2.4), 本构方程一般可写成

$$T_1 = \xi_1(R, r, h), \quad T_2 = \xi_2(R, r, h) \quad (2.6)$$

其中  $\xi_1$  和  $\xi_2$  是由(2.4)得到的已知函数。

不难由(2.1)~(2.6)导出如下基本方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dR} &= \frac{HR}{\cos A} \cdot \frac{\cos \alpha}{hr} \\ \frac{d\alpha}{dR} &= \frac{HR}{\cos A} \cdot \frac{1}{hr \xi_1} \left( P_3 - \frac{\sin \alpha}{r} \xi_2 \right) \\ \frac{dh}{dR} &= \left[ \frac{HR}{\cos A} \left( \frac{\xi_1 - \xi_2}{r} - \frac{\partial \xi_1}{\partial r} + P_1 \right) - \frac{\partial \xi_1}{\partial R} \right] \Big/ \frac{\partial \xi_1}{\partial h} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

它是含 3 个基本未知量  $r, \alpha, h$  的一阶显式常微分方程组。

由(2.2), (2.3)可得如下首次积分:

$$T_1(R)r(R)\sin \alpha(R) = T_1(a)r(a)\sin \alpha(a) + \int_{r(a)}^{r(R)} (P_1 \sin \alpha + P_3) r dr \quad (2.8)$$

常见的边界条件有

i) 薄膜中心无孔口即  $\alpha=0$  时, 有

$$r(0)=0, \quad \alpha(0)=0$$

ii) 薄膜的一端  $R=a$  或  $R=b$  为固定时, 有

$$r(a)=a \text{ 或 } r(b)=b$$

iii) 薄膜的一端  $R=a$  或  $R=b$  作用有恒定的水平拉力  $F_a$  或  $F_b$  时, 有

$$\xi_1(a, r(a), h(a)) \cos \alpha(a) = F_a \text{ 或 } \xi_1(b, r(b), h(b)) \cos \alpha(b) = F_b$$

特别地,  $R=a$  或  $R=b$  为自由边界时, 有

$$\xi_1(a, r(a), h(a)) = 0 \text{ 或 } \xi_1(b, r(b), h(b)) = 0$$

一般来说, 可在两个边界上提出三个边界条件来, 记作

$$g_i(r(a), r(b), \alpha(a), \alpha(b), h(a), h(b)) = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.9)$$

非线性两点边值问题(2.7), (2.9)在数学上描述了薄膜轴对称大变形的平衡状态。

### 三、环面薄膜的边值问题

现在, 考虑一个环面薄膜(轮胎)在恒定的均匀内部压力下的膨胀变形问题。设薄膜变形前的中面是由半径为  $L_0$ , 圆心到  $Z$  轴距离为  $L (> L_0)$  的圆绕  $Z$  轴旋转形成的环面。由变形的轴对称假定知, 变形后的中面仍为一个环面。但是, 它的横截面的形状不再是一个圆而是一条关于  $OR$  轴对称的闭合曲线, 如图1所示。取  $Q_1$  和  $Q_2$  的中点  $O_2$  作为变形后横截面的中心, 记

$$u = \overline{O_1 O_2}, \quad v = \overline{Q_1 Q_2} / 2 - L_0$$

分别称为环面薄膜的中心位移和边缘相对位移。

利用对称性只须考虑上半圆截面(见图1)。此时, 载荷情况为  $P_1 \equiv 0, P_3 = P \equiv \text{常数}$ 。

引入如下无量纲变量和参数

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \pi/2 + A, \quad c = a/b = (L - L_0)/(L + L_0), \quad A = bP/HC \\ x &= R/b = [(1+c) - (1-c)\cos\beta]/2 \\ y_1 &= y_1(\beta) = r/b, \quad y_2 = y_2(\beta) = a, \quad y_3 = y_3(\beta) = h/H \\ N_1 &= N_1(\beta) = T_1/HC, \quad N_2 = N_2(\beta) = T_2/HC \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

假定薄膜材料是Mooney-Rivlin型的, 即应变能函数为  $W = C[(I_1 - 3) + \Gamma(I_2 - 3)], C, \Gamma$  为材料常数。由(2.4)知

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \phi_1(\beta, y_1, y_3) \equiv 2(1/S - y_3^2)(1 + \Gamma S/y_3) \\ N_2 &= \phi_2(\beta, y_1, y_3) \equiv 2(S - y_3^2)(1 + \Gamma/Sy_3) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\text{其中} \quad S = S(\beta, y_1, y_3) \equiv 4y_1^2 y_3 \cdot [(1+c) - (1-c)\cos\beta]^{-2} \quad (3.3)$$

