

# 焊接过程瞬态温度场与残余应力场\*

袁发荣 孙华东

(陕西机械学院, 1990年4月7日收到)

## 摘 要

本文根据焊接热传导及热弹塑性的研究现状, 对如下两个问题进行了探讨. 首先, 采用非线性问题线性化的方法对非线性非定常温度场问题的边界元法做了改进, 并将其用于焊接热传导分析; 其次, 提出“等效线膨胀系数法”考虑相变对于应力场的影响, 并将其用于焊接热弹塑性分析. 实例的数值计算结果与实测数据的对比分析表明本文方法行之有效.

**关键词** 焊接 热传导 相变 残余应力

## 一、瞬态温度场

一般二维非定常热传导问题, 可以归结为下列抛物型偏微分方程(扩散方程)的混合问题

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \bar{Q} \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \quad (1.1a)$$

$$T = T \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1, t \geq 0 \quad (1.1b)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -q \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2, t \geq 0 \quad (1.1c)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -\beta(T - T_0) \quad \forall (x, y) \in \Gamma_3, t \geq 0 \quad (1.1d)$$

$$T = T_0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, t = 0 \quad (1.1e)$$

式中  $\bar{Q}$ ,  $T_0$ ,  $T$  及  $T_0$  分别为物体的内热源、初始温度、瞬时温度及物体周围介质温度,  $q$  与  $T$  为给定的边界热流与边界温度;  $\beta$  为物体表面放热系数,  $k$ ,  $\rho$  及  $c$  分别为材料的热传导系数、密度及比热, 它们皆随温度而变化;  $\Omega$  及  $\Gamma$  为求解区域及其边界,  $n$  为  $\Gamma$  的外法线,  $x$ ,  $y$  为直角坐标,  $t$  为时间.

为使非线性势问题(1.1)便于用边界元法求解, 可通过适当的变换方法, 使上述非线性问题线性化. 为此, 采用 Kirchhoff 变换

$$\psi = K(T) = k_0 \frac{T_0}{h} \left[ \exp \left( h \frac{T - T_0}{T_0} \right) - 1 \right] \quad (1.2)$$

其中  $k_0$  为初始热传导系数,  $h$  为一无量纲的材料常数.

\* 蒋咏秋推荐.

本文曾于 1988 年 11 月在法国朗西召开的国际第二届残余应力会议上宣读, 译成中文时作了若干修改.

于是, 由式 (1.1) 所示的以温度  $T$  为基本参量的非线性热传导问题就转化为如下以  $\psi$  为基本量的线性问题

$$\alpha^{-1} \partial \psi / \partial t = \nabla^2 \psi + \bar{Q} \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \quad (1.3a)$$

$$\psi = \bar{\psi} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1, t \geq 0 \quad (1.3b)$$

$$\partial \psi / \partial n = -\bar{q} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2, t \geq 0 \quad (1.3c)$$

$$\partial \psi / \partial n = -\beta [K^{-1}(\psi) - T_c] \quad \forall (x, y) \in \Gamma_3, t \geq 0 \quad (1.3d)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, t = 0 \quad (1.3e)$$

必须指出: 在许多实际问题中, 上述扩散系数  $\alpha = k(\psi) / \rho c$  随  $\psi$  而变化远慢于热传导系数的变化, 因此作为一个合理的近似, 可取  $\alpha$  为常数; 在边界  $\Gamma_3$  出现的  $K^{-1}(\psi)$  可能是非线性的, 但其非线性并不突出, 且很容易用标准迭代法确定. 于是式 (1.3) 所表示的问题可看成非定常线性问题, 可利用线性边界元法求解. 为此, 利用时间差分代替时间微分, 有

$${}^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{{}^{t+\Delta t} \psi - {}^t \psi}{\Delta t} \quad (1.4)$$

将式 (1.4) 代入 (1.3a), 并设  ${}^t \psi / \Delta t + \alpha \bar{Q} = -f$ , 得

$$\alpha \nabla^2 \psi(x, y, t + \Delta t) - {}^{t+\Delta t} \psi / \Delta t = f \quad (1.5)$$

对应于方程 (1.5) 的基本解为

$$\psi^* = K_0(r / \sqrt{\alpha \Delta t}) / 2\pi\alpha \quad (1.6)$$

其中  $r$  为两点之间的距离,  $K_0(r / \sqrt{\alpha \Delta t})$  为零阶第二类虚宗量 Bessel 函数.

