

正交异性理想塑性材料平面应力问题 的裂纹尖端应力场

范季夏 袁祖培

(上海航天局八〇五研究所) (哈尔滨工业大学工程力学系)

(杨桂通推荐, 1989年8月28日收到)

摘 要

本文在裂纹尖端场的应力分量仅仅是 θ 的函数的假设下, 利用 Hill 屈服准则和平衡方程导出了正交异性理想塑性材料平面应力问题中裂纹尖端场的微分方程; 在允许应力不连续线存在的情况下, 把解析表达和数值计算法结合起来, 得到了 I 型和 II 型裂纹尖端的应力场。

关键词 正交异性 塑性 裂纹尖端 应力场

一、引 言

过去在研究问题时, 人们往往把金属材料都视为各向同性的。这种假设在许多情况下(如鲍辛格效应及经压力加工后的材料)是很粗糙的, 并不能真实地反映材料的客观属性。复合材料以其特有的性能得到越来越广泛的应用, 但最常见的纤维增强复合材料的断裂问题的研究也往往局限在弹性阶段。这很不够, 因为断裂发生时, 裂纹尖端常伴随着塑性区域。所以研究各向异性的塑性问题是非常必要的。

Rice 和 Rosengren^[1], Hutchinson^[2,3]给出了各向同性的幂硬化材料与理想塑性材料的 I 型、II 型裂纹的尖端应力场。Shih^[4,5]给出了各向同性的幂硬化材料与理想塑性材料的 I-II 混合型裂纹的尖端应力场。Hayashi^[6]和 Pan, Shih^[7]给出了正交异性幂硬化材料的裂纹尖端应力场。Pan^[8]给出了正交异性理想塑性材料平面应变问题的裂纹尖端应力场。本文将给出正交异性理想塑性材料平面应力问题的 I 型与 II 型裂纹的尖端应力场。

二、基 本 方 程

在平面应力问题中, Hill 屈服准则为

$$(G+H)\sigma_2^2 + (F+H)\sigma_3^2 - 2H\sigma_2\sigma_3 + 2N\tau_{23}^2 = 1 \quad (2.1)$$

其中, F, G, H 和 N 为描写材料正交异性性能的参数, 用沿三个材料主轴的单向拉伸屈

服应力和三个相应的主坐标平面内的纯剪屈服应力表示。

假设 σ_θ , $\tau_{r\theta}$ 和 σ_r 仅是 θ 的函数而与半径 r 无关, 由平衡方程可得

$$\sigma_\theta = f(\theta), \quad \tau_{r\theta} = -f'(\theta)/2, \quad \sigma_r = f''(\theta)/2 + f(\theta) \quad (2.2)$$

通过坐标转换, 把(2.2)代入(2.1)得

$$\begin{aligned} & f''^2(G\cos^4\theta + F\sin^4\theta + H\cos^2 2\theta + 0.5N\sin^2 2\theta) + 2f'f''[G\cos^2\theta - F\sin^2\theta \\ & \quad + (2H - N)\cos 2\theta]\sin 2\theta + 4ff''(F\sin^2\theta + G\cos^2\theta) \\ & \quad + f'^2[(F + G + 4H)\sin^2 2\theta + 2N\cos^2 2\theta] \\ & \quad + 4ff'(G - F)\sin 2\theta + 4f^2(F + G) = 4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

对(2.3)的两边求导后整理可得

$$\begin{aligned} & (f''' + 4f'')\{f''[G\cos^4\theta + F\sin^4\theta + H\cos^2 2\theta + (N/2)\sin^2 2\theta] \\ & \quad + f'[G\cos^2\theta - F\sin^2\theta + (2H - N)\cos 2\theta]\sin 2\theta \\ & \quad + 2f(G\cos^2\theta + F\sin^2\theta)\} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.4)可以分解为下面两个方程

$$f''' + 4f'' = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & f''[G\cos^4\theta + F\sin^4\theta + H\cos^2 2\theta + (N/2)\sin^2 2\theta] + f'[G\cos^2\theta - F\sin^2\theta \\ & \quad + (2H - N)\cos 2\theta]\sin 2\theta + 2f(G\cos^2\theta + F\sin^2\theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.5)和(2.6)即为正交异性理想塑性材料平面应力问题的裂纹尖端应力场的微分方程。

