应用数学和力学，第12卷第5期（1991年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类型变分不等式解的存在性唯一性问题及其对力学中的Signorini问题的应用*

张石生　向淑文

（四川大学数学系）（贵州师大数学系）

摘　要

在本文中，我们研究了一类变分不等式解的存在性和唯一性问题，作为应用，讨论了力学中的著名的 Signorini 问题，改进了这一问题有解的条件．

关键词　变分不等式　KKM映象　Signorini问题

一、引言及预备知识

变分不等式理论是非线性分析的重要组成部分，它不仅在偏微分方程而且在力学、控制论、数理经济、对策理论、非线性规划、优化理论等学科有重要的应用，在变分不等式理论中，双线性型变分不等式又有着重要的意义．

本文的目的是研究下面形式的双线性变分不等式：

$$a(u,\ v-u)+b(u,\ v)-b(u,\ u)\geqslant(A(u),\ v-u)\qquad(\forall v\in M)\qquad(1.1)$$

解的存在性问题．为此，我们首先给出一个抽象的变分不等式定理．借助于这一定理，我们在自反 Banach 空间中得出了变分不等式(1.1)解的存在性唯一性的几个充分条件，改进和发展了 Noor[8]中的主要结果，作为应用，我们还把所得结果用于研究力学中的Signorini问题，改进了这一问题有解的条件．

二、一个抽象的变分不等式问题

引理[Ky Fan]　设E是一 Hausdorfff 拓扑线性空间，X为E中任一子集合，设G：$X\to 2^E$为一KKM映象，且对每一$x\in X$，$G(x)$是E中的非空闭集；且存在某一$x_0\in X$，$G(x_0)$是E中的紧集，则

* 1990年2月24日收到．国家自然科学基金资助项目．

$$\bigcap\{G(x):\ x\in X\}\neq\phi$$

定理1　设X为 Hausdorff 拓扑线性空间E中的非空凸闭集，设φ，ψ：$X\times X\to R$满足条件：

（i）　$\psi(x,\ y)\leqslant\varphi(x,\ y)$　$(\forall x,\ y\in X)$，且$\psi(x,\ x)\geqslant 0$　$(\forall x\in X)$；

（ii）　对每一$x\in X$，$\varphi(x,\ y)$关于y上半连续；

（iii）　对每一$y\in X$，集$\{x\in X:\ \psi(x,\ y)<0\}$是凸的；

（iv）　存在非空紧集$K\subset X$，及$x_0\in K$，使得$\psi(x_0,\ y)<0$　$(\forall y\in X\backslash K)$。

则存在$\bar{y}\in K$，使得

$$\varphi(x,\ \bar{y})\geqslant 0\qquad(\forall x\in X)\tag{2.1}$$

证　任给$x\in X$，令

$$G(x)=\{y\in K:\ \varphi(x,\ y)\geqslant 0\}.$$

如果能证明$\{G(x):\ x\in X\}$具有限交性质，则由K的紧性及$G(x)$的闭性知$\bigcap\limits_{x\in X}G(x)\neq\phi$，因而存在$\bar{y}\in\bigcap\limits_{x\in X}G(x)$，其满足(2.1)，结论即得证。

事实上，对任意的有限集$\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset X$，令

$$C=\mathrm{co}(K\cup\{x_1,\ \cdots,\ x_n\})$$

则C为X中的紧凸子集，对每一$x\in X$，定义

$$A(x)=\{y\in C:\ \psi(x,\ y)\geqslant 0\},\ \bar{A}(x)=\overline{A(x)}$$

$$L(x)=\{y\in K:\ \psi(x,\ y)\geqslant 0\}.$$

易知$L(x)=A(x)\cap K$，且$\overline{L(x)}=\overline{A(x)}\cap K$　$(\forall x\in X)$。

下证$\bar{A}$：$C\to 2^C$是KKM映象。

设不然，则存在某一有限集$\{u_1,\ \cdots,\ u_n\}\subset C$，使得

$$\mathrm{co}\{u_1,\ \cdots,\ u_n\}\not\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A(u_i)},$$