本文将利用 Green 公式推导积分方程式. Green 第二公式如下

$$\iint_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (1.7)$$

用  $\psi$  与  $\psi^*$  代换式 (1.7) 中的  $u$  与  $v$ , 得

$$\begin{aligned} \psi(P) + \alpha \int_{\Gamma} \psi(Q') q^*(P, Q') d\Gamma(Q') \\ = \alpha \int_{\Gamma} \psi^*(P, Q') q(Q') d\Gamma(Q') - \iint_{\Omega} \psi^*(P, Q) f d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中  $q = \partial \psi / \partial n$ ,  $q^* = \partial \psi^* / \partial n$ ,  $Q$  为区域点,  $Q'$  为边界点. 当  $P \rightarrow P'$  ( $P'$  为边界上任意一点) 时, 处理奇异性, 可得如下边界积分方程

$$\begin{aligned} C(P') \psi(P') + \alpha \int_{\Gamma} \psi(Q') q^*(P', Q') d\Gamma(Q') \\ = \alpha \int_{\Gamma} \psi^*(P', Q') q(Q') d\Gamma(Q') - \iint_{\Omega} \psi^*(P', Q) f d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (1.9)$$

为解方程 (1.9), 将边界离散为  $n$  个元素, 则方程 (1.9) 可写成

$$[H]\{\psi\}_r = [G]\{q\}_r - \{B\} \quad (1.10)$$

同理, 方程 (1.8) 可离散为

$$\{\psi\}_{\Omega} = [\bar{G}]\{q\}_r - [H]\{\psi\}_r - \{B\} \quad (1.11)$$

按照线性边界元法求解势问题的一般理论, 由式 (1.10) 与 (1.11) 可求得  $\psi(x, y, t + \Delta t)$ , 然后利用逆变换  $T = K^{-1}(\psi)$  求得  $T(x, y, t + \Delta t)$ .

## 二、瞬态应力场及残余应力场

求解焊接过程中的瞬态应力场（以及最终的残余应力场），可归结为求解一个非定常的热弹塑性问题。当材料性能与温度有关时，应力应变关系可统一写成如下形式

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} + \{C\}dT \quad (2.1)$$

在弹性区：

$$[D] = [D^e] \quad (2.2)$$

$$\{C\} = \{C^e\} = -[D^e](\{\alpha\} + (\partial[D^e]^{-1}/\partial T)\{\sigma\}) \quad (2.3)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_0 + (d\alpha_0/dT)T\} \quad (2.4)$$

其中 $[D^e]$ 为弹性矩阵， $\alpha$ 为瞬时线膨胀系数， $\alpha_0$ 为温度 $T$ 时的线膨胀系数。

在塑性区：

$$[D] = [D^p] = [D^e] - [D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]/S \quad (2.5)$$

$$\{C\} = \{C^p\} = -\left([D^p]\{\alpha\} + [D^p]\frac{\partial[D^e]^{-1}}{\partial T}\{\sigma\} - [D^e]\left\{-\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\frac{\partial f_0}{\partial T}/S\right) \quad (2.6)$$

$$S = \left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T [D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} + \frac{\partial f_0}{\partial K}\left\{\frac{\partial K}{\partial\varepsilon^p}\right\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} \quad (2.7)$$

