应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

具有H-凸截口的非紧集的交定理及其应用*

丁 协 平

（四川师范大学，1990年2月15日收到）

摘 要

在本文内，我们推广了Ma，Fan，Tarafdar，Lassonde 和 Shih-Tan 等作者关于具有凸截口集的交定理到没有线性结构的H-空间和非紧设置．同时给出了我们的定理对 Von Neumann 型极小极大定理的应用．

关键词 H-凸 H-空间 弱H-凸 连续选择定理 叠合点定理

一、引 言

设 $\{X_i: i\in I\}$ 是一非空紧凸子集的族．其中 I 是一有限或无限的指标集，每一 X_i 是 Hausdorff 拓扑矢量空间的子集．令 $X=\prod_{i\in I}X_i$．Fan[4]首先对 X 中具有凸截口的子集族 $\{E_i: i\in I\}$ 证明了非空交定理（也见[5]），其中 I 为有限集．其后Ma[8]将 Fan 的结果推广到了 I 为无限集的情形．最近 Fan[6]，Lassonde[7]，Shih-Tan[9,10]，Tarafdar[12]，Ding-Kim-Tan[3]和 Ding[2]分别在放松紧性条件，凸性条件和线性结构下得到了上述交定理的推广并给出了某些应用．

本文是文[2]的继续，目的是在 I 为无限集的情况下推广上述结果到没有线性结构的H-空间和非紧设置从而统一和推广了前述已知结果，而且我们的证明方法不同于上述文献中的证明方法．最后给出了我们的定理对 von Neumann 型极小极大定理的应用．

二、预 备 知 识

令 X 是一非空集，2^X 表 X 的一切子集的族，$\mathscr{F}(X)$ 表 X 的一切非空有限子集的族．设 X 和 Y 是拓扑空间和 $D\subset X$．称 D 在 X 内是紧开（闭）的，如果对 X 的每一非空紧子集 C，$D\cap C$ 在 C 内是开（闭）的．称映射 $S: D\subset X\to 2^Y$ 在 D 上是上半连续的，如果对每一 $x\in D$ 和每一开集 $U\subset Y$ 具有 $S(x)\subset U$，存在 x 的一开邻域 $V\subset X$ 使得 $S(V\cap D)\subset U$．称 S 是一紧值映射，如果对每一 $x\in D$，$S(x)$ 是 Y 的一紧子集．

---

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊（Ⅰ）论文．

下述概念由Bardaro-Cappitelli[1]引入.

称 $(X,\{F_A\})$ 为一H-空间，如果X是一拓扑空间和$\{F_A\}$是由$A\in\mathscr{F}(X)$标号的X的非空可缩子集的族使得如果$A,A'\in\mathscr{F}(X)$和$A\subset A'$，则有$F_A\subset F_{A'}$. 显然每一线性拓扑空间X都是一H-空间，其中$F_A=\mathrm{co}(A)$，对每一$A\in\mathscr{F}(X)$和$\mathrm{co}(A)$表A的凸包. 称$(X,\{F_A\})$的子集D是(i)H-凸的，如果对每一$A\in\mathscr{F}(D)$，$F_A\subset D$；(ii)弱H-凸的，如果对每一$A\in\mathscr{F}(D)$，$F_A\cap D$是一可缩集；(iii)H-紧的，如果对每一$A\in\mathscr{F}(X)$存在X的一紧和弱H-凸子集D_A使得$D\cup A\subset D_A$. 称映射$F:X\to 2^X$是H-KKM映射，如果对每一$A\in\mathscr{F}(X)$，$F_A\subset\bigcup_{x\in A}F(x)$.

我们将需要在[2]中得到的下述连续选择定理和叠合点定理:

定理A 令X是一紧拓扑空间和$(Y,\{F_A\})$是一H-空间. 假设$S,T:X\to 2^Y$使得

(a) 对每一$x\in X$，$S(x)\neq\phi$和对每一$A\in\mathscr{F}(S(x))$，$F_A\subset T(x)$；

(b) 对每一$y\in Y$，$S^{-1}(y)$在X内是开集.

则T有一连续选择$g:X\to Y$且存在一有限集$A\in\mathscr{F}(Y)$使得$g(X)\subset F_A$.