因而存在某一$\bar{x}\in\mathrm{co}\{u_1,\ \cdots,\ u_n\}$，但$\bar{x}\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A(u_i)}$，故对每一$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$\bar{x}\notin A(u_i)$，因而有

$$\psi(u_i,\ \bar{x})<0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

于是由条件(iii)知$\psi(\bar{x},\ \bar{x})<0$。这与条件(i)相矛盾。由此矛盾得证$\bar{A}$是$C\to 2^C$的KKM映象。于是由引理知$\bigcap\limits_{x\in C}\overline{A(x)}\neq\phi$，即存在$y_*\in\bigcap\limits_{x\in C}\overline{A(x)}$。因$x_0\in K\subset C$，因而特别有$y_*\in\overline{A(x_0)}$。于是存在网$\{y_n\}\subset A(x_0)$，使得$y_n\to y_*$。因$\{y_n\}\subset A(x_0)$，故

$$\psi(x_0,\ y_n)\geqslant 0\qquad(\forall n\geqslant 1),$$

于是由条件(iv)得知$\{y_n\}\subset K$，因而$y_*\in K$。从而

$$y_*\in\Big(\bigcap_{x\in C}\overline{A(x)}\Big)\cap K=\bigcap_{x\in C}\big(\overline{A(x)}\cap K\big)$$

$$=\bigcap_{x\in C}\overline{L(x)}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{L(x_i)}\tag{2.2}$$

上式表明集合族$\{\overline{L(x)}:\ x\in X\}$具有限交性质。

另由条件(i)知对每一$x\in X$，$L(x)\subset G(x)$。又因$G(x)$是闭集，故有$\overline{L(x)}\subset G(x)$。于是得知$\{G(x):\ x\in X\}$也具有限交性质，定理的结论得证。 Q.E.D.

注 若定理1中X本身就是紧的，则条件(iv)可以取消，而定理1的结论自然成立.

三、主要结果

在本节中处处假定E是一自反 Banach 空间，E^*为其对偶空间，$\|\cdot\|$为E中的范数，而M为E中的非空凸闭集，$\theta\in M$。

设$a(\cdot,\cdot)$是E上的连续的强制的双线性形，即存在常数$\alpha>0$，和$\beta>0$，使得

$$a(v,\ v)\geqslant\alpha\|v\|^2\qquad(\forall v\in E)\tag{3.1}$$

$$|a(u,\ v)|\leqslant\beta\|u\|\cdot\|v\|\qquad(\forall u,\ v\in E)\tag{3.2}$$

设$b(\cdot,\ \cdot)$: $E\times E\to R$满足条件:

(i) $b(\cdot,\ \cdot)$关于第一变元线性；

(ii) $b(\cdot,\ \cdot)$关于第二变元为下半连续凸函数；

(iii) 存在常数$\gamma\in(0,\ \alpha)$，其中α为(3.1)中出现的常数，使得

$$b(u,\ v)\leqslant\gamma\|u\|\cdot\|v\|\qquad(u,\ \forall v\in H);$$

(iv) 对一切的$u,\ v,\ w\in M$

$$b(u,\ v)-b(u,\ w)\leqslant b(u,\ v-w).$$

注 应指出由条件（iii）和（iv）知$b(u,0)=0$.

设$A:M\to E^*$是一给定的非线性映象。称A是反单调的，如果

$$(Au-Av,u-v)\leqslant 0\qquad(\forall u,v\in M)\tag{3.3}$$

称A是Lipschitz连续的，如果存在常数$\xi>0$，使得

$$\|Au-Av\|\leqslant\xi\|u-v\|\qquad(\forall u,v\in M)\tag{3.4}$$

现在我们给出本文的主要结果.