对正交异性理想塑性材料来说, 如果裂纹尖端场存在着应力间断线, 则有

$$\sigma_\theta^+ = \sigma_\theta^-, \quad \tau_{r\theta}^+ = \tau_{r\theta}^-, \quad \sigma_r^+ - \sigma_r^- = \pm(b^2 - 4ac)^{1/2}/a \quad (2.7)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} a &= G\cos^4\theta + F\sin^4\theta + H\cos^2 2\theta + (N/2)\sin^2 2\theta \\ b &= [(1/2)(G + F - 2N)\sin^2 2\theta - 2H\cos^2 2\theta]\sigma_\theta \\ & \quad + [-2G\cos^2\theta + 2F\sin^2\theta + 2(N - 2H)\cos 2\theta]\sin 2\theta \cdot \tau_{r\theta} \\ c &= [F\cos^4\theta + G\sin^4\theta + H\cos^2 2\theta + (N/2)\sin^2 2\theta]\sigma_\theta^2 \\ & \quad + [2F\cos^2\theta - 2G\sin^2\theta + 2(2H - N)\cos 2\theta]\sin 2\theta \cdot \sigma_\theta \tau_{r\theta} \\ & \quad + [(F + G + 4H)\sin^2 2\theta + 2N\cos^2 2\theta]\tau_{r\theta}^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

三、I型裂纹尖端的应力场

I型裂纹尖端应力场的分区如图1所示。当 $\theta = \theta_2$ 时, 应力间断。根据理想塑性理论的固有属性, 没有连续的应力场及相关的特征场能满足裂纹尖端场的自由边界条件($\theta = \pm\pi$), 并满足在 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 上的屈服条件。Hayashi^[6]的幂硬化材料平面应力问题的解, 在材料的硬化程度较低时, 也暗示着 σ_r 的间断性。所以我们在此引进了 σ_r 的应力间断线OC。

区域DOC为均匀应力区, 其解通过解方程(2.5)可得, 各应力分量为

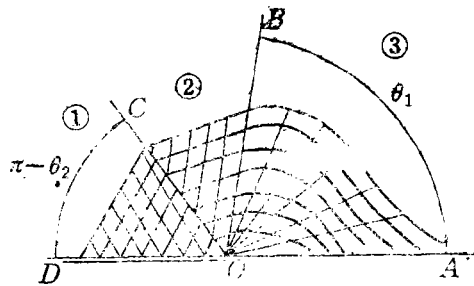


图1 正交异性理想塑性材料平面应力问题的I型裂纹尖端应力特征场

$$\sigma_\theta = -\frac{X}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_r = -\frac{X}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = \frac{X}{2} \sin 2\theta \quad (3.1)$$

在区域COB, 应力也是均匀的, 其解也是方程(2.5)的解. 各应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_r \right\} &= \left[-\frac{X}{2} + \frac{(b'^2 - 4a'c')^{1/2}}{2a'} \right] \pm \left[-\frac{X}{2} \cos 2\theta_2 + \frac{(b'^2 - 4a'c')^{1/2}}{2a'} \right] \\ &\quad \cdot \cos 2(\theta - \theta_2) \pm \frac{X}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta - \theta_2) \\ \tau_{r\theta} &= \left[\frac{X}{2} \cos 2\theta_2 - \frac{(b'^2 - 4a'c')^{1/2}}{2a'} \right] \sin 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad + \frac{X}{2} \sin 2\theta_2 \cos 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中,

当 $\theta = \theta_2$ 时, σ_r 间断

$$\left. \begin{aligned} a' &= G \cos^4 \theta_2 + F \sin^4 \theta_2 + H \cos^2 2\theta_2 + (N/2) \sin^2 2\theta_2 \\ b' &= \frac{X}{2} (\cos 2\theta_2 - 1) \left[\frac{1}{2} (G + F - 2N) \sin^2 2\theta_2 - 2H \cos^2 2\theta_2 \right] \\ &\quad + \frac{X}{2} \sin^2 2\theta_2 [-2G \cos^2 \theta_2 + 2F \sin^2 \theta_2 + 2(N - 2H) \cos 2\theta_2] \\ c' &= \frac{X^2}{4} (1 - \cos 2\theta_2)^2 \left[F \cos^4 \theta_2 + G \sin^4 \theta_2 + H \cos^2 2\theta_2 + \frac{N}{2} \sin^2 2\theta_2 \right] \\ &\quad - \frac{X^2}{4} \sin^2 2\theta_2 (1 - \cos 2\theta_2) [2F \cos^2 \theta_2 - 2G \sin^2 2\theta_2 + 2(2H - N) \cos 2\theta_2] \\ &\quad + \frac{X^2}{4} \sin^2 2\theta_2 [(F + G + 4H) \sin^2 2\theta_2 + 2N \cos^2 2\theta_2] - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

