应用数学和力学，第12卷第6期(1991年6月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘塑性问题的参数二次规划法*

曾 攀　钱令希

（大连理工大学工程力学研究所，1989年12月23日收到）

摘　要

本文应用参变量变分方法处理Perzyna粘塑性问题，将原问题化为求解带约束条件的二次规划问题，文中具体讨论了用于该问题的有限单元形式及具体实施过程。

关键词　粘塑性　参数二次规划　有限元

一、基本表达式

粘塑性Perzyna模型的本构关系为[1]

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl}-d\varepsilon_{kl}^{vp}) \tag{1.1}$$

其中

$$d\varepsilon_{ij}^{vp}/dt=\gamma\langle\phi(F)\rangle\partial Q/\partial\sigma_{ij} \tag{1.2}$$

$$\langle\phi(F)\rangle=\begin{cases}0 & 当F\leqslant 0\\ \phi(F) & 当F>0\end{cases} \tag{1.3}$$

以上 $d\varepsilon_{ij}^{vp}$ 为粘塑性应变增量，γ 为粘性系数，Q 为塑性流动势，F为静态屈服函数，(1.3) 式的意义为：在屈服面之内 ($F<0$)，没有塑性变形发生，弹塑性状态总是在屈服面上，而粘塑性状态则处于屈服面之外，$\phi(F)$ 的具体形式根据动态实验结果给出[2]，通常$\phi(F)$的表达式有：

$$\phi(F)=F \tag{1.4}$$

$$\phi(F)=F^{\delta} \tag{1.5}$$

$$\phi(F)=\exp[F]-1 \tag{1.6}$$

当为(1.4)时，Perzyna模型变为H-P模型(Hohenemser-Prager)。

设　$\lambda=\langle\phi(F)\rangle$ (1.7)

则(1.2)、(1.3)式变为

$$d\varepsilon_{ij}^{vp}=\gamma\lambda(\partial Q/\partial\sigma_{ij})dt \tag{1.8}$$

$$\begin{cases}\lambda=0 & 当F\leqslant 0\\ \lambda=\phi(F) & 当F>0\end{cases} \tag{1.9}$$

---

* 叶开沅推荐。

国家自然科学基金资助项目。

将$F(d\varepsilon_{ij},\lambda)$作一阶展开($F=F_0+dF$)，再将(1.8)式代入。

$$F(d\varepsilon_{ij},\lambda)=F_0+dF=F_0+D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}d\varepsilon_{kl}+\Big[\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{vp}}\cdot\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}-D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}\Big]\gamma\lambda dt \tag{1.10}$$

令 $$F^*(d\varepsilon_{ij},\lambda)=F(d\varepsilon_{ij},\lambda)-\phi^{-1}(\lambda) \tag{1.11}$$

$\phi^{-1}(\lambda)$是$\phi(F)$的反函数。

则$F^*(d\varepsilon_{ij},\lambda)$的一阶展开式为：

$$F^*(d\varepsilon_{ij},\lambda)=F_0-\phi^{-1}(0)+D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}d\varepsilon_{kl}+\Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{vp}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}-D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}\Big)\gamma\cdot dt-\frac{d\phi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\Big]\lambda \tag{1.12}$$

原来的(1.9)式可为

$$\begin{cases}\lambda=0 & \text{当}F^*<0\\ \lambda>0 & \text{当}F^*=0\end{cases} \tag{1.13}$$

在不等式中引入松驰参变量ν，则(1.13)等价于

$$\left.\begin{aligned}&F^*(d\varepsilon_{ij},\lambda)+\nu=0\\ &\lambda\nu=0,\quad \lambda,\nu\geqslant0\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

将$F^*(d\varepsilon_{ij},\lambda)$写成：

$$F^*(d\varepsilon_{ij},\lambda)=F_0^*+wd\varepsilon_{ij}-(m\gamma dt+\varphi)\lambda \tag{1.15}$$

其中：
$$F_0^*=F_0-\phi^{-1}(0) \tag{1.16}$$
$$w=D_{ijkl}\partial F/\partial\sigma_{ij} \tag{1.17}$$
$$m=D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{vp}}\cdot\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}} \tag{1.18}$$