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda\{\partial f/\partial\sigma\} \quad (2.8)$$

$$\lambda = \left(\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T [D^e]\{d\varepsilon\} - \left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T [D^e](\{\alpha\} + \frac{\partial[D^e]^{-1}}{\partial T}\{\sigma\})dT - \frac{\partial f_0}{\partial T}dT\right)/S \quad (2.9)$$

其中 $[D^p]$ 为塑性矩阵， $f$ 为材料的屈服函数，当应力满足 $f=f_0$ 时材料屈服， $K$ 为硬化指数， $d\varepsilon^p$ 为塑性应变增量。 $\lambda$ 值给出如下的加载与卸载的判别准则： $\lambda>0$ ，加载； $\lambda<0$ ，卸载； $\lambda=0$ ，无载（平衡）。

考虑构件中某一单元，利用虚位移原理，可得如下的单元平衡方程

$$\{dF\}^e + \{dR\}^e = [K]^e\{d\delta\}^e \quad (2.10)$$

其中

$$\{dR\}^e = -\int_{V^e} [B]^T\{C\}dV \quad (2.11)$$

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T[D][B]dV \quad (2.12)$$

集合载荷向量及刚度矩阵，可得整体平衡方程

$$[K]\{d\delta\} = \{dF\} \quad (2.13)$$

用有限元法求解上述热弹塑性问题，可将其非线性应力应变关系，按加载过程逐段线性化，即可从热传导分析中算得的温度增量出发进行载荷等效。然而对于局部经历高温热循环的热弹塑性问题，尚须根据问题性质作如下处理：假定高温下材料特性值保持一定水平，超过塑性温度的那些单元热负荷为零；对于增量前处于弹塑性状态而增量后进入屈服的“过渡单元”， $\{C\}$ 与 $[D]$ 采用加权平均方法进行处理；采用“等效线膨胀系数法”进行相变分析，即根据焊接热传导计算结果及焊接 $C-C-T$ 图确定相变情况，并将相变应变转换成“等

效线膨胀系数”计入原线膨胀系数之中,用以反映相变对于应力场的影响。

当有的单元进入塑性域后,因式(2.13)中的刚度矩阵 $[K]$ 与当时的应力应变水平有关,从而与位移有关,故方程(2.13)是非线性的,为使其线性化,可采用增量载荷法将式(2.13)近似写成

$$[K]\{\Delta\delta\}_i = \{\Delta F\}_i \quad (2.14)$$

其中 $\{\Delta\delta\}_i$ 为第 $i$ 次加载所得的位移增量, $\{\Delta F\}_i$ 为第 $i$ 次加载的载荷增量; $[K]$ 为增量变刚度矩阵,它仅与加载前的应力应变水平有关;因而载荷增量与位移增量成线性关系,于是不难用线弹性问题有限元法求解。