定理2 设E，M，$a(\cdot,\cdot)$，$b(\cdot,\cdot)$满足前述条件，设$A:M\to E^*$是反单调的半连续映象。

则存在唯一$u\in M$，使得

$$a(u,v-u)+b(u,v)-b(u,u)\geqslant(A(u),v-u)\qquad(\forall v\in M)\tag{3.5}$$

证 (I)先证对每一给定的$\bar u\in M$，必存在唯一的$\bar w\in M$，使得对一切$v\in M$有

$$a(\bar w,v-\bar w)+b(\bar u,v)-b(\bar u,\bar w)\geqslant(A(\bar w),v-\bar w)\tag{3.6}$$

为此，我们作映象φ,ψ: $M\times M\to R$如下:

$$\varphi(v,w)=a(v,v-w)+b(\bar u,v)-b(\bar u,w)-(A(v),v-w),$$

$$\psi(v,w)=a(w,v-w)+b(\bar u,v)-b(\bar u,w)-(A(w),v-w).$$

下证，在弱拓扑意义下，φ，ψ满足定理1中的一切条件.

由$a(\cdot,\cdot)$的强制双线性，及A的反单调性易知定理1中的条件（i）成立.

另由$a(\cdot,\cdot)$的连续双线性知$a(v,v-w)$关于w是弱上半连续的；另由假定$b(u,w)$关于w是凸的和下半连续的，因而$b(u,w)$关于w是弱下半连续的。从而$\varphi(v,w)$关于w是弱上半连续

的，故定理1的条件（ii）满足

另由假设条件知定理1的条件（iii）显然满足。

现证定理 1 的条件（iv）也满足。令

$$\rho=\frac{2}{\alpha}(\|A(0)\|+\gamma\|\bar{u}\|),$$

$$K=\{x\in M:\ \|x\|\leqslant\rho\}.$$

则K是M中的弱紧凸集，且$\theta\in K$。现取$x_0=\theta$，于是对一切$w\in M\setminus K$有

$$\begin{aligned}\psi(\theta,w)&=a(w,-w)+0-b(\bar{u},w)-(A(w),-w)\\&=-a(w,w)-b(\bar{u},w)+(A(0),w)\\&\leqslant-\|w\|(\alpha\|w\|-\gamma\|\bar{u}\|-\|A(0)\|)\\&<-\rho(\|A(0)\|+\gamma\|\bar{u}\|)<0.\end{aligned}$$

因而定理 1 的条件（iv）满足。

故存在$\bar{w}\in M$，使得$\varphi(v,\bar{w})\geqslant0(\forall v\in M)$，即

$$a(v,v-\bar{w})+b(\bar{u},v)-b(\bar{u},\bar{w})\geqslant(A(v),v-\bar{w})\qquad(\forall v\in M)\tag{3.7}$$

设$v\in M$，令$x_t=tv+(1-t)\bar{w}$，$t\in(0,1)$，则$x_t\in M$。在（3.7）中代v以x_t，则有

$$t(a(x_t,v-\bar{w}))+b(\bar{u},x_t)-b(\bar{u},\bar{w})\geqslant t(A(x_t),v-\bar{w})\qquad(\forall v\in M)$$

利用$b(\cdot,\cdot)$关于第二变量的凸性，化简，得

$$t(a(x_t,v-\bar{w})+b(\bar{u},v)-b(\bar{u},\bar{w}))\geqslant t(A(x_t),v-\bar{w}).$$

消去t，并注意$a(\cdot,\cdot)$的连续性及A的半连续性，于上式两端让$t\to0+$取极限得

$$a(\bar{w},v-\bar{w})+b(\bar{u},v)-b(\bar{u},\bar{w})\geqslant(A(\bar{w}),v-\bar{w})\qquad(\forall v\in M).$$

