应用数学和力学，第12卷第5期（1991年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Perzyna粘塑性模型的参变量变分原理*

曾 攀　钟万勰

（大连理工大学工程力学研究所，1989年11月13日收）

摘　要

Perzyna模型是粘塑性本构关系的主要形式之一，本文给出该模型的参变量变分原理，该原理将原问题化为求解带约束条件的泛函极值，其约束条件就是由粘塑性本构关系推导出的系统状态方程，所讨论的问题其塑性流动不受Drucker假定的限制，文中给出原理的证明，并研究弹塑性蠕变问题．

关键词　粘塑性　参变量变分原理　蠕变

一、粘塑性本构关系

对于不同物理环境中的材料，会呈现不同的性质，固体材料在高应变率或高温条件下，往往同时出现弹性、粘性和塑性性质，岩土类材料一般也具有这种性质，需要用弹-粘塑性模型来描述这种现象，目前，在实验基础上已建立的这类理论大致有过应力模型理论、粘塑性模型理论、拟线性本构关系理论以及基于位错动力学或非平衡过程热力学的内变量理论等[1][2]．

Hohenemser和Prager(1932)给出的模型为[3]：

$$2\eta\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}=2K\langle F\rangle\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.1}$$

其中η为粘性系数，K为纯剪屈服应力，$\langle F\rangle$定义为

$$\langle F\rangle=\begin{cases}0 & (\text{当}F\leqslant 0)\\ F & (\text{当}F>0)\end{cases} \tag{1.2}$$

F为静态屈服函数，并取为：

$$F=\sqrt{J_2}/K-1 \tag{1.3}$$

这里J_2是应力偏量的第二不变量．

P．Perzyna对上述H-P方程进行推广，有以下Perzyna方程[4]

* 本文受国家博士后基金资助．

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2G}\dot{S}_{ij}+\frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}+\gamma\langle\phi(F)\rangle\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.4}$$

其中

$$\langle\phi(F)\rangle=\begin{cases}0 & (\text{当}F\leqslant 0)\\ \phi(F) & (\text{当}F>0)\end{cases} \tag{1.5}$$

ϕ一般为自变量F的非线性函数，$\phi(F)$具体形式应根据动态实验结果给出，F为静力屈服函数。

总应变由两个部分组成：

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{e}+\varepsilon_{ij}^{vp} \tag{1.6}$$

而应变率的非弹性部分为：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}=\gamma\phi(F)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.7}$$

$f(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{p})$是依赖于应力状态和塑性应变$\varepsilon_{ij}^{p}$的函数，表达了弹塑性强化材料的动力屈服准则。

Perzyna给出下列形式的$\phi(F)$函数近似表达式：

$$\phi(F)=\sum_{a=1}^{n}A_a[\exp F^a-1] \tag{1.8}$$

$$\phi(F)=\sum_{a=1}^{n}B_aF^a \tag{1.9}$$

并且，一般情况下都有（由实验）[5]

$$\phi(F)>0 \tag{1.10}$$

由此可以看出Perzyna方程的特点，$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$具有过应力模型的性质，可同时考虑强化效应与应变率效应，还具有塑性势理论性质。

二、粘塑性变分原理

以上粘塑性问题除本构关系外其余的与弹塑性问题基本方程完全相同。

① 平衡方程：$d\sigma_{ij,j}+db_i=0$　　（在Ω内）　　(2.1)

② 应变位移关系：$2d\varepsilon_{ij}=du_{i,j}+du_{j,i}$　　(2.2)

③ 本构关系：$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^{e}$　　(2.3)

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{e}+d\varepsilon_{ij}^{vp} \tag{2.4}$$

Perzyna方程：$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}=\gamma\langle\phi(F)\rangle\partial Q/\partial\sigma_{ij}$　　(2.5)

$$\langle\phi(F)\rangle=\begin{cases}0 & (\text{当}F\leqslant 0)\\ \phi(F) & (\text{当}F>0)\end{cases} \tag{2.6}$$

④ 边界条件：$d\sigma_{ij}n_j=dT$　　（在S_1上）　　(2.7)

$du_i=d\bar{u}_i$　　（在S_2上）　　(2.8)

以上$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$为应力应变增量，$d\varepsilon_{ij}^{vp}$为粘塑性应变增量，F是静力屈服函数，Q是塑性势函数，γ为粘性系数，$\phi(F)$为自变量的非线性函数，由动态实验结果给出。