### 三、算 例 分 析

算例取15MnVN钢 $5 \times 200 \times 200$ mm平板试样,先将其对半剖开,然后用电弧焊对接如图1所示。

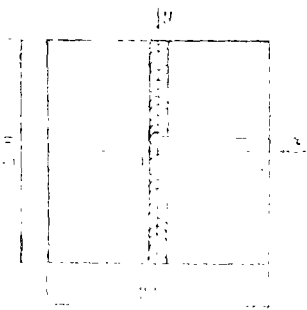


图1 试样

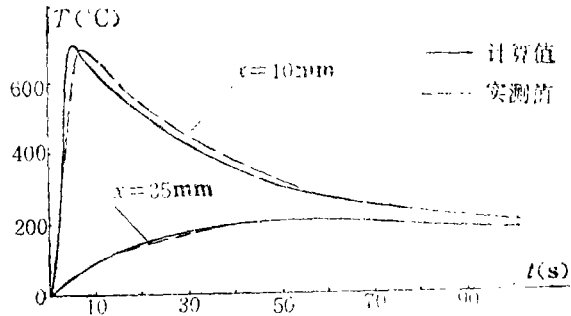


图2 加热冷却曲线

焊接电弧的热量分布可用下式近似描述

$$q(R) = q_m \exp[-KR^2]$$

式中 $K=3/\bar{r}^2$ 为热源集中系数, $\bar{r}$ 为有效加热半径, $R$ 为所研究的点到热源中心的距离; $q_m$ 为最大比热流。

假定薄板温度沿板厚不变,并考虑薄板上下表面散热,可取内部热源为

$$\bar{Q}(R) = \frac{q(R)}{\delta} - \frac{2\beta}{\delta} (T - T_0)$$

考虑对称性,取试样中间一单位宽度进行温度场边界元分析,取试样的四分之一进行热弹塑性有限元分析,并利用自编FORTRAN程序在IBM-PC微机上实现计算,部分结果见图2,3。

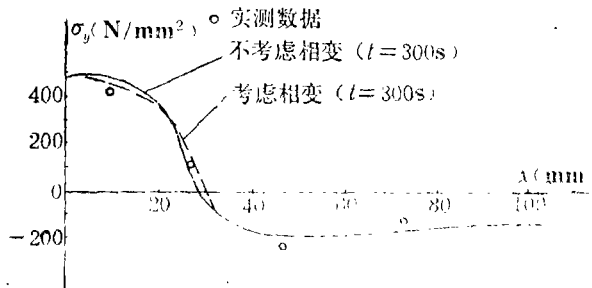


图3 残余应力 $\sigma_y$ 分布

为验证理论的正确性及计算的可靠性, 本文做了如下两项验证性试验: 用热电偶测量焊接加热冷却曲线, 用盲孔法测量焊接残余应力。

图2为点 $P_1(10,0)$ 及 $P_2(35,0)$ 处的加热冷却曲线, 可见焊接热传导表现为局部快速升温, 随后逐渐向外传播, 同一瞬时各点的传热情况很不均匀。这种传热特点导致最终形成的焊接残余应力分布特征, 如图3所示, 焊接中心处沿焊缝方向的应力分量 $\sigma_y$  (由于焊缝收缩受阻而产生的拉应力) 很大, 是造成焊接变形与开裂的重要因素。

根据数值计算结果与实测数据对比分析表明: 本文提供的数值方法不仅节省计算时间, 而且避免了高度非线性可能引起的迭代不收敛等麻烦, 计算结果也较为满意, 因而本文方法用于分析焊接过程的瞬态温度场、瞬态应力场及残余应力场是行之有效的。

### 参 考 文 献

- [1] Wrobel, L. C. and C. A. Brebbia, The dual reciprocity boundary element formulation for non-linear diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 65, 2 (1987).
- [2] Brebbia, C.A., *Progress in Boundary Element Methods*, 2, Pentech Press (1983).
- [3] Yuan Fa-rong and Wu Shang-li, Transient temperature and residual stress fields in axisymmetric metal components after hardening, *Materials Science and Technology*, 1, 10 (1985).
- [4] 陈楚、江建华等, 热弹塑性有限元法求解热加工应力, *上海力学*, 4 (1984).
- [5] 袁发荣等, 《残余应力测试与计算》, 湖南大学出版社 (1987).

## Transient Temperature Fields and Residual Stress Fields of Metallic Materials under Welding

Yuan Fa-rong Sun Hua-dong

(Department of Basic Sciences, Shanxi Institute of  
Mechanical Engineering, Xi'an)

### Abstract

Based on the situation of welding thermal conduction and thermo-elasto-plasticity research, this paper explores some problems in this field. First, the boundary element method for nonlinear problems is improved by linearization of nonlinear problems and used in welding thermal conduction analysis. Second, the thermo-elasto-plastic finite element method is used for the welding stress calculation, in which the phase transformation is considered by the "equivalent linear expansion coefficient method".

The comparison of the calculated results with experimental data shows that the methods provided in this paper are available.

**Key words** weld, thermal conduction, phase transformation, residual stress