粘塑性问题的其它方程为：

平衡方程： $$d\sigma_{ij,j}+db_i=0 \quad 在\Omega中 \tag{1.19}$$

应变位移关系： $$2d\varepsilon_{ij}=du_{i,j}+du_{j,i} \tag{1.20}$$

边界条件： $$d\sigma_{ij}n_j=d\bar{T}_i \quad 在S_1上 \tag{1.21}$$
$$du_i=d\bar{u}_i \quad 在S_2上 \tag{1.22}$$

在时刻$[t,t+\Delta t]$，构造系统的总势能泛函Π为：

$$\Pi=\int_\Omega\Big\{\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}-\gamma\lambda D_{ijkl}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}\Delta td\varepsilon_{kl}\Big\}d\Omega-\Big[\int_\Omega db_idu_id\Omega+\int_{S_p}d\bar{T}_idu_idS\Big] \tag{1.23}$$

由参变量变分原理，在满足位移协调及几何边界条件下，求取du_i在状态方程(1.14)的控制下，使得$\delta\Pi=0$，其中λ是参变量不参加变分[3]（该原理的证明见另文）。

二、参数二次规划法

将连续体Ω作有限元离散，设共划分n个单元（弹塑性单元n_1），引入有限元插值函数

$$du = N\delta \tag{2.1}$$

$$d\varepsilon = B\delta \tag{2.2}$$

通过单元的组合装配，可将系统总势能(1.23)及状态方程(1.14)写为

$$\Pi = \delta^T K\delta/2 - \delta^T[\Phi\lambda\gamma\Delta t + q] \tag{2.3}$$

及

$$C\delta - (U\gamma\Delta t + W)\lambda - d + \nu = 0 \tag{2.4}$$

$$\lambda^T\nu = 0,\ \lambda, \nu \geqslant 0 \tag{2.5}$$

其中

$$K = \sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e} B^T DBd\Omega \tag{2.6}$$

$$\Phi = \sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right)^T DB\right)^T d\Omega \tag{2.7}$$

$$q = \sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}(N^T db)d\Omega + \sum_{e=1}^{n_2}\int_{\Omega}(N^T d\boldsymbol{T})d\Omega \tag{2.8}$$

$$C = \sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T DB\right)d\Omega \tag{2.9}$$

$$U = \sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D\left(\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon^{vp}}\right)^T\left(\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right)\right)d\Omega \tag{2.10}$$

$$W = \sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\frac{d\phi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right)d\Omega \tag{2.11}$$

$$d = -\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}[F_0 - \phi^{-1}(0)]d\Omega \tag{2.12}$$

由变分原理：

$$\partial\Pi/\partial\delta = 0 \tag{2.13}$$

则

$$K\delta - (\Phi\gamma\Delta t\lambda + q) = 0 \tag{2.14}$$

求出

$$\delta = K^{-1}(\Phi\gamma\Delta t\lambda + q) \tag{2.15}$$

代入状态方程：

$$\nu - (U\gamma\Delta t + W - CK^{-1}\Phi\gamma\Delta t)\lambda = -CK^{-1}q + d \tag{2.16}$$

$$\lambda^T\nu = 0,\ \lambda, \nu \geqslant 0 \tag{2.17}$$

这是一个互补问题，由(2.16)、(2.17)求解出λ后，代入(2.15)式则可得到δ。

(2.16)式可化为

$$\nu - (U + W/\gamma\Delta t - CK^{-1}\Phi)\tilde{\lambda} = -CK^{-1}q + d \tag{2.18}$$

其中： $\tilde{\lambda} = \gamma\Delta t\lambda$

和一般的弹塑性参变量问题相比[4]，(2.18) 式中多了一项 $W/\gamma\Delta t$，这一项实质上就是粘性项，表现为与屈服条件的时间相关性。

三、单元的选取

1) 平面三角形单元

$$D=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix}, \quad \sigma=\{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^T \tag{3.1}$$