定理B 令X是H-空间$(Y,\{F_A\})$的一非空子集，Z是一拓扑空间和$A,B:X\to 2^Z$使得

(a) 对每一$z\in Z$，$B^{-1}(z)\neq\phi$和对每一$D\in\mathscr{F}(B^{-1}(z))$，$F_D\subset A^{-1}(z)$；

(b) 对每一$x\in X$，$B(x)$在Z内是紧开的；

(c) 存在Y的一H-紧子集L和Z的一紧子集K使得对每一$B\in\mathscr{F}(X)$和对每一$z\in Z\setminus K$，存在$x\in L_B\cap X$满足$z\in B(x)$. 则对每一紧值上半连续映射$S:Y\to 2^Z$，存在$x_0\in X$使得$S(x_0)\subset A(x_0)$.

三、具有H-凸截口的集的非空交定理

在本节中，我们总假设每一H-空间$(X,\{F_A\})$有下列性质：对每一$A\in\mathscr{F}(X)$，F_A在X内是H-紧的. 显然每一个由Lassonde[7]引入的凸空间是具有此性质的H-空间其中$F_A=\mathrm{co}(A)$，对每一$A\in\mathscr{F}(X)$. 我们还需要引入下列记号:

令$(X_i,\{F_{A_i}\})_{i\in I}$是一族H-空间，其中$I$是有限或无限指标集和$X=\prod_{i\in I}X_i$. 对每一$i\in I$，令$\hat{X}_i=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$. $\hat{x}_i$将表$\hat{X}_i$内的元素. 对每一$i\in I$，$X_i\times\hat{X}_i=X$和$(x_i,\hat{x}_i)$表X内一元素(其坐标顺序作适当调整).

定理3.1. 令$(X_i,\{F_{A_i}\})_{i\in I}$是一族H-空间，$I$是有限或无限指标集和$X=\prod_{i\in I}X_i$. 假设$\{M_i\}_{i\in I}$和$\{N_i\}_{i\in I}$是$X$的两个子集族使得

(a) 对每一$i\in I$和对每一$x_i\in X_i$，截口

$$M_i(x_i)=\{\hat{y}_i\in\hat{X}_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}$$

在$\hat{X}_i$内是紧开的；

(b) 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i$，截口

$$M_i(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}\neq\phi$$

和对每一$D_i\in\mathscr{F}(M_i(\hat{y}_i))$，$F_{D_i}\subset N_i(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i:(x_i,\hat{y}_i)\in N_i\}$；

(c) 至多存在一个$i_0\in I$使得对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，存在X_i的一H-紧子集L_i使得

$\bigcap_{x_i\in L_i}(\hat{X}_i\setminus M_i(x_i))$是$\hat{X}_i$的紧子集．则$\bigcap_{i\in I}N_i\neq\phi$．

证明 由条件(b)，对每一$i\in I$有

$$\hat{X}_i=\bigcup_{x_i\in X_i}M_i(x_i).\tag{3.1}$$

从条件(a)，(c)和(3.1)式推得对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，存在有限集$B_i=\{x_i^1,\cdots,x_i^{t_i}\}\in\mathscr{F}(X_i)$使得

$$\bigcap_{x_i\in L_i}(\hat{X}_i\setminus M_i(x_i))\subset\bigcup_{x_i\in B_i}M_i(x_i).$$

因此我们有

$$\hat{X}_i\subset\bigcup_{x_i\in L_i\cup B_i}M_i(x_i).\tag{3.2}$$

因为L_i是X_i内的H-紧集，存在一紧，弱H-凸子集$C_i\subset X_i$使得$L_i\cup B_i\subset C_i$．由(3.2)可得

$$\hat{X}_i\subset\bigcup_{x_i\in C_i}M_i(x_i)\tag{3.3}$$

定义映射$M_{i_0},N_{i_0}:\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\to 2^{X_{i_0}}$如下：对每一$\hat{y}_{i_0}\in\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i$，

$$M_{i_0}(\hat{y}_{i_0})=\{x_{i_0}\in X_{i_0}:(x_{i_0},\hat{y}_{i_0})\in M_{i_0}\},$$
$$N_{i_0}(\hat{y}_{i_0})=\{x_{i_0}\in X_{i_0}:(x_{i_0},\hat{y}_{i_0})\in N_{i_0}\}.$$