基本方程(2.7)的无量纲化形式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= F_1(\beta) y_1^{-1} y_3^{-1} \cos y_2 \\ \dot{y}_2 &= F_1(\beta) y_1^{-1} y_3^{-1} \phi_1^{-1} (A - y_1^{-1} \sin y_2 \cdot \phi_2) \\ \dot{y}_3 &= F_2(\beta) (\psi_1 \cos y_2 - \psi_2 \sin \beta) / \psi_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中



图1 环面薄膜膨胀大变形

$$\left. \begin{aligned} (\cdot) &= d(\cdot)/d\beta, \quad \psi_1 = (1 + 3\Gamma y_3^2) + (1 - \Gamma y_3^2)/S^2 \\ \psi_2 &= 2(S^{-1} + \Gamma S y_3^2), \quad \psi_3 = -y_3^{-1}(S^{-1} + 3y_3^2)(1 + \Gamma S y_3^{-1}) \\ F_1(\beta) &= ((1+c)/(1-c) - \cos\beta)^{-1} \\ F_2(\beta) &= [(1-c^2) - (1-c)^2 \cos\beta]/4 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= c + U - V, \quad y_1(\pi) = 1 + U + V \\ y_2(0) &= -\pi/2, \quad y_2(\pi) = \pi/2 \\ \phi_1(0, y_1(0), y_3(0))(c + U - V) &+ \phi_1(\pi, y_1(\pi), y_3(\pi))(1 + U + V) \\ &= A(1 + c + 2U)(1 - c + 2V)/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中,  $U = u/(L + L_0)$ ,  $V = v/(L + L_0)$  是两个待定常数. 最后一个边界条件是利用(2.8)导出的.

至此, 问题被归结为求解含参数  $A$ ,  $c$ ,  $\Gamma$  和待定常数  $U, V$  的非线性两点边值问题(3.4)~(3.6).

#### 四、数值计算方法

边值问题(3.4)~(3.6)可以用打靶法<sup>[7]</sup>来求解.

给定几何参数  $c$  和材料参数  $\Gamma$ , 取控制参数为  $\mu \equiv V$ , 记

$$B_1 = U, \quad B_2 = y_3(\pi), \quad A = B_3 \quad (4.1)$$

由(3.6)有初始条件

$$y_1(\pi) = 1 + B_1 + \mu, \quad y_2(\pi) = \pi/2, \quad y_3(\pi) = B_2 \quad (4.2)$$

将初值问题(3.4), (4.2)的解记作  $y_i(\beta; B_1, B_2, B_3)$  ( $i=1, 2, 3$ ). 显然,  $y_i$  为边值问题(3.4)~(3.6)的解的充要条件是使得如下终值条件成立:

$$\left. \begin{aligned} f_1(B_1, B_2, B_3) &\equiv y_1(0; B_1, B_2, B_3) - (c + B_1 - \mu) = 0 \\ f_2(B_1, B_2, B_3) &\equiv y_2(0; B_1, B_2, B_3) + \pi/2 = 0 \\ f_3(B_1, B_2, B_3) &\equiv \phi_1(\pi, (1 + B_1 + \mu), B_2)(1 + B_1 + \mu) \\ &+ \phi_1(0, y_1(0; B_1, B_2, B_3), y_3(0; B_1, B_2, B_3))(c + B_1 - \mu) \\ &- B_3(1 + c + 2B_1)(1 - c + 2\mu)/2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\text{记 } y_{i+3j} \equiv \partial y_i / \partial B_j \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3) \quad (4.4)$$

