应用数学和力学，第12卷第5期（1991年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类非完整力学系统的Lagrange方程*

高普云　　郭仲衡

（湘潭师范学院）（北京大学数学系）

摘　要

本文从变分原理出发，利用[1]的结论：(1)d-δ运算是可交换的；(2)限制虚位移的 Appell-Chetaev条件是多余的，导出一类一阶非线性非完整力学系统的不带乘子的Lagrange方程．这种形式的方程是新的．

关键词　非完整力学　d-δ交换性　Appll-Chetaev 条件　Lagrange 方程

人们总认为：(1)微分运算d和变分运算δ的交换性是观点问题；(2)Appell-Chetaev 条件是"非完整力学史上的一件大事，是非线性非完整系统力学的奠基性成果"[2,3]．我们在[1]证明了：(1)对于一阶非线性非完整系统，d-δ运算可以交换；(2) Appll-Chetaev 条件是对虚位移附加的额外条件，因而是不必要的．根据这两个结论，利用d-δ 运算的交换性并抛弃Appell-Chetaev条件，我们在[1]推导出带乘子的Lagrange 方程．在形式上，这方程和Vacco动力学的方程相同．

现在盛行的一阶非线性非完整系统的不带乘子的运动方程是广义Chaplygin 方程[2]．它的推导基于传统的d-δ交换关系和Appell-Chetaev条件，形式上相当复杂．

本文是[1]的续篇，仍接受上述两个结论，抛弃传统的做法，推导出一类一阶非线性非完整力学系统的不带乘子的Lagrange方程．这类方程是新的，本质上不同于各流行方程．

设$q_1,\cdots,q_n$是系统的广义坐标，系统有k个独立的一阶非线性非完整约束．从[1]可知，这k个约束表为

$$f_i(q_1,\cdots,q_n;\ \dot q_{k+1},\cdots,\dot q_n)=0\qquad(i=1,\cdots,k)$$

本文考虑这样一类约束，它满足

$$\Delta=\frac{D(f_1,\cdots,f_k)}{D(q_1,\cdots,q_k)}\neq 0\tag{1}$$

根据隐函数定理，从约束条件可解出

$$q_i=\varphi_i(q_{k+1},\cdots,q_n;\ \dot q_{k+1},\cdots,\dot q_n)\quad(i=1,\cdots,k)\tag{2}$$

并且有

* 1990年1月19日收到．

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}=-\frac{1}{\Delta}\frac{D(f_1,\cdots,f_i,\cdots,f_k)}{D(q_1,\cdots,q_j,\cdots,q_k)},$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}=-\frac{1}{\Delta}\frac{D(f_1,\cdots,f_i,\cdots,f_k)}{D(q_1,\cdots,\dot q_j,\cdots,q_k)},$$

其中 $i=1,\cdots,k$；$j=k+1,\cdots,n$。(2)告诉我们，可以选取$q_{k+1},\cdots,q_n$为系统的独立变分变量。于是，有

$$\delta q_i=\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j\right)\qquad(i=1,\cdots,k)\tag{3}$$

现在我们用变分原理推导运动方程。变分原理认为：力学系统从时刻t_0到时刻t_1的一切可能运动中，真实运动使Hamilton 作用量$\int_{t_0}^{t_1}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt$取极值，其中$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$是系统的Lagrange函数。于是，在$\delta\mathbf{q}(t_0)=\delta\mathbf{q}(t_1)=0$的条件下，利用$d$-$\delta$运算的可交换性，我们有

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\delta\dot q_i\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)\delta q_i dt=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\mathscr{E}_i(L)\delta q_i dt\tag{4}$$

其中Euler算子

$$\mathscr{E}_i:=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}\tag{5}$$

将(3)代入(4)，又有

$$-\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i(L)\left[\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j\right)\right]+\sum_{j=k+1}^{n}\mathscr{E}_j(L)\delta q_j\right\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\left[\mathscr{E}_j(L)+\sum_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i(L)\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j+\sum_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i(L)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j\right\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\mathscr{E}_j(L)-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathscr{E}_i(L)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}\right)-\mathscr{E}_i(L)\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\right]\right\}\delta q_j dt.$$

变分原理要求，$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt=0$对独立变量的任何变分$\delta q_{k+1},\cdots,\delta q_n$成立，因此有

$$\mathscr{E}_j(L)-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathscr{E}_i(L)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}\right)-\mathscr{E}_i(L)\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\right]=0\quad(j=k+1,\cdots,n)\tag{6}$$

或

$$\mathscr{E}_j(L)-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\frac{d}{dt}+\mathscr{E}(\varphi_i)\right]\mathscr{E}_i(L)=0 \tag{7}$$