由条件(b)，对每一$\hat{y}_{i_0}\in\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\subset\hat{X}_{i_0}$，$M_{i_0}(\hat{y}_{i_0})\neq\phi$且对每一$D_{i_0}\in\mathscr{F}(M_{i_0}(\hat{y}_{i_0}))$，$F_{D_{i_0}}\subset N_{i_0}(\hat{y}_{i_0})$．又对每一$x_{i_0}\in X_{i_0}$，我们有

$$M_{i_0}^{-1}(x_{i_0})=\left\{\hat{y}_{i_0}\in\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i:(x_{i_0},\hat{y}_{i_0})\in M_i\right\}$$
$$=\left(\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\right)\cap M_{i_0}(x_{i_0}).$$

从条件(a)推得$M_{i_0}^{-1}(x_{i_0})$是$\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i$的开子集．由定理A知存在一连续映射$g:\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\to X_{i_0}$和有限集$A_{i_0}\in\mathscr{F}(X_{i_0})$使得对每一$\hat{y}_{i_0}\in\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i$，$g(\hat{y}_{i_0})\in N_{i_0}(\hat{y}_{i_0})$和$g\left(\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\right)\subset F_{A_{i_0}}$．由假设$F_{A_{i_0}}$是H-紧的，存在$X_{i_0}$的一紧，弱H-凸子集$C_{i_0}$使得$F_{A_{i_0}}\subset C_{i_0}$．因此我们有$g\left(\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\right)\subset C_{i_0}$和对每一$\hat{y}_{i_0}\in\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i$，

$$(g(\hat{y}_{i_0}),\hat{y}_{i_0})\in N_{i_0}\tag{3.4}$$

现在令$C=\prod_{i\in I}C_i$和$\hat{C}_i=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}C_j$，对每一$i\in I$．

我们定义映射$M_i,N_i:C_i\to 2^{\hat{C}_i}$，$i\in I$：如下：

$$M_i(x_i)=\{\hat{y}_i\in\hat{C}_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\},$$
$$N_i(x_i)=\{\hat{y}_i\in\hat{C}_i:(x_i,\hat{y}_i)\in N_i\}.$$

则由(a)，对每一$x_i\in C_i$，$M_i(x_i)$在$\hat{C}_i$内是开的（因为$\hat{C}_i$是$\hat{X}_i$的紧子集）。从(b)和(3.3)推得对每一$\hat{y}_i\in\hat{C}_i$，

$$M_i^{-1}(\hat{y}_i)=\{x_i\in C_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}$$
$$=C_i\cap M_i(\hat{y}_i)\neq\phi$$

和对每一$D_i\in\mathscr{F}(M_i^{-1}(\hat{y}_i))$，$F_{D_i}\subset N_i^{-1}(\hat{y}_i)$。从具有$X=Y=C_i$和$Z=\hat{C}_i=K$的定理B推得对每一紧值上半连续映射$S:C_i\to 2^{\hat{C}_i}$，存在$x_i\in C_i$使得

$$S(x_i)\subset N_i(x_i). \tag{3.5}$$

现在对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，令$p_i:\hat{C}_{i_0}\to C_i$是投影映射和对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，令$q_i:\hat{C}_i\to C_{i_0}$是投影映射，则p_i和q_i都是连续开映射。

对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，我们考虑映射

$$q_i^{-1}\circ g\circ p_i^{-1}:C\to 2^{\hat{C}_i}.$$

因为p_i和q_i是连续开映射和g是连续映射，容易证明$q_i^{-1}\circ g\circ p_i^{-1}$是一上半连续映射。注意到对每一$i\in I$，$C_i$是$X_i$的紧子集，也易知$q_i^{-1}\circ g\circ p_i^{-1}$是紧值映射。因此由(3.5)，对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，存在$x_i\in C_i$使得

$$q_i^{-1}\circ g\circ p_i^{-1}(x_i)\subset N_i(x_i). \tag{3.6}$$

令 $\hat{x}_{i_0}=\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}x_i$和$g(\hat{x}_{i_0})=x_{i_0}$，则由(3.4)有

$$x=\prod_{i\in I}x_i=(x_{i_0},\hat{x}_{i_0})=(g(\hat{x}_{i_0}),\hat{x}_{i_0})\in N_{i_0} \tag{3.7}$$