如果，按Drucker假定，则有$F=Q$，而$F\neq Q$为非关连的塑性流动。

下面推导本构关系 (2.3)～(2.6) 的统一表达式即状态方程．可得

将屈服函数F作一阶展开，并将 (2.3)、(2.4) 代入（以下的$d\varepsilon_{ij}^{p}$实际上就是$d\varepsilon_{ij}^{vp}$）

$$
\begin{aligned}
F&=F_0+dF\\
&=F_0+\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}d\varepsilon_{ij}^{p}\\
&=F_0+D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}+\left[\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}\right.\\
&\quad\left.-D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{kl}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}\right]\gamma\langle\phi(F)\rangle dt
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

设 $\lambda=\langle\phi(F)\rangle$

则(2.5)、(2.6)式变为

$$
d\varepsilon^{vp}=\gamma\lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}dt \tag{2.10}
$$

$$
\left\{\begin{array}{ll}\lambda=0 & (\text{当}F\leqslant 0)\\ \lambda=\phi(F)>0 & (\text{当}F>0)\end{array}\right. \tag{2.11}
$$

令 $$F^*=F-\phi^{-1}(\lambda) \tag{2.12}$$

其中$\phi^{-1}(\lambda)$是$\phi(F)$的反函数，

(2.11)式可重写为

$$
\left\{\begin{array}{ll}\lambda=0 & (\text{当}F^*<0)\\ \lambda>0 & (\text{当}F^*=0)\end{array}\right. \tag{2.13}
$$

再在F^*中引入一补偿因子ν，(2.13)式可写为

$$
\left.\begin{array}{l}F^*(d\varepsilon_{ij},\ dt,\ \lambda)+\nu=0\\ \lambda\cdot\nu=0,\ \lambda\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0\end{array}\right\} \tag{2.14}
$$

其中F^*为 (2.12) 式，并将$\phi^{-1}(\lambda)$作级数展开，即

$$
\begin{aligned}
F^*(d\varepsilon_{ij},dt,\lambda)&=F_0+D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}+\left[\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}\right.\\
&\quad\left.-D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{kl}}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}\right]\cdot\gamma\cdot\lambda\cdot dt-\left[\phi^{-1}(0)+\frac{d\phi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\cdot\lambda\right]
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

(2.14)就是反映粘塑性本构关系的状态方程，下面应用参变量λ构造一个总势能泛函：

$$
\begin{aligned}
\Pi&=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}-\gamma\cdot\lambda\cdot D_{ijkl}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}dt\,d\varepsilon_{kl}\right\}d\Omega\\
&\quad-\left[\int_\Omega db_i du_i d\Omega+\int_{S1}dT_i du_i dS\right]
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

参变量势能变分原理为：对于任一时刻t，就时间增量dt范围内，在所有满足应变位移关系 (2.2) 式和几何边界条件 (2.8) 的可能位移增量场中，真实解使泛函 (2.16) 在状态方程 (2.14) 的控制下取总体最小，其中$du_i(d\varepsilon_{ij})$是自变量函数，λ是不参加变分的参变量

(物理意义是粘塑性流动比例因子)，这是现代变分法可以不对参变量求变分的主要思想[6][7]。

下面给出简要的证明，在时刻$[t, t+dt]$，由于系统依赖于du_i(或$d\varepsilon_{ij}$)，则

$$\delta\Pi=\int_\Omega\left[D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})-\gamma\cdot\lambda\cdot D_{ijkl}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}dt\delta(d\varepsilon_{ij})\right]d\Omega$$
$$-\left[\int_\Omega db_i\delta(du_i)d\Omega+\int_{S1}d\bar{T}_i\delta(du_i)dS\right] \tag{2.17}$$

将 (2.3) 变为：

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}(d\varepsilon_{ij}-d\varepsilon_{ij}^{vp}) \tag{2.18}$$

并且　$d\varepsilon_{ij}^{vp}=\gamma\lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}dt$

代入 (2.17) 式的第一项积分：

$$\int_\Omega D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega=\int_\Omega\left[d\sigma_{ij}+\gamma\cdot\lambda\cdot\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}dtD_{ijkl}\right]\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega \tag{2.19}$$

