应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

表示湍流场的一种新设想

蔡树棠　　林多敏

（中国科技大学，上海市应用数学和力学所）（上海市应用数学和力学所，上海工业大学）

摘　要

本文仿照量子场论中描述基本粒子产生湮灭的方法来描述湍流中涡旋的产生和消灭．因为当某一基本粒子存在的时候，我们可以认为它是一个不变实体，而湍流中涡旋则在时间过程中不断变化和耗散，所以在类比应用量子场论方法时首先要解决怎样的湍流涡旋可认为是同一个涡旋．根据线性化理论的特点，我们认为在时间过程中按相似性规律变化的湍流涡旋才算是同一个涡旋，而把不具有相似性的涡旋出现或消失，看成是方程(2.6)中相互作用项ϕ所引起的湮灭和产生的结果．然后，我们采用和量子场论相类似的产生算符和消灭算符来描述湍流涡旋系统所处的状态．最后，我们利用原N-S方程中相互作用项来构成涡旋相互作用的“Schrödinger”方程以描述其状态的变化．这样就得类似于量子场论的湍流涡旋相互作用理论．

关键词　湍流涡旋　涡旋产生和湮灭　湍流涡旋相互作用

一、引　言

在均匀各向同性的湍流理论里，R. H. Kraichnan[1,2]曾经发展了直接相互作用的湍流统计理论，同时运用量子场论的计算方法，引入了传播子和Feymann图．然而，在R. H. Kraichnan直接相互作用理论里，所谓大涡旋和小涡旋等等的相互作用，实际上是不同波数的波之间的能量交换，并非真正的涡旋的相互作用．本文仿照量子场论更进一步把涡旋的相互作用具体化．

在量子场论里，某一基本粒子存在时，我们可以认为它是一个不变实体．在湍流理论里，涡旋则在时间过程中不断变化和耗散．因此，为了仿照量子场论，首先要解决怎样的涡旋可以认为是同一个涡旋．根据线性化理论的特点，我们认为在时间过程中按相似性规律变化的涡旋才算是同一个涡旋，而把不具有相似性的涡旋出现或消失，看成是方程（2.6）中相互作用项所引起的湮灭和产生的结果．由此我们定义了没有相互作用时的涡旋实体．然后，我们采用与量子场论一样的产生算符和消灭算符来描述湍流涡旋系统所处的状态．最后，我们再利用原N-S方程中相互作用项来构成涡旋相互作用的“Schrödinger”方程以描述涡旋系统状态的变化．这样，我们就得到类似于量子场论的湍流涡旋相互作用理论．

---

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅰ)论文．1990年2月25日收到．

二、单个自由涡旋

首先，我们讨论在时间过程中按相似性规律变化的单个自由涡旋.

根据N-S方程

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\nabla^2 U_i \tag{2.1a}$$

及连续方程

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j}=0 \tag{2.1b}$$

取雷诺平均值，由(2.1a)和(2.1b)可得雷诺方程为

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial \bar U_i}{\partial t}+\bar U_j\dfrac{\partial \bar U_i}{\partial x_j}\right)=-\dfrac{\partial \bar P}{\partial x_i}+\dfrac{\partial}{\partial x_j}(-\rho\,\overline{u_iu_j})+\mu\nabla^2\bar U_i & (2.2\text{a})\\ \dfrac{\partial \bar U_j}{\partial x_j}=0 & (2.2\text{b})\end{cases}$$

把两式相减，可以得到脉动速度u_i的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\bar U_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+u_j\dfrac{\partial \bar U_i}{\partial x_j}+u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_j}+\nu\nabla^2 u_i & (2.3\text{a})\\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}=0 & (2.3\text{b})\end{cases}$$

为了消去脉动压力p，对运动方程(2.3a)取散度，再利用(2.3b)可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(2\bar U_j u_i+u_iu_j)=-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\overline{u_iu_j}$$

改写为

$$\nabla^2 p=(-2\rho\bar U_m u_n-\rho u_m u_n+\rho\,\overline{u_m u_n})_{,mn} \tag{2.4}$$

于是由(2.4)得到解

$$p=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{(2\rho\bar U_m u_n+\rho u_m u_n-\rho\,\overline{u_m u_n})_{,mn}}{r}dV$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial n}-p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS \tag{2.5}$$

其中 r为对应两点间的距离，dV为体积元，dS为面积元，$\partial/\partial n$为法向导数。我们记脉动压力p的解(2.5)为$p=[p]$。将(2.5)代入(2.3a)，可得

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\bar U_{j_0}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\phi_i+\nu\nabla^2 u_i \tag{2.6}$$

式中 $\bar U_{j_0}$为涡旋相似中心的常数速度，而

$$\phi_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}[p]+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_j}-(\bar U_j-\bar U_{j_0})\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$-u_j\frac{\partial \bar U_i}{\partial x_j}-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_j} \tag{2.7}$$

我们把

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}+\bar{U}_{j_0}\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_j}=\nu\nabla^2 u_{i_0} \tag{2.6$'$}$$

看成是自由涡旋所满足的方程式，而把ϕ_i看成是相互作用项．我们规定自由涡旋的解必须满足相似性条件，也就是这个解必须满足下列形式

$$u_i=\frac{1}{(t+t_0)^n}f_i\left(\frac{x_k-\bar{U}_{k_0}t+x_{k_0}}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\right) \tag{2.8}$$