另一方面，对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$

$$q_i^{-1}\circ g\circ p_i^{-1}(x_i)=g\Big(\{x_i\}\times\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\Big)\times\prod_{j\in I\setminus\{i_0,i\}}C_i$$

和 $x_{i_0}\in g\Big(\{x_i\}\times\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}}C_i\Big)$，因此我们必有

$$\hat{x}_i=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}x_j\in q_i^{-1}\circ g\circ p_i^{-1}(x_i)\subset N(x_i)，\text{对每一}i\in I\setminus\{i_0\}.$$

即是$(x_i,\hat{x}_i)\in N_i$，对一切$i\in I\setminus\{i_0\}$。结合(3.7)式得到

$$x=\prod_{i\in I}x_i=(x_i,\hat{x}_i)\in N_i，\text{对一切}i\in I.$$

因此 $\prod_{i\in I}N_i\neq\phi$.

注3.1. 定理3.1推广了Ding[2]的定理4.1到具有无限指标集的集族，推广Lassonde[7]的定理1.9到H-空间和具有无限指标集的集族。

系3.1. 令$(X_i,\{F_{A_i}\})_{i\in I}$是一族H-空间，$I$是有限或无限指标集和$X=\prod_{i\in I}X_i$。假设至多存在一个$i_0\in I$使得对每一$i\in I\setminus\{i_0\}$，$X_i$是紧拓扑空间和假设$\{M_i\}_{i\in I}$，$\{N_i\}_{i\in I}$是$X$的两个子集族使得定理3.1的条件(a)和(b))成立。则$\bigcap_{i\in I}N_i\neq\phi$.

证明 对$i\in I\setminus\{i_0\}$，令$L_i=X_i$，则由条件(b)有

$$\bigcap_{x_i\in L_i}(\hat{X}_i\backslash M_i(x_i))=\hat{X}_i\backslash\bigcup_{x_i\in X_i}M(x_i)=\phi.$$

因此定理3.1的条件(c)成立。由定理3.1知结论成立。

注3.2. 系3.1改进和推广了Fan[5]的定理1和Ma[8]的定理2.

系3.2. 令$(X_i,\{F_{A_i}\})_{i\in I}$是一族H-空间，$I$是有限或无限指标集和$X=\prod_{i\in I}X_i$。假设$\{M_i\}_{i\in I}$和$\{N_i\}_{i\in I}$是$X$的两个子集族使得定理3.1的条件(a)和(b)成立。如果下列条件成立：

(c_1)至多存在一个$i_0\in I$使得对每一$i\in I\backslash\{i_0\}$，存在X_i的一H-紧子集L_i和$\hat{X}_i$的一紧子集$\hat{K}_i$使得对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i\backslash\hat{K}_i$，$L_i\cap M_i(\hat{y}_i)\neq\phi$。

则$\bigcap_{i\in I}N_i\neq\phi$。

证明 容易验证条件(c_1)与定理3.1的条件(c)等价，因此由定理3.1知结论成立。

定理3.2. 设$(X_i,\{F_{A_i}\})_{i\in I}$是一族H-空间，$I$是有限或无限指标集和$X=\prod_{i\in I}X_i$。假设$\{M_i\}_{i\in I}$和$\{N_i\}_{i\in I}$是$X$的两个子集族使得

(a) 对每一$i\in I$和对每一$x_i\in X_i$，截口

$$M_i(x_i)=\{\hat{y}_i\in\hat{X}_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}$$

在$\hat{X}_i$内是紧开的。

(b) 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i$，如果$D_i\in\mathscr{F}(M_i(\hat{y}_i))$，则$F_{D_i}\subset N_i(\hat{y}_i)$。

