

# 经过修正的平面 Couette 流的 非线性稳定性研究

周 哲 玮

(上海市应用数学和力学研究所, 1990年6月10日收到)

## 摘 要

本文讨论了经过修正的平面 Couette 流在二维扰动下的非线性稳定性性质, 并同经过修正的平面 Poiseuille 流的非线性稳定性性质进行了比较。计算结果表明, 对于有限振幅的扰动, 平面 Couette 流比平面 Poiseuille 流更不稳定。

**关键词** 修正的平面 Couette 流 修正的平面 Poiseuille 流 非线性稳定性

## 一、引 言

在关于流动稳定性的实验中, 观察到平面 Poiseuille 流动和平面 Couette 流动在雷诺数为 1000 左右就变得不稳定了。但在流动稳定性分析中, 这二种流动却属于不同的类型, 平面 Poiseuille 流动的失稳是属于亚临界类型的, 而平面 Couette 流动同圆管 Poiseuille 流动一样, 是属于无穷远分岔型的<sup>[1], [4]</sup>。由于后两种流动在线性稳定性分析中无法得出临界雷诺数, 给非线性稳定性分析也带来了很大困难。

作者在文[1]中提出了经过修正的层流流动的流动稳定性理论, 并给出了一种反映扰动之间非线性作用的平均速度的修正剖面, 利用这种剖面, 讨论了平行剪切流的稳定性问题。在线性稳定性分析中, 文[1]应用统一的方法, 讨论了平面 Poiseuille 流、平面 Couette 流和圆管 Poiseuille 流的失稳问题, 得出了在背景扰动的干扰下, 他们都可能线性失稳的结论。文[1]还讨论了平面 Poiseuille 流和平面 Couette 流的非线性稳定性问题, 从计算结果可知, 这两种流动的非线性稳定性性质是有差别的。

本文进一步讨论了平面 Couette 流的非线性稳定性问题, 发现其非线性稳定性性质虽与平面 Poiseuille 流不同, 但有很多可以比较之处, 因此本文详细讨论了这两种流动中扰动发展的异同之处。

\* 钱伟长推荐, 本文得到上海工业大学科学基金的资助。

## 二、扰动振幅的非线性发展方程

应用周恒教授的人为中性方法<sup>[5]</sup>，可得出扰动振幅的非线性发展方程。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & (A_{11}\varepsilon + A_{21}\varepsilon^2 + A_{31}\varepsilon^3 + A_{41}\varepsilon^4 + A_{41}\varepsilon^4)a \\ & + (A_{23}\varepsilon^2 + A_{33}\varepsilon^3 + A_{43}\varepsilon^4)a^3 + A_{45}\varepsilon^4a^5 \end{aligned} \quad (2.1)$$

或可写成

$$\begin{aligned} \frac{d(\varepsilon a)}{dt} = & (A_{11}\varepsilon + A_{21}\varepsilon^2 + A_{31}\varepsilon^3 + A_{41}\varepsilon^4)(\varepsilon a) \\ & + (A_{23} + A_{33}\varepsilon + A_{43}\varepsilon^2)(\varepsilon a)^3 + A_{45}(\varepsilon a)^5 \\ = & C_1(\varepsilon a) + C_2(\varepsilon a)^3 + C_3(\varepsilon a)^5 = f(\varepsilon a) \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  都是由计算确定的常数,  $C_1$  即为扰动振幅的线性增长率  $\alpha C_1$ 。

当  $d(\varepsilon a)/dt=0$ , 我们即得到扰动振幅的临界值  $(\varepsilon a)_{cr}$ 。考虑到  $(\varepsilon a)$  的五次项后,  $f(\varepsilon a)=0$  实际成为  $(\varepsilon a)^2$  的二次代数方程, 因此一般情况下有二个实根 (或相等的二个实根), 这里我们不考虑复根和负的实根。

$f(\varepsilon a)$  可有如图1所示的两种情况, 箭头所示为扰动振幅  $\varepsilon a$  随时间发展的情况。

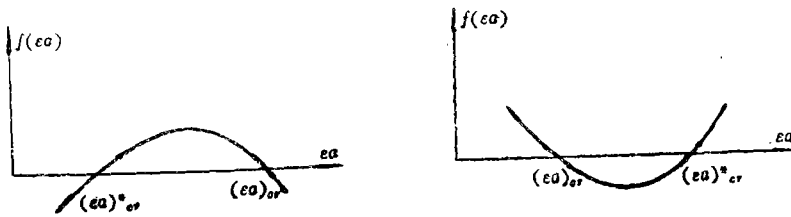


图1  $f(\varepsilon a)$  示意图

即当  $\left. \frac{df(\varepsilon a)}{d(\varepsilon a)} \right|_{cr} > 0$  时, 所得到的振幅临界值为振幅阈值, 扰动振幅一超过此值就会发展起来; 而当  $\left. \frac{df(\varepsilon a)}{d(\varepsilon a)} \right|_{cr} < 0$  时, 所得到的振幅临界值是振幅平衡值, 扰动振幅在此值附近则会趋于此值。我们用“•”号表示振幅阈值。