因而$\bar{w}$满足（3.6）。

下证这样的$\bar{w}\in M$是唯一的。

用反证法，设对给定的$\bar{u}\in M$，存在w_1，$w_2\in M$都满足(3.6)，即对一切$v\in M$有

$$a(w_1,v-w_1)+b(\bar{u},v)-b(\bar{u},w_1)\geqslant(A(w_1),v-w_1)\tag{3.8}$$

$$a(w_2,v-w_2)+b(\bar{u},v)-b(\bar{u},w_2)\geqslant(A(w_2),v-w_2)\tag{3.9}$$

现在（3.8）和（3.9）中分别取$v=w_2$和$v=w_1$，然后两式相加，化简得

$$a(w_2-w_1,w_2-w_1)\leqslant(A(w_2)-A(w_1),w_2-w_1).$$

由A的反单调性及$a(\cdot,\cdot)$的强制性得证$w_1=w_2$。

（Ⅱ）现证（3.5）式成立。

定义映象F：$M\to M$如下：

$$F(\bar{u})=\bar{w},$$

其中$\bar{u}$是M中的任给的元，而$\bar{w}$是由（3.6）式所确定的与$\bar{u}$相对应的唯一元。于是对任给的u_1，$u_2\in M$，现在（3.6）中代$\bar{u}$以u_1，代$\bar{w}$以$F(u_1)$，代v以$F(u_2)$，于是有

$$\begin{aligned}&a(F(u_1),F(u_2)-F(u_1))+b(u_1,F(u_2))-b(u_1,F(u_1))\\&\quad\geqslant(A(F(u_1)),F(u_2)-F(u_1)).\end{aligned}\tag{3.10}$$

又在（3.6）中代$\bar{u}$，$\bar{w}$，v分别以u_2，$F(u_2)$和$F(u_1)$得

$$\begin{aligned}&a(F(u_2),F(u_1)-F(u_2))+b(u_2,F(u_1))-b(u_2,F(u_2))\\&\quad\geqslant(A(F(u_2)),\ F(u_1)-F(u_2))\end{aligned}\tag{3.11}$$

上两式相加，整理后得

$$a(F(u_1)-F(u_2),\ F(u_2)-F(u_1))+b(u_2-u_1,\ F(u_1))-b(u_2-u_1,F(u_2))$$

$$\geqslant(A(F(u_1))-A(F(u_2)),\ F(u_2)-F(u_1))\geqslant 0$$

于是由$b(\cdot,\cdot)$所满足的条件（iv）知

$$a(F(u_1)-F(u_2),\ F(u_1)-F(u_2))\leqslant b(u_2-u_1,\ F(u_1)-F(u_2)).$$

故由条件（3.1）及$b(\cdot,\cdot)$所满足的条件（iii）得知

$$\alpha\|F(u_1)-F(u_2)\|^2\leqslant\gamma\|u_2-u_1\|\cdot\|F(u_1)-F(u_2)\|,$$

即 $$\|F(u_1)-F(u_2)\|\leqslant\frac{\gamma}{\alpha}\|u_2-u_1\|.$$

由假设$\gamma<\alpha$，故F：$M\to M$是一压缩映象，故由Banach压缩映象原理，存在$u\in M$，使得$u=F(u)$，即有

$$a(u,v-u)+b(u,v)-b(u,u)\geqslant(A(u),v-u)\qquad(\forall v\in M).$$

上式中u的唯一性是显然的。定理得证。 Q. E. D.

注 定理 2 改进和发展了Noor[8]中的主要结果。

仿照定理 2 的证明，可得下面的结果。

定理3 设E，M，$a(\cdot,\cdot)$，$b(\cdot,\cdot)$与定理2中的相同。设A：$M\to E^*$是Lipschitz 连续的，且设条件（3.1）中的常数α，$b(\cdot,\cdot)$所满足的条件（iii）中的常数γ及（3.4）中的常数ξ满足条件

$$\gamma+\xi<\alpha \tag{3.12}$$

则定理 2 的结论仍成立。

注 定理 3 讨论了一类不具单调性的非线性算子的变分不等式问题。

另外，定理 2 和定理 3 所讨论的问题包含[3,4,5,6,8]中所讨论的问题为特例。

四、对力学中的Signorini 问题的应用

作为前节所得结果的应用，在本节我们讨论力学中的Signorini问题，即求下列问题的解：

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_{ij}(u)_{,j}=f_i(u),\ \sigma_{ij}(u)=E_{ijkl}u_{k,l} & (\text{在}\Omega\text{中})\\ u_i=0 & (\text{在}\Gamma_D\text{上})\\ \sigma_{ijkl}u_{k,l}n_j=t_j & (\text{在}\Gamma_F\text{上})\\ \text{在}\Gamma_C\text{上有} & \\ u\cdot N-s\leqslant 0,\ \sigma_N(u)\leqslant 0,\ \sigma_N(u)(u\cdot N-s)\leqslant 0 & \\ |\sigma_T(u)|<\mu S(\sigma_N(u))\Rightarrow u_T=0 & \\ |\sigma_T(u)|=\mu S(\sigma_N(u))\Rightarrow\text{存在数}\lambda\geqslant 0 & \\ \text{使得}u_T=-\lambda\sigma_T(u) & \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

