应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

连续介质基本主标架旋率的绝对表示*

郭仲衡　梁浩云

（北京大学数学系）（中山大学力学系）

摘　要

本文提供一个一般性的方法，给出至今仅局限于主轴表示的连续介质各种旋率的抽象表达式，从而扩大了各种旋率进一步应用的可能性．

关键词　旋率　主轴表示　抽象表示

连续介质在每个典型点有三个与变形相关的基本主标架：Lagrange 标架 $\{\mathbf{N}_i\}$，Euler 标架 $\{\mathbf{n}_i\}$ 和伸缩率标架 $\{\mathbf{v}_i\}$（参阅[1～5]）．它们都是单位正交向量组，分别代表右伸缩张量U，左伸缩张量V和伸缩率张量D的主方向．这三个张量由变形梯度F或速度梯度L表达：

$$\mathbf{U}=(\mathbf{F}^*\mathbf{F})^{\frac{1}{2}},\quad \mathbf{V}=(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)^{\frac{1}{2}},\quad \mathbf{D}=(\mathbf{L}+\mathbf{L}^*)/2,$$

并分别在各自的主标架下有谱分解：

$$\mathbf{U}=\sum_i \lambda_i \mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i,\quad \mathbf{V}=\sum_i \lambda_i \mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i,\quad \mathbf{D}=\sum_i d_i \mathbf{v}_i\otimes\mathbf{v}_i \tag{1}$$

这里“*”表示转置．U和V出现在F的极分解中：

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R} \tag{2}$$

其中　R是转动张量．在运动过程中，各标架相对于不动的背景标架 $\{\mathbf{e}_i\}$ 转动，它们的当前方位可以看作是 $\{\mathbf{e}_i\}$ 方位转动的结果：

$$\mathbf{N}_i=\mathbf{R}^L\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{n}_i=\mathbf{R}^E\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{v}_i=\mathbf{R}^D\mathbf{e}_i \tag{3}$$

其中　$\mathbf{R}^L$，$\mathbf{R}^E$和$\mathbf{R}^D$是相应的转动张量．将(3)各式物质微商，有

$$\dot{\mathbf{N}}_i=\mathbf{\Omega}^L\mathbf{N}_i,\quad \dot{\mathbf{n}}_i=\mathbf{\Omega}^E\mathbf{n}_i,\quad \dot{\mathbf{v}}_i=\mathbf{\Omega}^D\mathbf{v}_i \tag{4}$$

反称张量

$$\mathbf{\Omega}^L:=\dot{\mathbf{R}}^L\mathbf{R}^{L*},\quad \mathbf{\Omega}^E:=\dot{\mathbf{R}}^E\mathbf{R}^{E*},\quad \mathbf{\Omega}^D:=\dot{\mathbf{R}}^D\mathbf{R}^{D*} \tag{5}$$

是标架 $\{\mathbf{N}_i\}$，$\{\mathbf{n}_i\}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}$ 相对于 $\{\mathbf{e}_i\}$ 转动的绝对旋率，分别称为Lagrange旋率，Euler 旋率和伸缩标架旋率．

长期以来，人们认为速度梯度的反称部分，即自旋 $\mathbf{W}=(\mathbf{L}-\mathbf{L}^*)/2$ 是 $\{\mathbf{v}_i\}$ 的绝对旋率．现已证实，这是一种误解（参阅[6，7]）．

Hill的主轴法[1]成功地取得一系列别的方法难以达到的结果．至今，我们只有上述三种旋率的主轴表示，例如$\mathbf{\Omega}^L$和$\mathbf{\Omega}^E$见[8]的（3.11）式；$\mathbf{\Omega}^D$见[6，7]．这种状况有碍于这些旋率的进一步应用，例如用以构造客观性应力率，因为：(i)对每一具体问题，以主轴方向为坐标曲线方向的坐标系在问题解决以前是未知的；(ii)在理论研究中常常要求将各量表成与标架无关的抽象记法．

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅰ)论文．1989年12月11日收到．

本文要表明，这些旋率均满足某一类型的张量方程，可以分别用相应的U及其物质导数$\dot{\mathbf{U}}$，V及$\dot{\mathbf{V}}$和D及$\dot{\mathbf{D}}$自然地抽象表出。