对方程(3.4)两边求偏导数  $\partial/\partial B_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{1+3j} &= -F_1(\beta) \frac{1}{y_1 y_3} \cos y_2 \left( \frac{y_{1+3j}}{y_1} + \frac{y_{3+3j}}{y_3} + y_{2+3j} \sin y_2 \right) \\ \dot{y}_{2+3j} &= -F_1(\beta) \frac{1}{y_1 y_3 \phi_1} \left[ \left( \frac{y_{1+3j}}{y_1} + \frac{y_{3+3j}}{y_3} + \frac{\phi_{1+3j}}{\phi_1} \right) \left( B_3 - \frac{\sin y_2}{y_1} \phi_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - B_{3j} - \frac{\sin y_2}{y_1} \left( \frac{y_{1+3j}}{y_1} \phi_2 - \phi_{2+3j} \right) + \frac{\cos y_2}{y_1} \phi_2 y_{2+3j} \right] \\ \dot{y}_{3+3j} &= -F_2(\beta) \frac{1}{\psi_3} \left[ (\psi_1 \cos y_2 - \psi_2 \sin \beta) \frac{\psi_{3+3j}}{\psi_3} \right. \\ &\quad \left. - \psi_{1+3j} \cos y_2 + \psi_1 \sin y_2 y_{2+2j} + \psi_{2+2j} \sin \beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{1+3j} &\equiv \partial\phi_1/\partial B_j = -2(S^{-2} + \Gamma y_3^2)S_j - 2[3y_3^2 + \Gamma(y_3^{-2} + 2Sy_3)]y_{3+3j} \\ \phi_{2+3j} &\equiv \partial\phi_2/\partial B_j = 2(1 + \Gamma y_3^2/S)S_j - 2[3y_3^2 + \Gamma(y_3^{-2} + 2y_3/S)]y_{3+3j} \\ \psi_{1+3j} &\equiv \partial\psi_1/\partial B_j = -2S^{-3}(1 - \Gamma y_3^2)S_j - 2\Gamma y_3(S^{-2} - 3)y_{3+3j} \\ \psi_{2+3j} &\equiv \partial\psi_2/\partial B_j = -2(S^{-2} - \Gamma y_3^2)S_j + 4\Gamma S y_3 y_{3+3j} \\ \psi_{3+3j} &\equiv \partial\psi_3/\partial B_j = (S^{-2} y_3^{-1} - 3\Gamma y_3)S_j + [(S^{-1} y_3^{-2} - 6y_3) + \Gamma(2y_3^{-3} - 3S)]y_{3+3j} \\ S_j &\equiv \frac{\partial S}{\partial B_j} = \frac{4y_1}{[(1+c) - (1-c)\cos\beta]^2} (2y_3 y_{1+3j} + y_1 y_{3+3j}) \\ B_{3j} &= \begin{cases} 0 & (j=1, 2) \\ 1 & (j=3) \end{cases} \end{aligned}$$

再对初值条件(4.2)两边求偏导数 $\partial/\partial B_j (j=1, 2, 3)$ 得到

$$\left. \begin{aligned} y_{1+3j}(\pi) &= \begin{cases} 0 & (j=2, 3) \\ 1 & (j=1) \end{cases}, \quad y_{2+3j}(\pi) = 0 \quad (j=1, 2, 3) \\ y_{3+3j}(\pi) &= \begin{cases} 0 & (j=1, 3) \\ 1 & (j=2) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

记 $R_{ij} \equiv \partial f_i/\partial B_j (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ , 由(4.3)知

$$\left. \begin{aligned} R_{1j} &= y_{1+3j}(0; B_1, B_2, B_3), \quad R_{2j} = y_{2+3j}(0; B_1, B_2, B_3) \\ R_{3j} &= B_{1j}[\phi_1(\pi, (1+B_1+\mu), B_2) + \phi_1(0, y_1(0; B_1, B_2, B_3), \\ &\quad y_3(0; B_1, B_2, B_3)) - B_3(1-c+2\mu)] + Q_0(1+B_1+\mu) \\ &\quad + Q_1(c+B_1-\mu) - B_{3j}(1+c+2B_1)(1-c+2\mu)/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q_0 &= B_{1j}\eta_1(\pi, (1+B_1+\mu), B_2) + B_{2j}\eta_2(\pi, (1+B_1+\mu), B_2) \\ Q_1 &= y_{1+3j}(0; B_1, B_2, B_3) \cdot \eta_1(0, y_1(0; B_1, B_2, B_3), y_3(0; B_1, B_2, B_3)) \\ &\quad + y_{3+3j}(0; B_1, B_2, B_3) \cdot \eta_2(0, y_1(0; B_1, B_2, B_3), y_3(0; B_1, B_2, B_3)) \end{aligned}$$

这里,

$$\eta_1 \equiv \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1}, \quad \eta_2 \equiv \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3}, \quad B_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$$