这就是满足条件(1)的一阶非线性非完整系统的不带乘子的Lagrange方程。

现在我们具体讨论一个属于这类型的系统——斜面上的雪撬(参见[2]的第380～381页)。系统的广义坐标是$(q_1,q_2,q_3)=(\theta,x,y)$，其中$\theta$是转角，$(x,y)$是刀片与平面接触点的坐标。约束方程

$$f=\mathrm{tg}\theta-\dot{y}/\dot{x}=0 \tag{8}$$

显然满足条件(1)。直接可解出非独立的变分变量

$$\theta=\varphi(\dot{x},\dot{y})=\mathrm{arc\ tg}(\dot{y}/\dot{x}) \tag{9}$$

这里x和y是独立变量。系统的Lagrange函数是

$$L=\frac{1}{2}[(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)^2+k^2\dot{\theta}^2]-g\sin\alpha(y-l\cos\theta) \tag{10}$$

其中 α,g,k,l是常数(不失一般性,已令质量$m=1$)。由于$\partial\varphi/\partial x=\partial\varphi/\partial y=0$，Lagrange 方程是

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{E}_x(L)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\mathscr{E}_\theta(L)\right]=0\\&\mathscr{E}_y(L)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\mathscr{E}_\theta(L)\right]=0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

考虑到

$$\mathscr{E}_x(L)=\frac{d}{dt}(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta),$$

$$\mathscr{E}_y(L)=\frac{d}{dt}(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)+g\sin\alpha,$$

将(11)积分，并将

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}=-\frac{1}{\dot{x}}\sin\theta\cos\theta \qquad (用到(8))$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}=\frac{1}{\dot{x}}\cos^2\theta$$

代入，得

$$\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta+\frac{1}{\dot{x}}\sin\theta\cos\theta\,\mathscr{E}_\theta(L)=C \tag{12}$$

$$\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta+g\sin\alpha t-\frac{1}{\dot{x}}\cos^2\theta\,\mathscr{E}_\theta(L)=D \tag{13}$$

其中 C，D为积分常数。于是(12)$\times\cos\theta+$(13)$\times\sin\theta$给出

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta=H-l\dot{\theta}. \tag{14}$$

这里

$$H:=C\cos\theta+D\sin\theta-g\sin\alpha\sin\theta t \tag{15}$$

将(14)和约束条件(8)$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0$联立，得出

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=(H-l\dot{\theta})\cos\theta \\ \dot{y}=(H-l\dot{\theta})\sin\theta\end{array}\right\} \tag{16}$$

将

$$\mathscr{E}_\theta(L)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{d}{dt}(lH+k^2\dot{\theta})+gl\sin\alpha\sin\theta$$
$$=k^2\ddot{\theta}+l(-C\sin\theta+D\cos\theta-g\sin\alpha\cos\theta t)\dot{\theta}$$

和(16)代入(12)×$(H-l\dot{\theta})$，又得只含θ的二阶线性方程

$$k^2\sin\theta\ddot{\theta}+(C\cos\theta+D\sin\theta-g\sin\alpha\sin\theta t)^2\cos\theta$$
$$-C(C\cos\theta+D\sin\theta-g\sin\alpha\sin\theta t)=0 \tag{17}$$

(16)和(17)就是系统的运动方程．首先积分(17)得θ，代入(16)并积分之，又得x和y．四个初条件：$x(t_0)$，$\dot{x}(t_0)$，$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$以及将它们代入(9)和(16)而得的$\theta(t_0)$，$\dot{\theta}(t_0)$完全确定积分中包含的6个积分常数．

参 考 文 献

[1] Guo Zhong-heng and Gao Pu-yun, On the classic nonholonomic dynamics, *Acta Mech. Sinica*, 5 (1989), 253—259.

[2] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社，北京（1985）.

[3] 梅凤翔，《非完整动力学研究》，北京工业学院出版社，北京（1987）.

Lagrange Equation of a Class of Nonholonomic Systems

Gao Pu-yun

(*Dept. of Math., Xiangtan Normal School, Xiangtan*)

Guo Zhong-heng

(*Dept. of Math., Peking University, Beijing*)

Abstract

Making use of conclusions from[1]:(1) d-δ operations are commutative; (2) the Appell-Chetaev condition restricting virtual displacements is superfluous, the present paper derives the Lagrange equation without multipliers for a class of first order nonlinear nonholonomic dynamical systems by means of variational principle. This kind of equations is new.

Key words nonholonomic dynamics, d-δ commutativity, Appell-Chetaev condition