其中Ω是一有界开区域中的弹性体，并且Lipschitz边界$\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_F\cup\Gamma_C$，其他的符号与力学意义与[8]或[5]中的相同。

问题（4.1）比Oden和Pires[9]中讨论的问题更具一般性。当$f_i(u)=f_i$时，问题(4.1)，即为[9]中的情形。

由[8]，[10]知，问题（4.1）可归结为下形的变分不等式的求解：

$$a(u,v-u)+b(u,v)-b(u,u)\geqslant(f'(u),v-u)\qquad(\forall v\in M) \tag{4.2}$$

其中:

$$a(u,v)=\int_\Omega E_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j}dx,$$

$$f(v)=\int_\Omega\int_0^v f_i(\eta)d\eta dx+\int_{\Gamma_F} t_i\gamma(v)ds,$$

$H=\{v\in H'(\Omega):\ v=0,\ a.e.x\in\Gamma_D\}$为容许位移向量的空间，而$f$是$H$上的（非线性）连续泛函，$f_i$为作用于位移方向的力，$t_i$为$\Gamma_F$上的摩擦力，这里假设$f_i\in L_2(\Omega)$，$t_i\in L_2(\Gamma_F)$.

$$(f'(u),v)=\int_\Omega f(u)vdx,$$

$$b(u,v)=\int_{\Gamma_c}\mu S(\sigma_N(u))|v_T|ds.$$

由定理2，于是可得下列结论:

当非线性泛函f满足下列之一条件时:

(i)　$\int_\Omega(f(u)-f(v))(u-v)dx\leqslant 0$;

(ii)　$\|f(u)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\gamma(\|u\|_{H'})$,

其中$\gamma(t)$为不增函数，$t>0$.

则问题（4.1）有解.

注　上述结论改进了[8]中的关于问题(4.1)的有解条件.

参　考　文　献

[1] Aubin, J., *Applied Functional Analysis*, Wiley, New York (1977).

[2] Shi Mau-hsiang and Kok-keong Tan, A further generalization of Ky Fan's minimax inequality and its applications, *Studia Math.*, V. LXXVII (1984).

[3] Baiocchi, C. and A. Capelo, *Variational and Quasi-Variational Inequalities*, Wiley, New York/London (1984).

[4] Crank, T., *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford Univ. Press (1984).

[5] Kikuchi, N. and J. T. Oden, Contact problems in elasticity, *Soc. Indus. Appl. Math.*, Philadephia (1987).

[6] Noor, M. Aslam, Finite element analysis of a class of contact, *C. R. Math. Rep Acad. Sci.*, Canada, **6** (1984), 249—276.

[7] Noor, M. Aslam, Variational inequalities related with a Signorini problem, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci.*, Canada, **7** (1985), 267—272.

[8] Noor, M. Aslam, On a class of variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **128** (1987), 136—156.

[9] Oden J. and E. Pires, Contact problems in elastostatics with non-local friction law, TLCoM/8 Report 81—12, Univ. of Texas, Austin (1981).

[10] Noor, M.A. and J. R. Whiteman, Error bounds for the finite element solutions of mildly nonlinear elliptic boundary value problems, *Numer. Math.*, **26** (1976), 107—116.

On the Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of Variational Inequalities with Applications to the Signorini Problem in Mechanics

Zhang Shi-sheng

(*Sichuan University, Chengdu*)

Xiang Shu-wen

(*Guizhou Normal University, Guiyang*)

Abstract

In this paper, we introduce a new unified and general class of variational inequalities, and show some existence and uniqueness results of solutions for this kind of variational inequalities. As an application, we utilize the results presented in this paper to study the Signorini problem in mechanics.

Key words Variational inequality, KKM mapping, signorini problem