打靶法求解边值问题(3.4)~(3.6)的计算步骤为

- 1) 给定参数 $c, \Gamma, \mu$ 的值, 它们的取值范围限制在 $0.4 \leq c < 1, 0 \leq \Gamma \leq 0.5, \mu \geq 0$ 之内;
- 2) 适当选取 $B_1, B_2, B_3$ 的初值 $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, B_3^{(0)}$ ;
- 3) 用Runge-Kutta方法解初值问题(3.4), (4.5), (4.2), (4.6);
- 4) 检验如下误差判据是否满足

$$(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{1/2} \leq 10^{-m} \quad (\text{取 } m=4) \quad (4.8)$$

- 5) 若(4.8)不能满足, 则用Newton迭代法解(4.3), 迭代格式为

$$\begin{bmatrix} B_1^{(k+1)} \\ B_2^{(k+1)} \\ B_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{(k)} \\ B_2^{(k)} \\ B_3^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11}^{(k)} & R_{12}^{(k)} & R_{13}^{(k)} \\ R_{21}^{(k)} & R_{22}^{(k)} & R_{23}^{(k)} \\ R_{31}^{(k)} & R_{32}^{(k)} & R_{33}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ f_3^{(k)} \end{bmatrix} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

由此可得 $B_1, B_2, B_3$ 的修正值。

6) 用 $B_1, B_2, B_3$ 的修正值重复步骤3), 4), 5), 直到不等式(4.8)满足为止。

由于在步骤5)中采用了Newton迭代(4.9), 所以步骤2)即初值 $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, B_3^{(0)}$ 的选取对于上述算法的实施非常重要。下面, 给出一种初值选取的方法。首先, 注意到这样一个事实, 在充分小的载荷下(它对应于边缘相对位移充分小)环面薄膜变形后的横截面形状仍可近似成一个圆, 并且变形可以近似地看成是均匀变形。也就是说, 当 $0 < \mu \ll 1$ 时, 有近似式

$$\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda = 1 + 2\mu/(1-c), \quad N_1 \approx N_2 \approx 2(1-\lambda^{-2})(1+\Gamma\lambda^2) \quad (4.10)$$

于是, 可以得到如下近似解:

$$\left. \begin{aligned} y_1(\beta) &\approx (1/2)(1-c+2\mu)[(1-c^2)-(1-c)^2\cos\beta]^{-1} \\ y_2(\beta) &\approx \beta - \pi/2, \quad y_3(\beta) \approx (1+2\mu/(1-c))^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

由(3.6), (4.10), (4.11)可得

$$\left. \begin{aligned} B_1 &\approx (1+c)\mu/(1-c), \quad B_2 \approx (1+2\mu/(1-c))^{-2} \\ B_3 &\approx 4(1-c+2\mu)^{-1} \cdot \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\mu}{1-c} \right)^{-2} \right] \left[ 1 + \Gamma \left( 1 + \frac{2\mu}{1-c} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

(4.12)式给出初值 $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, B_3^{(0)}$ , 再由(4.9)得到较为准确的 $B_1, B_2, B_3$ 。

其次, 注意到 $B_1, B_2, B_3$ 是 $\mu$ 的单值连续函数, 可以应用延拓方法<sup>[7]</sup>来计算较大 $\mu$ 值所对应的解。事实上, 因为 $\mu=0$ 时 $B_1=B_2=B_3=0$ , 又知 $0 < \mu \ll 1$ 时 $B_1, B_2, B_3$ 的值, 所以可用线性外插得到 $\mu$ 增加一个微小步长 $\Delta\mu$ 时( $\mu+\Delta\mu$ )的 $B_1, B_2, B_3$ 。这样, 重复上述步骤延拓下去就能得到较大 $\mu$ 值的解。

## 五、数值结果

薄膜材料的物理非线性会引起薄膜在大变形膨胀过程中发生类似于扁壳跳跃形式的失稳现象<sup>[1,2]</sup>。按照上一节的计算方法可以求得环面薄膜膨胀失稳的上、下极限载荷, 其数值结果见表1。当 $0 \leq \Gamma < 0.21$ 时载荷 $A$ 增加到上极限载荷 $A_{\max}$ 处将会发生失稳, 而在 $\Gamma \geq 0.21$ 时载荷 $A$ 随 $\mu$ 单调增大, 薄膜不会失稳。

表1 上、下极限载荷值

$\Gamma$	$A$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	$A_{\max}$	4.13	4.96	6.20	8.26	12.39	24.79
	$A_{\min}$	不 存 在					
0.1	$A_{\max}$	4.49	5.96	7.45	9.94	14.91	29.81
	$A_{\min}$	4.21	5.05	6.32	8.43	12.64	25.27
0.2	$A_{\max}$	5.93	7.11	8.90	11.86	17.80	35.59
	$A_{\min}$	5.90	7.08	8.86	11.81	17.71	35.42
0.21	$A_{\max}=A_{\min}$	6.09	7.30	9.13	12.17	18.28	36.55
$\Gamma > 0.21$	$A_{\max}, A_{\min}$	不 存 在					