(c) 存在X的一紧子集K使得对每一$i\in I$，K在X_i上的投影X_i'在X_i中是H-凸的并且下列条件成立：

(c_1) 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i'=\prod_{j\in I\backslash\{i\}}X_j'$，截口

$$M_i(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}\neq\phi;$$

(c_2) 对每一$y\in X\backslash K$，$K\cap\prod_{i\in I}M_i(\hat{y}_i)\neq\phi$。

则$\bigcap_{i\in I}N_i\neq\phi$。

证明 由条件(c)，$(X_i',\{F_A\cap X_i'\})_{i\in I}$是一族紧H-空间。令$X'=\prod_{i\in I}X_i'$。对每一$i\in I$，令$M_i'=X'\cap M_i$和$N_i'=X'\cap N_i$。

则我们有下列性质：

(i) 对每一$i\in I$和对每一$x_i\in X_i'$，由条件(a)，截口

$$\begin{aligned}M_i'(x_i)&=\{\hat{y}_i\in\hat{X}_i':(x_i,\hat{y}_i)\in M_i'\}\\&=\{\hat{y}_i\in\hat{X}_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}\cap\hat{X}_i'\\&=M_i(x_i)\cap\hat{X}_i'\end{aligned}$$

在$\hat{X}_i'$中是开的。

(ii) 我们主张对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i'$，截口

$$M_i'(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i':(x_i,\hat{y}_i)\in M_i'\}\neq\phi.$$

事实上，由(c_1)知$M_i(\hat{y}_i)\neq\phi$。令$x_i\in M_i(\hat{y}_i)$。如果$x_i\in M_i'(\hat{y}_i)$则$M_i'(\hat{y}_i)\neq\phi$；如果$x_i\notin$

$M_i^!(\hat{y}_i)$，则$(x_i,\hat{y}_i)\notin M_i^!=M_i\cap X'$。因为$(x_i,\hat{y}_i)\in M_i$，由此推得$(x_i,\hat{y}_i)\notin X'$。注意到$K\subset X'$，我们有$(x_i,\hat{y}_i)\notin K$。由条件$(c_2)$，存在$(x_i^!,\hat{y}_i)\in K\subset X'=X_i^!\times\hat{X}_i^!$使得$(x_i^!,\hat{y}_i)\in M_i$。因为$x_i^!\in X_i^!$和$\hat{y}_i\in\hat{X}_i^!$，所以$(x_i^!,\hat{y}_i)\in M_i\cap X'=M_i^!$。由此推得$x_i^!\in M_i^!(\hat{y}_i)$，即$M_i^!(\hat{y}_i)\neq\phi$。

(iii) 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i^!$，我们有

$$M_i^!(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i^!:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i^!\}=M_i(\hat{y}_i)\cap X_i^!$$

和

$$N_i^!(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i^!:(x_i,\hat{y}_i)\in N_i^!\}=N_i(\hat{y}_i)\cap X_i^!.$$

如果$D_i\in\mathscr{F}(M_i^!(\hat{y}_i))=\mathscr{F}(M_i(\hat{y}_i)\cap X_i^!)$，则由条件(b)有$F_{D_i}\subset N_i(\hat{y}_i)$。又因为$X_i^!$是H-凸的，故有$F_{D_i}\subset X_i^!$。因此$F_{D_i}\subset N_i(\hat{y}_i)\cap X_i^!=N_i^!(\hat{y}_i)$。因此对$(X_i^!,\{F_{A_i}\cap X_i^!\})_{i\in I}$，$\{M_i^!\}_{i\in I}$，$\{N_i^!\}_{i\in I}$，系3.1的一切条件被满足。由系3.1知$\bigcap\limits_{i\in I}N_i^!\neq\phi$且因此$\bigcap\limits_{i\in I}N_i\neq\phi$。

注3.3 定理3.2.推广了Ma[8]的定理2，Fan[6]的定理16，Shih-Tan[9]的定理2和Tarafdar[12]的定理2到H-空间. 注意到如果对每一$i\in I$，X_i是拓扑矢量空间，则对每一$A_i\in\mathscr{F}(X_i)$，令$F_{A_i}=\mathrm{co}(A_i)$，$(X_i,\{F_{A_i}\})$是一H-空间. 显然，如果定理3.2的条件(b)成立，则下列条件成立：

(b)′ 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i$，截口

$$N_i(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i:(x_i,\hat{y}_i)\in N_i\}$$

包含截口

$$M_i(\hat{y}_i)=\{x_i\in X_i:(x_i,\hat{y}_i)\in M_i\}$$

的凸包. 因此定理3.2是在更弱的假设下改进和推广了上述已知结果到非紧，非凸的抽象设置.