又因为

$$\frac{df(\varepsilon a)}{d(\varepsilon a)} = C_1 + 3C_2(\varepsilon a)^2 + 5C_3(\varepsilon a)^4 \quad (2.3)$$

当得到二个不等的正实根时, 如  $C_3 > 0$ , 较大的根是阈值, 较小的根是平衡值;  $C_3 < 0$  时情况则相反, 当只得到一个正实根时, 就必须计算(2.3)式的值。

## 三、线性增长率为零时, 扰动的非线性发展特性

在文[1]中, 我们曾经变动修正速度剖面的幅值, 使流动处于亚临界或超临界状态, 以研究非线性发展方程(2.3)式各项系数的变化, 这里用同样的方法来处理平面 Couette 流问题, 同时与相应情况下的平面 Poiseuille 流的性质进行比较。

首先, 我们选择某一修正剖面的幅值, 使平面Couette流和平面Poiseuille流中扰动的线性增长率为零, 此时 $C_1=0$ 。在各种参数情况下两种流动的计算结果见表1。

表 1 扰动线性增长率为0情况下的非线性稳定性质

$R$	流 动	$\delta$	$C_2$	$C_3$	$(ca)_{cr}$	$(ca)_{cr}^*$
1500	Couette	0.009823	-3976	$0.2239 \times 10^{10}$	—	$1.332 \times 10^{-3}$
	Poiseuille	0.006649	-17.68	8339	—	$4.604 \times 10^{-2}$
1800	Couette	0.008390	-2712	$0.6491 \times 10^9$	—	$2.044 \times 10^{-3}$
	Poiseuille	0.005910	-8.771	-19290	—	—
2100	Couette	0.00745	-2336	$0.4013 \times 10^9$	—	$2.413 \times 10^{-3}$
	Poiseuille	0.005627	2.313	-68630	$5.806 \times 10^{-3}$	—
2500	Couette	0.006675	-2154	$0.3178 \times 10^9$	—	$2.603 \times 10^{-3}$
	Poiseuille	0.005701	19.99	-168100	$1.091 \times 10^{-2}$	—

从表中可以看出, 欲使扰动振幅的线性增长率为零, 须对平面Couette流作出较大的修正, 说明对于小扰动, 平面Couette流比平面Poiseuille流更稳定。然而经过修正之后, 虽然扰动线性增长率为零, 非线性发展却出现差别。平面Couette流中几种雷诺数下都有 $10^{-3}$ 数量级的振幅阈值, 而平面Poiseuille流在 $R=1500$ , 速度剖面的修正程度较大时, 有 $10^{-2}$ 数量级的振幅阈值, 在雷诺数增大, 修正程度减小时, 只出现平衡值甚至衰减下去。这说明扰动的非线性发展更多地取决于速度剖面的修正程度而不是取决于粘性作用的影响。

#### 四、线性增长非中性情况下, 扰动的非线性发展特性

上一节的计算结果已显示出一种倾向, 即两种流动中扰动的非线性发展与修正剖面的幅值关系较大。这里我们进一步把相同雷诺数和相同修正程度下两种流动的计算结果作一个比较。我们以平面Couette流为对象, 变动速度剖面的修正程度, 使之处于亚临界状态临和超界状态来进行计算, 再计算相同参数下平面Poiseuille流的结果。

我们从计算结果中可以看出, 在雷诺数比较低的时候( $R=1500$ ), 平面Poiseuille流中无论是扰动的线性增长率还是扰动的非线性发展都比平面Couette流更不稳定。但当雷诺数增大时( $R \geq 1800$ ), 情况有所变化, 虽然扰动的线性增长率在平面Poiseuille流中都比在平面Couette流中大, 但扰动振幅的阈值在平面Poiseuille流中也比在平面Couette流中大, 这是因为对于平面Poiseuille流, 扰动振幅非线性发展方程五次项的系数 $C_3$ 是小于零的, 而在平面Couette流中,  $C_3$ 大于零, 所以对于有限振幅的扰动, 平面Couette流比平面Poiseuille流更不稳定。

#### 五、讨 论

通过对平面Couette流非线性稳定性的计算, 我们得出了对于有限振幅的扰动, 平面Couette流比平面Poiseuille流更为不稳定的结果。这说明小扰动线性增长率的大小并不能最终说明流动的稳定性性质, 还要看非线性作用是使流动更不稳定( $C_2, C_3 > 0$ ) 还是更稳定。