描述节点位移的形函数阵N及B为[5]

$$N=[N_i I(2\times 2) \quad N_j I(2\times 2) \quad N_m I(2\times 2)] \tag{3.2}$$

$$B=[B_i \ B_j \ B_m] \tag{3.3}$$

其中：

$$N_i=(a_i+b_i x+c_i y)/2\Delta \qquad (i,j,m)^{\ominus 1)} \tag{3.4}$$

$$B_i=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \qquad (i,j,m) \tag{3.5}$$

$$a_i=x_j y_m-x_m y_j,\ b_i=y_j-y_m,\ c_i=-(x_j-x_m) \qquad (i,j,m) \tag{3.6}$$

$$2\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \qquad (i,j,m\text{逆时针转向}) \tag{3.7}$$

Φ^e, C^e, U^e的计算由文献[6]给出：

$$\Phi^e=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} b_i r_x+c_i r_{xy} \\ c_i r_y+b_i r_{xy} \\ b_j r_x+c_j r_{xy} \\ c_j r_y+b_j r_{xy} \\ b_m r_x+c_m r_{xy} \\ c_m r_y+b_m r_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

其中： $r=(D\partial Q/\partial\sigma)^T=\{r_x \ r_y \ r_{xy}\}^T$

$$C^e=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} b_i w_x+c_i w_{xy} \\ c_i w_y+b_i w_{xy} \\ b_j w_x+c_j w_{xy} \\ c_j w_y+b_j w_{xy} \\ b_m w_x+c_m w_{xy} \\ c_m w_y+b_m w_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

其中： $w=\{D\partial F/\partial\sigma\}^T=\{w_x \ w_y \ w_{xy}\}^T$

$$U^e=\int_\Omega m^e d\Omega=Am^e \tag{3.10}$$

其中： $m^e=\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D\left(\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon^{vp}}\right)^T\left(\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right)$

1) 记号$(i,j,m)^\ominus$表明其它节点可以按下标i,j,m轮换得到。

而w^e，d^e的计算为：

$$w^e=\int_{\Omega^e}\frac{d\phi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}d\Omega=A\varphi \tag{3.11}$$

其中 $\varphi=d\phi^{-1}(\lambda)/d\lambda$

$$d^e=-(F^0-\phi^{-1}(0))A \tag{3.12}$$

2）平面问题的各种等参单元

只是K^e，Φ^e，C^e的表达式有变化，文献[6]已给出，而 U^e，w^e，d^e 还是由（3.10）～（3.12)给出。

四、实　施

1）将平面问题进行有限元离散。

2）在得到N，B的表达式后，分别计算K，Φ，U，C，W，d。

3）将时间$[t_1,t_n]$进行离散，$t_1,t_2,\cdots,t_n\to\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n$，对每一$\Delta t_i(i=1,2,\cdots,n)$分别施加外载$\boldsymbol{T}_i$，计算$q$。再由(2.16)、(2.17)求解互补问题，得到λ_i，代入(2.15)式则可求得δ。

4）重复3)，就得到完整的粘塑性问题的解。

参考文献

[1] 王仁、黄光智、朱兆祥，《塑性力学进展》，中国铁道出版社（1988)．

[2] 杨绪灿、杨桂通、徐秉业，《粘塑性力学概论》，中国铁道出版社（1985)．

[3] Zhong, W.X. and R. L. Zhang, The parametric variational principle for elasto-plasticity, *Acta Mechanica Sinica*, **4**, 2 (1988).

[4] 张柔雷、钟万勰，参变量最小势能原理的有限元参数二次规划解，计算结构力学及其应用，**4**, 1 (1987)．

[5] 谢贻权、何福保，《弹性和塑性力学中的有限单元法》，机械工业出版社（1981)．

[6] 张柔雷，参变量变分原理及其应用，大连理工大学博士学位论文（1987)．

Parametric Quadratic Programming Method for Viscoplasticity

Zeng Pan　　Qian Ling-xi

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian)

Abstract

Perzyna model in viscoplasticity has been studied by the parametric variational principle, which could be transformed into solving the parametric quadratic programming problem. The FEM form of this problem and its implementation have also been discussed in the paper.

Key words viscoplasticity, parametric quadratic programming, FEM