类似于[9]的定理3，我们有定理3.2的如下解析陈述：

定理3.3 设$(X_i,\{F_{A_i}\})_{i\in I}$是一族H-空间，$I$是有限或无限指标集和$X=\prod\limits_{i\in I}X_i$，$\{t_i\}_{i\in I}$是一族实数。假设$\{f_i\}_{i\in I}$和$\{g_i\}_{i\in I}$是定义在$X$上的两族实值函数满足下列条件：

(a) 对每一$i\in I$和对每一$x_i\in X_i$，$f(x_i,\hat{y}_i)$关于$\hat{y}_i$在$\hat{X}_i$的紧子集上是下半连续的；

(b) 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i$，如果

$D_i\in\mathscr{F}(\{x_i\in X_i:f_i(x_i,\hat{y}_i)>t_i\})$，则

$F_{D_i}\subset\{x_i\in X_i:g_i(x_i,\hat{y}_i)>t_i\}$；

(c) 存在X的一紧子集K使得对每一$i\in I$，K在X_i上的投影$X_i^!$在X_i中是H-凸的并且下列条件成立：

(c_1) 对每一$i\in I$和对每一$\hat{y}_i\in\hat{X}_i^!$，存在$x_i\in X_i$使得$f_i(x_i,\hat{y}_i)>t_i$和

(c_2) 对每一$y\in X\backslash K$，存在$x\in K$使得$f_i(x_i,\hat{y}_i)>t_i$对一切$i\in I$成立。

则存在$\hat{y}\in X$使得对一切$i\in I$，$g_i(\hat{y})>t_i$。

注3.4. 定理3.3改进和推广了Shih-Tan[9]的定理3和Ma[8]的定理3.

四、对Von Neumamn型极小极大定理的应用

设$(X,\{F_A\})$是一H-空间称定义在X上的实值函数φ是H-拟凹的，如果对每一实数t，集$\{x\in X:\varphi(x)>t\}$在X中是H-凸的；称φ是H-拟凸的，如果$-\varphi$是H-拟凹的。

定理4.1 设$(X,\{F_A\})$和$(Y,\{F_A\})$是两个H-空间。和$f,s,t,g:X\times Y\to\mathbb{R}$（实直线）使得

(a) $s(x,y)\leqslant t(x,y)$，对每一$(x,y)\in X\times Y$；

(b) 对每一$x\in X$，$y\mapsto f(x,y)$在Y的紧子集上是下半连续的和对每一$y\in Y$，$x\mapsto g(x,y)$在X的紧子集上是上半连续的；

(c) 对每一$x\in X$和对任何$\gamma\in\mathbb{R}$，如果$A\in\mathscr{F}(\{y\in Y:g(x,y)<\gamma\})$，则$F_A\subset\{y\in Y:t(x,y)<\gamma\}$且对每一$y\in Y$和对任何$\gamma\in\mathbb{R}$，如果$A\in\mathscr{F}(\{x\in X:f(x,y)>\gamma\}$，则$F_A\subset\{x\in X:s(x,y)>\gamma\}$。

(d) 存在X的非空紧H-凸子集M和Y的非空紧H-凸子集N使得

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in M}f(x,y)=\inf_{y\in N}\sup_{x\in X}f(x,y) \tag{4.1}$$

和

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in N}g(x,y)=\sup_{x\in M}\inf_{y\in Y}g(x,y) \tag{4.2}$$

则下面极小极大不等式成立：

$$\alpha\equiv\inf_{y\in N}\sup_{x\in X}f(x,y)\leqslant\sup_{x\in M}\inf_{y\in Y}g(x,y)\equiv\beta \tag{4.3}$$