将(1)$_1$物质微商，并利用(4)，有

$$\dot{\mathbf{U}}=\sum_i[\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i(\dot{\mathbf{N}}_i\otimes\mathbf{N}_i+\mathbf{N}_i\otimes\dot{\mathbf{N}}_i)]$$

$$=\sum_i[\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i(\Omega^L\mathbf{N}_i)\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes(\Omega^L\mathbf{N}_i)]$$

$$=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\Omega^L\Big(\sum_i\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i\Big)-\Big(\sum_i\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i\Big)\Omega^L=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\Omega^L\mathbf{U}-\mathbf{U}\Omega^L.$$

因此，Ω^L满足张量方程

$$\mathbf{U}\Omega^L-\Omega^L\mathbf{U}=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\dot{\mathbf{U}} \tag{6}$$

类似地，Ω^E和Ω^D分别满足方程

$$\mathbf{V}\Omega^E-\Omega^E\mathbf{V}=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i-\dot{\mathbf{V}} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}\Omega^D-\Omega^D\mathbf{D}=\sum_i\dot{d}_i\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{v}_i-\dot{\mathbf{D}}. \tag{8}$$

这些方程均属同一类型．今以$\Omega^L=\omega_{ij}\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_j$为例进行分析．方程(6)的右端是对称张量，记为

$$\mathbf{B}(\mathbf{U},\ \dot{\mathbf{U}})=b_{ij}\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_j\equiv\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\dot{\mathbf{U}} \tag{9}$$

先一般地讨论具有任意对称右端B的方程(6)．我们将看到，B要满足一定的，(6)可解的必要条件．从(6)容易看出，反称张量Ω^L是U和B的各向同性张量函数，且关于B是线性的．根据张量函数表示定理[9]，这些性质使Ω^L必具有抽象形式：

$$\Omega^L(\mathbf{U},\ \mathbf{B})=\alpha_1(\mathbf{UB}-\mathbf{BU})+\alpha_2(\mathbf{U}^2\mathbf{B}-\mathbf{BU}^2)+\alpha_3(\mathbf{U}^2\mathbf{BU}-\mathbf{UBU}^2) \tag{10}$$

其中 α_1，α_2，α_3 是 U 的三个主不变量：

$$\mathrm{I}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \mathrm{II}=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2,\quad \mathrm{III}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{11}$$

的函数．问题归结为确定这三个函数．在 U 的主标架$\{\mathbf{N}_i\}$下，方程（6）和表示（10）分别具有分量形式$(i\neq j)$：

$$\omega_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=b_{ij} \tag{12}$$

$$\omega_{ij}=\alpha_1b_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)+\alpha_2b_{ij}(\lambda_i^2-\lambda_j^2)+\alpha_3b_{ij}\lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j). \tag{13}$$

从(12)可以看出，B必须满足

$$b_{11}=b_{22}=b_{33}=0 \tag{14}$$

情形(i) $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$．如果 $b_{23}b_{31}b_{12}\neq0$，比较（12）和(13)，得

$$\alpha_1+(\lambda_i+\lambda_j)\alpha_2+\lambda_i\lambda_j\alpha_3=(\lambda_i-\lambda_j)^{-2}\qquad(i\neq j) \tag{15}$$

这是以 α_1，α_2，α_3 为未知量的代数方程组．由于系数矩阵行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3\\ 1 & \lambda_3+\lambda_1 & \lambda_3\lambda_1\\ 1 & \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2\end{vmatrix}=-(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\neq0,$$

(15)有唯一解．方程组（15）关于λ_1，λ_2，λ_3是对称的，因此它的解是 λ_1，λ_2，λ_3 的齐次对称有理函数．根据对称多项式基本定理，解又可用基本对称多项式(11)表出．于是，我们有

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=\frac{1}{\Delta^2}(6\,\mathrm{I}\,\mathrm{III}-5\,\mathrm{I}^2\,\mathrm{II}+\mathrm{I}^4+4\,\mathrm{II}^2)\\
a_2&=\frac{1}{\Delta^2}(4\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{I}^3-9\,\mathrm{III})\\
a_3&=\frac{1}{\Delta^2}(\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II})
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

其中 $$\Delta^2=18\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III}+\mathrm{I}^2\,\mathrm{II}^2-4\,\mathrm{I}^3\,\mathrm{III}-4\,\mathrm{II}^3-27\,\mathrm{III}^2\tag{17}$$