表 2 扰动线性增长非中性情况下的非线性稳定性质

$$\alpha=1, 1$$

$R$	$\delta$	流 动	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$(\varepsilon a)$	$(\varepsilon a)^*$
1500	0.0098	Couette	$-0.1470 \times 10^{-3}$	-3974	$0.2224 \times 10^{10}$	—	$1.350 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	0.01052	-5.296	10804	—	—
	0.00984	Couette	$0.1127 \times 10^{-3}$	-3977	$0.2251 \times 10^{10}$	$1.697 \times 10^{-4}$	$1.318 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	0.01065	-4699	10848	—	—
1800	0.00837	Couette	$-0.1495 \times 10^{-3}$	-2711	$0.6477 \times 10^9$	—	$2.059 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	$0.8499 \times 10^{-2}$	-2.837	-12715	$5.473 \times 10^{-2}$	$2.671 \times 10^{-2}$
	0.00841	Couette	$0.1549 \times 10^{-3}$	-2713	$0.6506 \times 10^9$	$2.406 \times 10^{-4}$	$2.027 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	$0.8534 \times 10^{-2}$	-2.188	-12619	$6.282 \times 10^{-2}$	$2.729 \times 10^{-2}$
2100	0.00745	Couette	$-0.2157 \times 10^{-3}$	-2335	$0.4010 \times 10^9$	—	$2.432 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	$0.6169 \times 10^{-2}$	-1.089	-5100	$7.526 \times 10^{-2}$	$1.837 \times 10^{-2}$
	0.00749	Couette	$0.1262 \times 10^{-3}$	-2336	$0.4014 \times 10^9$	$2.336 \times 10^{-4}$	$2.401 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	$0.6306 \times 10^{-2}$	-0.6415	-50849	$9.915 \times 10^{-2}$	$1.860 \times 10^{-2}$
2500	0.00663	Couette	$-0.4361 \times 10^{-3}$	-2152	$0.3183 \times 10^9$	—	$2.638 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	$0.2881 \times 10^{-2}$	10.15	-66065	$1.730 \times 10^{-2}$	$1.685 \times 10^{-2}$
	0.00671	Couette	$0.3300 \times 10^{-3}$	-2155	$0.3174 \times 10^9$	$3.959 \times 10^{-4}$	$2.576 \times 10^{-3}$
		Poiseuille	$0.3138 \times 10^{-2}$	9.743	-73928	$1.680 \times 10^{-2}$	$1.795 \times 10^{-2}$

( $C_2, C_3 < 0$ )。在这两种不同的流动中, 我们的计算结果给出了线性增长率大而有限振幅门槛值也大的结果, 在同一种流动中, 是否也会出现这种情况是值得研究的。过去在进行非线性计算时, 都是以线性稳定性分析中衰减率最低的模态为基本模态, 看来在寻找最不稳定的情况时, 可以尝试一下扩大基准模态的使用范围。

在文[1]中, 我们曾指出, 修正剖面出现拐点是使流动变得更不稳定的原因, 也就是说流动失稳是具有无粘性失稳的特征的。从本文的计算结果也可看到, 雷诺数较小时( $R=1500$ ), 线性增长率低, 有限振幅临界值也大, 扰动的线性和非线性稳定性的趋势是一致的。而当雷诺数较大时, 也即粘性的影响较小时, 修正剖面拐点的作用占了主导地位。因为平面Poiseuille流平均速度剖面原来具有曲率 $\bar{u}''=2$ , 而平面Couette流 $\bar{u}''=0$ , 可以设想, 正是修正剖面曲率的剧烈变化和拐点的出现使平面Couette流具有更为明显的无粘性失稳的特征, 使其有限振幅扰动的门槛值更小。

## 参 考 文 献

- [1] 周哲玮, 经过修正的层流流动的流动稳定性问题, 上海工业大学博士论文(1987年7月), 部分发表于应用数学和力学, 10, 2、3、4(1989)。
- [2] Kao, T.W. and C. Park, Experimental investigations of the stability of channel flow, Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel, *J. Fluid Mech.*, 43 (1970), 145.

- [ 3 ] Reichardt, H., Gesetzmässigkeiten der geradlinigen turbulenten Couette Strömung, *Mitteilungen aus den Max-Planck Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt*, 22 (1959).
- [ 4 ] Rosenblat S. and S. H. Davis, Bifurcation from infinity, *SIAM J. Appl. Math.*, 37, 1 (1979), 1.
- [ 5 ] Zhou, H., On the nonlinear theory of plane Poiseuille flow in the subcritical range, *Proc. R. Soc. London*, A381 (1982), 407.

## On the Nonlinear Stability Behaviour of Distorted Plane Couette Flow

Zhou Zhe-wei

(*Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied  
Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

### Abstract

This paper discusses the nonlinear stability behaviour of distorted plane Couette flow to 2-dimensional disturbances, and compares it with that of distorted plane Poiseuille flow. The results show that plane Couette flow is more unstable than plane Poiseuille flow to finite-amplitude disturbances.

**Key words** distorted plane Couette flow, distorted plane Poiseuille flow,  
nonlinear stability behaviour