证明 我们可以假设$\alpha\neq-\infty$和$\beta\neq+\infty$。如果结论不真，则可选取$\gamma\in\mathbb{R}$使得$\alpha>\gamma>\beta$。令

$$M_1=\{(x,y)\in X\times Y:f(x,y)>\gamma\};$$
$$M_2=\{(x,y)\in X\times Y:g(x,y)<\gamma\};$$
$$N_1=\{(x,y)\in X\times Y:s(x,y)>\gamma\};$$
$$N_2=\{(x,y)\in X\times Y:t(x,y)<\gamma\}.$$

令$K=M\times N$，则K为$X\times Y$中的紧子集。从$\alpha>\gamma$和$\gamma>\beta$推得对每一$(x,y)\in K$，$M_1(y)\neq\phi$和$M_2(x)\neq\phi$。由(4.1)和(4.2)，从$\alpha>\gamma$和$\beta<\gamma$可推得对每一$(x,y)\in(X\times Y)\backslash K$，$K\cap[M_1(y)\times M_2(x)]\neq\phi$。容易验证具有指标集$I=\{1,2\}$的定理3.2的其余条件均被满足。因此有$N_1\cap N_2\neq\phi$。故存在$(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$使得$s(\hat{x},\hat{y})>\gamma$和$t(\hat{x},\hat{y})<\gamma$。这与假设(a)相矛盾。故(4.3)式成立。

系4.1 设$(X,\{F_A\})$和$(Y,\{F_A\})$是两个H-空间和$f,g,s,t:X\times Y\to\mathbb{R}$使得

(a) 在$X\times Y$上有$f\leqslant s\leqslant t\leqslant g$；

(b) 对每一$x\in X$，$y\mapsto f(x,y)$在Y的紧子集上是下半连续的和对每一$y\in Y$，$x\mapsto g(x,y)$在X的紧子集上是上半连续的；

(c) 对每一$x\in X$，$t(x,y)$是y在Y上的H-拟凸函数和对每一$y\in Y$，$s(x,y)$是x在X上的H-拟凹函数；

(d) 定理4.1的条件(d)成立。

则极小极大不等式(4.3)成立。

注4.1. 定理4.1和系4.1推广了shih-Tan [10]的定理4(i)。在定理4.1和系4.1中当$f\equiv s\equiv t\equiv g$时，不等式(4.3)变成

$$\min_{y\in N}\sup_{x\in X}f(x,y)=\max_{x\in M}\inf_{y\in Y}f(x,y).$$

由此容易推得

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y).$$

因此定理4.1和系4.1推广了归于Sion[11]的von Neumann型极小极大原理。

参 考 文 献

[1] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Some further generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 132 (1988), 484—490.

[2] Ding, X. P., Continuous selection theorem, coincidence theorem and intersection theorems concerning sets with H-convex sections (submitted).

[3] Ding, X. P., W. K. Kim and K. K. Tan, Applications of minimax inequalities on H-spaces, *Bull. Australian Math. Soc.* (to appear).

[4] Fan, Ky, Sur un théorème minimax, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), 259 (1964), 3925—3928.

[5] Fan, Ky, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, *Math. Ann.*, 163 (1966), 189—203.

[6] Fan, Ky, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, 226 (1984), 519—537.

[7] Lassonde, M., On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics, *J. Math. Anal. Appl.*, 97 (1983), 151—201.

[8] Ma, T. W., On sets with convex sections, *J. Math. Anal. Appl.*, 27 (1969), 413—416.

[9] Shih, M. H and K. K. Tan, Non-compact sets with convex sections, *Pacific J. Math.*, 119 (1985), 473—479.

[10] Shih, M. H. and K. K. Tan, Non-compact sets with convex sections Ⅱ, *J. Math. Anal. Appl.*, 120 (1986), 264—270.

[11] Sion, M., On nonlinear variational inequalities, *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 171—176.

[12] Taraidar, E., On two theorems concerning sets with convex sections, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 38 (1988), 397—400.

Intersection Theorems Concerning Noncompact Sets with H-Convex Sections and Their Applications

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, we prove some intersection theorems concerning noncompact sets with H-convex sections which generalize the corresponding results of Ma, Fan, Tarafdar, Lassonde and Shih-Tan to H-spaces without the linear structure and to noncompact setting. An application to von Neumann type minimax theorems is given.

Key word H-space, H-convex, weakly H-convex, continuous selection theorem, coincidence theorem, minimax theorem