当 $b_{23}b_{31}b_{12}=0$，从（12）和（13）只能得出（15）的一个或两个方程，这时解$\{\alpha_i\}$不唯一。但可以证明，$\{\alpha_i\}$的不唯一性并不影响抽象表示（10）的唯一性。因此，条件$b_{23}b_{31}b_{12}\neq 0$可以去掉。

情形(ii) 当$\mathbf{U}$有两个相等的特征值，例如$\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$，在$\mathbf{U}$的主标架下，方程(6)的左端是

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\Omega}^L-\boldsymbol{\Omega}^L\mathbf{U}\cong(\lambda_1-\lambda_0)\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&\omega_{13}\\-\omega_{21}&0&0\\-\omega_{31}&0&0\end{pmatrix}\tag{18}$$

要使方程（6）是相容的，$\mathbf{B}$必须具有形式

$$\mathbf{B}\cong\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&0&0\\b_{31}&0&0\end{pmatrix}\tag{19}$$

此时，方程（12）无法确定ω_{23}（即ω_{23}可为任意），因为这时$\mathbf{U}$的特征方向是不确定的(在$\mathbf{N}_2$和$\mathbf{N}_3$张成的平面上任意方向都是$\mathbf{U}$的特征方向)。但是考虑到对情形(i)，从（12）$_1$有$\omega_{23}\to 0$ $(\lambda_2\to\lambda_3)$（如果$b_{23}=o(\lambda_2-\lambda_3)$），则从连续性的角度，在情形(ii)，取$\omega_{23}=0$是合适的，即规定

$$\boldsymbol{\Omega}^L\cong\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&\omega_{13}\\\omega_{21}&0&0\\\omega_{31}&0&0\end{pmatrix}.$$

将方程（6）通过（18）和（19）确定的ω_{ij}代入上式，考虑到

$$\mathbf{U}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{U}\cong(\lambda_1-\lambda_0)\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}\\-b_{21}&0&0\\-b_{31}&0&0\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{\Omega}^L\cong\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}\\-b_{21}&0&0\\-b_{31}&0&0\end{pmatrix}\cong\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}(\mathbf{U}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{U})$$

$$=\frac{1}{\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II}}(\mathbf{U}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{U}).\tag{20}$$

情形(iii) 当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，(6)的右端恒为零。因此，右端也必须

$$\mathbf{B}=0.\tag{21}$$

这时$\boldsymbol{\Omega}^L$可为任意。沿连续性的考虑，取

$$\boldsymbol{\Omega}^L=0\tag{22}$$

是合适的。

下面对具体的表达式（9）检验$\mathbf{B}$是否满足条件(14)，(19)和(21)．

情形(i) 条件（14）等价于

$$[\mathrm{tr}\mathbf{B}]^2+[\mathrm{tr}(\mathbf{U}\mathbf{B})]^2+[\mathrm{tr}(\mathbf{U}^2\mathbf{B})]^2=0. \tag{23}$$

直接计算

$$\dot{\overline{\mathrm{tr}\mathbf{U}}}=\dot{\overline{\sum_i\lambda_i}}=\sum_i\dot\lambda_i\ ,\quad \dot{\overline{\mathrm{tr}\mathbf{U}^2}}=\dot{\overline{\sum_i\lambda_i^2}}=2\sum_i\lambda_i\dot\lambda_i\ ,\quad \dot{\overline{\mathrm{tr}\mathbf{U}^3}}=\dot{\overline{\sum_i\lambda_i^3}}=3\sum_i\lambda_i^2\dot\lambda_i$$

和利用熟知公式(见[10]的第131页)

$$\dot{\overline{\mathrm{tr}\mathbf{U}}}=\mathbf{I}:\dot{\mathbf{U}}=\mathrm{tr}\dot{\mathbf{U}},\quad \dot{\overline{\mathrm{tr}\mathbf{U}^2}}=2\mathbf{U}:\dot{\mathbf{U}}=2\mathrm{tr}(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}),\quad \dot{\overline{\mathrm{tr}\mathbf{U}^3}}=3\mathbf{U}^2:\dot{\mathbf{U}}=3\mathrm{tr}(\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}}),$$

我们有

$$\mathrm{tr}\mathbf{B}=\mathrm{tr}\Big(\sum_i\dot\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\dot{\mathbf{U}}\Big)=\sum_i\dot\lambda_i-\mathrm{tr}\dot{\mathbf{U}}=0,$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{U}\mathbf{B})=\mathrm{tr}\Big(\sum_i\lambda_i\dot\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}\Big)=\sum_i\lambda_i\dot\lambda_i-\mathrm{tr}(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}})=0,$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{U}^2\mathbf{B})=\mathrm{tr}\Big(\sum_i\lambda_i^2\dot\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}}\Big)=\sum_i\lambda_i\dot\lambda_i-\mathrm{tr}(\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}})=0.$$