令

$$\xi_k=\frac{x_k-\bar{U}_{k_0}t+x_{k_0}}{\sqrt{\nu(t+t_0)}} \tag{2.9}$$

于是，有

$$u_i=\frac{1}{(t+t_0)^n}f_i(\xi_k) \tag{2.10}$$

将(2.10)代入(2.6)$'$，则可得

$$\begin{aligned}\text{式左边}&=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\bar{U}_{j_0}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{n}{(t+t_0)^{n+1}}f_i(\xi_k)\\&\quad+\frac{1}{(t+t_0)^n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}f_i(\xi_k)\left[-\frac{1}{2}\frac{x_j-\bar{U}_{j_0}t+x_{j_0}}{\sqrt{\nu}\,(t+t_0)^{3/2}}-\frac{\bar{U}_{j_0}}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\right]\\&\quad+\bar{U}_{j_0}\frac{1}{(t+t_0)^n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}f_i(\xi_k)\frac{1}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\\&=-\frac{n}{(t+t_0)^n}f_i(\xi_k)+\frac{1}{(t+t_0)^n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}f_i(\xi_k)\left[-\frac{1}{2}\xi_j\right]\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\text{式右边}=\nu\nabla^2 u_i=\nu\frac{1}{(t+t_0)^n}\nabla_\xi^2 f_i(\xi_k)\frac{1}{\nu(t+t_0)} \tag{2.12}$$

整理后可得

$$-nf_i(\xi_k)-\frac{1}{2}\xi_j\frac{\partial f_i(\xi_k)}{\partial\xi_j}=\nabla_\xi^2 f_i(\xi_k) \tag{2.13}$$

同样将(2.10)代入连续方程(2.3b)可得

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=\frac{1}{(t+t_0)^n}\frac{1}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\frac{\partial}{\partial\xi_j}f_i(\xi_k)=0$$

化简为

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}f_j(\xi_k)=0 \tag{2.14}$$

若把(2.13)和(2.14)联立求解，就可得到单个自由涡旋解．由此，我们可用单个自由涡旋来定义没有相互作用时的涡旋实体．

三、涡旋系统状态的描述

为了描述涡旋系统的状态，我们可以仿照量子场论[3]用产生算符和消灭算符来进行，即用

$$|\rangle_0$$

表算系统没有涡旋，而用

$$a_\gamma^*$$

表示p涡旋的产生算符，而用

$$a_q$$

表示q涡旋的消灭算符。这样，

$$a_p^*|>_0$$

就是表示有一个p涡旋的状态系统。其他系统状态也可以同样进行。与量子场论一样，我们有以下对易关系

$$[a_q, a_p^*]=\delta_{qp} \tag{3.1}$$

其中方括号的定义为$[A,B]\equiv AB-BA$。

四、涡旋相互作用的引入

在第二节我们讨论了用单个自由涡旋作为涡旋实体，在第三节中我们引入了涡旋状态算符来描述涡旋系统的状态。由此类似于量子场论的情况，对于涡旋系统状态，我们可以其"Schrödinger"方程，即

$$i\frac{\partial}{\partial t}|>=H_i|> \tag{4.1}$$

式中 H_i为涡旋的相互作用算符。当涡旋没有相互作用时，H_i为零。当涡旋发生相互作用时，给出的H_i必须和用N-S方程对界面由于不稳定性所产生的涡旋分离和合并等条件不矛盾为前提。

五、结 束 语

至此，我们初步可以仿照量子场论的方法对湍流涡旋场进行描述。由此可以看出湍流场要比量子场要复杂。式(2.6)中的相互作用ϕ_i将会对不具有相似性的涡旋出现或消失产生影响。为了更好地了解涡旋的各种相互作用，我们需要对涡旋系统的"Schrödinger"方程(4.1)作进一步的讨论。

参 考 文 献

[1] Leslie, D.C, *Developments in the theory of Turbulence*, Oxford University Press, New York (1983).

[2] Hinze, J.O., *Turbulence*, Mcgraw-Hill Book Company (1975).

[3] 朱洪元，《量子场论》，科学出版社 (1960).

[4] 蔡树棠等，湍流研究最近半世纪的一些发展，力学进展，10，1 (1980)，16—33.

A Note on a New Theory of Turbulence

Tsai Shu-tang

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei; Shanghai Institute of Applied Math. and Mech., Shanghai)

Lin Duo-min

(Shanghai Institute of Applied Math. and Mech., Shanghai; Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, the creation and annihilation of turbulent eddies are described as elementary particles in the quantum field theory. An elementary particle may be considered as a solid entity as it exists in quantum theory, but a turbulent eddy is often changed in size and shape with time due to its energy dissipation in a turbulent field. Therefore, in order to apply the method of the quantum field theory to the turbulent field by analogy, the entity of the same eddy should be defined firstly. According to the linearized theory, the turbulent eddies with the similarity character in time duration may be considered as the entity of the same eddy, and the creation and annihilation of turbulent eddies without the similar characters are related to the interaction term ϕ_i in equation (2.6). Then, the creation operator and annihilation operator similar to those in the quantum field theory are used to describe the state of turbulent eddy field. Finally, a "Schrödinger" equation of turbulent eddies is formulated based upon the nonlinear terms in the original N-S equation. Thus, a new turbulent eddy interaction theory similar to the quantum field theory is obtained.

Key words turbulent eddies, creaton and annihilation of turbulent eddies, turbulent eddy interaction