注 表中 $A_{\max}$ 和 $A_{\min}$ 分别表示上、下极限载荷。

图2给出 $\Gamma=0.1$ 时不同的 $c$ 值下,无量纲化的薄膜外边缘厚度 $h(\pi)/H$ 与载荷 $A$ 的关系曲线。在 $A_{\max}$ 和 $A_{\min}$ 处, $h(\pi)/H$ 分别约为0.46和0.10,参数 $c$ 对这两个值的影响非常微弱。另外,薄膜在失稳后其厚度改变较大。

图3给出 $\Gamma=0.1$ 时不同的 $c$ 值下,薄膜中心位移 $U$ 随载荷 $A$ 变化的曲线。在 $A_{\max}$ 和 $A_{\min}$ 处, $U$ 随参数 $c$ 增大而缓慢增大。失稳时中心位移将会有较大的突变。

总之,决定薄膜是否会发生失稳的因素是材料参数 $\Gamma$ ,而几何参数 $c$ 只是在量的方面影响着薄膜的失稳。

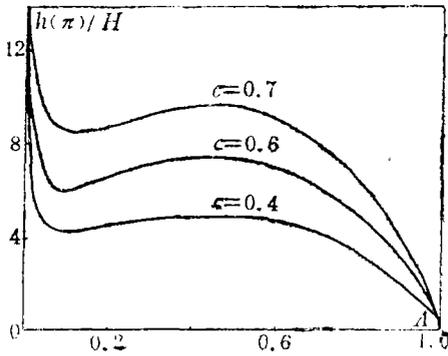


图2 无量纲厚度 $h(\pi)/H$ 随载荷 $A$ 的变化

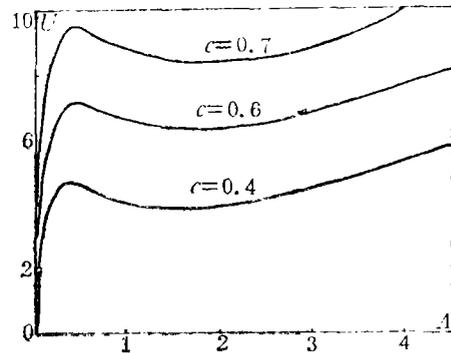


图3 中心位移 $U$ 随载荷 $A$ 的变化

### 参 考 文 献

- [1] Green, A. E. and J. E. Adkins, *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*, Chap. 4, Clarendon Press (1960).
- [2] Eringen, A. C., *Non-Linear Theory of Continuous Media*, Chap. 6, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1962).
- [3] Kydonieffs, A. D. and A. J. M. Spencer, The finite inflation of an elastic toroidal membrane of circular cross section, *Int. J. Engng. Sci.*, 5 (1967), 367—391.
- [4] Hill, J. M., The finite inflation of a thick-walled elastic torus, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 33 (1980), 471—490.
- [5] Hill, J. M., Finite deformation of thick-walled inner tubes and tyres under inflation and rotation, D. E. Carlson and R. T. Shield, Eds., *Finite Elasticity, Proc. IUTAM Symp.*, Lehigh Univ., Martinus Nijhoff Pubs. (1982), 211—236.
- [6] Yang W. H. and W. W. Feng, On axisymmetrical deformations of non-linear membranes, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 92 (1970), 1002—1011.
- [7] 朱正佑、程昌钧, 《分支问题的数值计算方法》, 第三章, 兰州大学出版社 (1989).
- [8] Hart-Smith, L. J., Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials, *ZAMP*, 17 (1966), 608—626.

## Instability of Toroidal Membrane with Large Tensile Deformation

Shang Xin-chun    Cheng Chang-jun

*(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)*

### Abstract

In this paper, the problem of large axisymmetric deformation of hyperelastic membrane is reformulated on the basis of the general theory of finite elasticity. From the fundamental equations derived here, the tensile instability of toroidal rubberlike membrane with Mooney-Rivlin's model constitutive relation is solved by using the shooting method. The upper and lower limit loads and the response curve of the displacement to the load are given.

**Key words** hyperelasticity, large deformation, fundamental equation, shooting method, tensile instability