由此，条件(23)，即(14)是满足的．

情形(ii) $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$．有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=\sum_i\dot\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\dot{\mathbf{U}}=-\sum_i\lambda_i(\dot{\mathbf{N}}_i\otimes\mathbf{N}_i+\mathbf{N}_i\otimes\dot{\mathbf{N}}_i)=-\sum_i\lambda_i\omega_{ji}(\mathbf{N}_j\otimes\mathbf{N}_i+\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_j)\\&=-(\lambda_1\omega_{21}\mathbf{N}_2\otimes\mathbf{N}_1+\lambda_1\omega_{31}\mathbf{N}_3\otimes\mathbf{N}_1+\lambda_0\omega_{12}\mathbf{N}_1\otimes\mathbf{N}_2+\lambda_0\omega_{32}\mathbf{N}_3\otimes\mathbf{N}_2\\&\quad+\lambda_0\omega_{13}\mathbf{N}_1\otimes\mathbf{N}_3+\lambda_0\omega_{23}\mathbf{N}_2\otimes\mathbf{N}_3+\lambda_1\omega_{21}\mathbf{N}_1\otimes\mathbf{N}_2+\lambda_1\omega_{31}\mathbf{N}_1\otimes\mathbf{N}_3\\&\quad+\lambda_0\omega_{12}\mathbf{N}_2\otimes\mathbf{N}_1+\lambda_0\omega_{32}\mathbf{N}_2\otimes\mathbf{N}_3+\lambda_0\omega_{13}\mathbf{N}_3\otimes\mathbf{N}_1+\lambda_0\omega_{23}\mathbf{N}_3\otimes\mathbf{N}_2)\\&\cong(\lambda_1-\lambda_0)\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&\omega_{13}\\-\omega_{21}&0&0\\-\omega_{31}&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

可见，条件(19)是满足的．

情形(iii) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$, $\mathbf{U}=\lambda_0\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i$,

$$\mathbf{B}=-\lambda_0(\dot{\mathbf{N}}_i\otimes\mathbf{N}_i+\mathbf{N}_i\otimes\dot{\mathbf{N}}_i)=-\lambda_0(\omega_{ji}\mathbf{N}_j\otimes\mathbf{N}_i+\omega_{ji}\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_j)=0.$$

条件(21)亦满足．

于是，总起来有

$$\mathbf{\Omega}^L=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta^2}[(6\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}-5\,\mathrm{I}^2\,\mathrm{II}+\mathrm{I}^4+4\,\mathrm{II}^2)(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}-\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}})\\\quad+(4\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{I}^3-9\,\mathrm{III})(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^2-\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}})+(\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II})(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^2-\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U})]\\\qquad\qquad\qquad\qquad(\text{当}\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1) & (24)\\\dfrac{1}{\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II}}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}-\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}})\qquad(\text{当}\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3) & (25)\\0\qquad\qquad(\text{当}\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3) & (26)\end{cases}$$

值得注意的是，由于与$\mathbf{U}$共轴，$\sum_i\dot\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i$不出现在最终表达式．

旋率$\mathbf{\Omega}^E$和$\mathbf{\Omega}^D$也有类似的表达式．对$\mathbf{\Omega}^E$，只需在上式中用$\mathbf{V}$和$\dot{\mathbf{V}}$分别代替$\mathbf{U}$和$\dot{\mathbf{U}}$，而对于

Ω^D，则分别用$\mathbf{D}$和$\dot{\mathbf{D}}$代替，并且此时的Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ是D的主不变量。