将 (2.19) 代入 (2.17)，再应用Green定理：

$$\delta\Pi=\int_\Omega d\sigma_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega-\int_\Omega db_i\delta(du_i)d\Omega-\int_{S1}d\bar{T}_i\delta(du_i)dS$$
$$=\int_{S1}d\sigma_{ij}n_j\delta(du_i)dS-\int_\Omega d\sigma_{ij,j}\delta(du_i)d\Omega$$
$$-\int_\Omega db_i\delta(du_i)d\Omega-\int_{S1}d\bar{T}_i\delta(du_i)dS$$
$$=-\int_\Omega\left[d\sigma_{ij,j}+db_i\right]\delta(du_i)d\Omega+\int_{S1}[d\sigma_{ij}n_j-d\bar{T}_i]\delta(du_i)dS \tag{2.20}$$

令$\delta\Pi=0$，则有

$$d\sigma_{ij,j}+db_i=0\qquad(在\Omega内) \tag{2.21}$$
$$d\sigma_{ij}n_j=d\bar{T}_i\qquad(在S_1上) \tag{2.22}$$

这就是平衡方程和应力边界条件，进一步$\delta^2\Pi>0$，所以由$\delta\Pi=0$导出的状态变量du_i(或$d\varepsilon_{ij}$) 使Π取总体最小值。

上述原理对材料服从关连流动或非关连流动法则皆适用。

三、弹 塑 性 蠕 变

有些情况下，材料的粘塑性表现为蠕变，如在高温情况下甚至是高强度钢，即使应力值大大地低于屈服极限，也将含有一个依赖时间的应变，在核反应堆部件、透平机械部件等强度设计中必须考虑蠕变现象。

这时的应力应变关系：

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl}-d\varepsilon_{kl}^c-d\varepsilon^T) \tag{3.1}$$

其中温度应变：

$$d\varepsilon^T=\alpha dT\qquad(\alpha为温度系数，dT为温度变化) \tag{3.2}$$

蠕变应变增量：

$$d\varepsilon^{c}_{ij}=d\bar{\varepsilon}^{c}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}} \tag{3.3}$$

这里的$d\bar{\varepsilon}^{c}$为等效蠕变应变增量（由蠕变产生的塑性流动），它可以通过单向拉伸的蠕变试验获得，一般有（对高温材料）蠕变定律[8]：

$$\bar{\varepsilon}^{c}=A(1-\exp[-st])+Bt \tag{3.4}$$

其中A、B，S为有关材料参数（随应力与温度而变化）

则 $$d\bar{\varepsilon}^{c}=(SA\exp[-st]+B)dt \tag{3.5}$$

按照前面处理粘塑性的方法，同样可构造系统的总势能泛函：

$$\Pi=\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}-(SA\exp[-st]+B)dt\cdot D_{ijkl}\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\right.$$

$$\left.-\alpha dT\cdot D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}\right\}d\Omega-\left[\int_{\Omega}\alpha b_i du_i d\Omega+\int_{S_1}dT_i du_i dS\right] \tag{3.6}$$

那么在满足应变位移关系（2.2）和几何边界条件（2.8）的基础求泛函（3.6）的极值则可得到蠕变问题的解答。

在该问题中，其塑性蠕变包含在蠕变定律之中，因而没有状态控制方程(2.14)。

参 考 文 献

[1] Malvern, L. E., Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, *Q. Appl. Math.*, 8 (1951).

[2] 王仁、黄克智、朱兆祥，《塑性力学进展》，中国铁道出版社，北京（1988）.

[3] Hohenemser, K. and W. Prager, Über die Ansätz der Mechanik isotroper Kontimua, *ZAMM*, 12 (1932).

[4] Perzyna, P., Fundamental problem in visco-plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966).

[5] 杨绪灿、杨桂通、徐秉业，《粘塑性力学概论》，中国铁道出版社，北京（1985）.

[6] Zhong, W. X. and R. L. Zhang, The parametric variational principle for elastoplasticity, *Acta Mechanica Sinica*, 4, 2 (1988).

[7] 张柔雷、钟万勰，参变量最小势能原理的有限元参数二次规划解，计算结构力学及其应用，4, 1 (1987).

[8] 谢贻权、何福保，《弹性和塑性力学中的有限单元法》，机械工业出版社，北京（1981）.

The Parametric Variational Principle for Perzyna Model in Viscoplasticity

Zeng Pan Zhong Wan-xie

(*Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian*)

Abstract

This paper presents the parametric variational principle for Perzyna model which is one of the mainconstitutive relations of viscoplasticity. The principle, by which the potential energy function is minimized under a constrained condition transformed by the constitutive relations of viscoplasticity, is free from the bound of Drucker's postulate of plastic flow and consequently suitable for solving the nonassociated plastic flow problems. Furthermore, the paper has proven the presented principle and discussed the creep problem.

Key words viscoplasticity, parametric variational principle, creep