我们还可以讨论各主标架间的相对旋率，例如 Euler 标架相对 Lagrange 标架的旋率

$$\Omega^R=\dot{R}R^*. \tag{27}$$

现求它所满足的方程。为此，将$(2)_2$物质微商

$$\dot{R}U+R\dot{U}=\dot{V}R+V\dot{R}$$

即
$$\dot{R}R^*(RUR^*)-V\dot{R}R^*=\dot{V}-R\dot{U}R^*$$

得
$$V\Omega^R-\Omega^R V=R\dot{U}R^*-\dot{V} \tag{28}$$

该方程和(7)的区别仅在右端：

$$B=R\dot{U}R^*-\dot{V} \tag{29}$$

将(29)代入解的表达式，经过整理，得

$$\Omega^R=\Omega^E-R\Omega^L R^* \tag{30}$$

它和[3]的(5.33)式一致，其物理意义是：$\{\mathbf{n}_i\}$相对$\{\mathbf{N}_i\}$的相对旋率等于$\{\mathbf{n}_i\}$的绝对旋率减去$\{\mathbf{N}_i\}$的绝对旋率。

如果引进共转导数

$$\mathring{V}:=\dot{V}+V\Omega^R-\Omega^R V=R\dot{U}R^* \tag{31}$$

则（29）可写成
$$B=\mathring{V}-\dot{V}$$

从而有

$$\Omega^R=\begin{cases}\frac{1}{\Delta^2}\{(6\,\mathrm{I}\,\mathrm{III}-5\,\mathrm{I}^2\mathrm{II}+\mathrm{I}^4+4\,\mathrm{II}^2)[(\dot{V}-\mathring{V})V-V(\dot{V}-\mathring{V})] \\ \quad +(4\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{I}^3-9\,\mathrm{III})[(\dot{V}-\mathring{V})V^2-V^2(\dot{V}-\mathring{V})] \\ \quad +(\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II})[V(\dot{V}-\mathring{V})V^2-V^2(\dot{V}-\mathring{V})V]\} \\ \quad +(\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II})[V(\dot{V}-\mathring{V})V^2-V^2(\dot{V}-\mathring{V})V]\} \\ \qquad\qquad\qquad (当\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1) & (32) \\ \frac{1}{\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II}}[(\dot{V}-\mathring{V})V-V(\dot{V}-\mathring{V})] \qquad (当\lambda\neq\lambda=\lambda) & (33) \\ 0 \qquad\qquad\qquad (当\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3) & (34)\end{cases}$$

其他相对旋率也可根据类似于（30）的公式由绝对旋率求得。

我们还可以求各种应力张量主标架的旋率的绝对表示，方法是相同的，这里不再赘述。

总结起来，旋率是一种特殊类型的张量方程的解。求这个解可以将主轴法和张量函数表示定理结合起来，使问题化为一个特殊的代数方程组问题，然后应用对称多项式基本定理而得到旋率的绝对表示。从这里的讨论已可显示出一种将主轴表示转换为抽象表示的普遍方法。我们将单独地系统介绍这种方法。

参　考　文　献

[1] Hill, R., On constitutive inequalities for simple materials, I and Ⅱ, *J. Mech. Phys. Solids*, 16 (1968), 229—242, 315—322.

[2] Hill, R., Aspects of invariance in solid mechanics, *Adv. in Applied Mech.* (Ed by Yih, C.-S.), Academic Press, New York, 18 (1978), 1—75.

[3] 郭仲衡和R. N Dubey，非线性连续介质力学中的“主轴法”，力学进展，13 (1983)，1—17.

[4] Guo Zhong-heng and R. N. Dubey, Spins in a deforming continuum, *SM Arch.*,

9 (1984), 53—61.
[5] Mehrabadi, M. M. and S., Nemat-Nasser, Some basic kinematical relations for finite deformations of continua, *Mech. Materials*, 6 (1987), 127—138.
[6] 程莉、黄克智，固化物质导数与标架旋率，力学学报，19 (1987), 524—528.
[7] 郭仲衡，连续介质的自旋和伸长率标架旋率，应用数学和力学，9 (1988), 1045—1048.
[8] Nemat-Nasser, S., On finite deformation elasto-plasticity, *Int. J. Solids Structures*, 18 (1982), 857—872.
[9] Spencer, A. J. M., Theory of invariants, *Continuum Physics* (Ed by Eringen, A. C.), Academic Press, New York, 1 (1975).
[10] 郭仲衡，《张量》(理论和应用)，科学出版社，北京 (1988).

Absolute Representations of Spins of Principal Frames in a Continuum

Guo Zhong-heng

(*Department of Mathematics, Peking University, Beijing*)

Liang Hao-yun

(*Department of Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou*)

Abstract

The present paper offers a general method to find the absolute expressions for different spins in a continuum, for which only "the principal axis expressions" were available, and in this way it makes the further applications of these spins possible.

Key words spins, principal axis representation, absolute representation