区域BOA的特征场是扇形场, 在OA上两族特征线合并为一族. 此区域中应力是非均匀的, 是方程(2.6)的解. 方程(2.6)的解析解很难得到, 本文用数值法来解. 对(2.6)进行一下变换, 令

$$Y(1) = \theta, \quad Y(2) = f, \quad Y(3) = f' \quad (3.4)$$

则方程(2.6)变成

$$\left. \begin{aligned} dY(1)/d\theta &= 1, \quad dY(2)/d\theta = Y(3) \\ \frac{dY(3)}{d\theta} &= \frac{-Y(3)[G \cos^2 \theta - F \sin^2 \theta + (2H - N) \cos 2\theta] \sin 2\theta - 2Y(2)(G \cos^2 \theta + F \sin^2 \theta)}{G \cos^4 \theta + F \sin^4 \theta + H \cos^2 2\theta + (N/2) \sin^2 2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

(3.5)是一个微分方程组, 可以较方便地对其运用数值法解, 其解和(2.6)的解等价.

我们以一种材料为例, 给出此材料在区域BOA的某些点的数值解, 见表1.

对方程(3.5), 如取步长为0.1rad, 初值为 $Y(1) = 0, Y(2) = [(G + H)/(FG + FH + GH)]^{1/2}, Y(3) = 0$, 则可得如下的结果

表1

I 型裂纹尖端应力场区域BOA的应力解
($X=150\text{MPa}$, $X:Y:Z:S_{xy}=1:2:1:1.33$)

θ (度)	$\sigma_\theta(\text{MPa})$	$\sigma_r(\text{MPa})$	$\tau_{r,\theta}(\text{MPa})$
0.0	310.0	38.75	0.0
11.46	299.27	45.55	53.01
22.92	268.56	68.21	98.82
34.38	221.98	98.56	131.50
45.84	165.59	128.89	147.53
57.30	106.21	146.58	146.82
68.76	49.83	133.84	133.60
80.22	-0.21	70.87	117.03
81.37	-6.25	59.10	115.29

此时, $\theta_1=81.4^\circ$, $\theta_2=138^\circ$

四、II 型裂纹尖端应力场

II 型裂纹尖端应力场的分区及特征场如图 2 所示。对 II 型裂纹尖端的应力场做和 I 型的裂纹尖端应力场相似的处理, 则可得各区域的解为

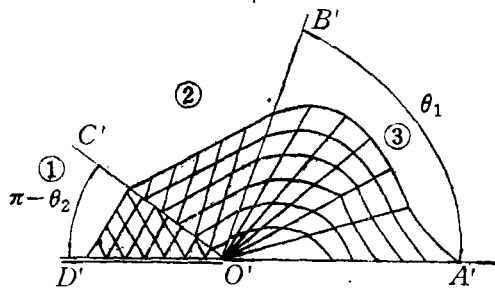


图2 II 型裂纹的尖端应力场分区

在区域 $D'O'C'$,

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{X}{2} (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r,\theta} = -\frac{X}{2} \sin 2\theta \quad (4.1)$$

在区域 $C'O'B'$,

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} &= \left[\frac{X}{2} - \frac{(b''^2 - 4a''c'')^{1/2}}{2a''} \right] \pm \left[\frac{X}{2} \cos 2\theta_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(b''^2 - 4a''c'')^{1/2}}{2a''} \right] \cos 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad \mp \frac{X}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta - \theta_2) \\ \tau_{r,\theta} &= \left[-\frac{X}{2} \cos 2\theta_2 + \frac{(b''^2 - 4a''c'')^{1/2}}{2a''} \right] \sin 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad - \frac{X}{2} \sin 2\theta_2 \cos 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned}
 a'' &= G\cos^4\theta_2 + F\sin^4\theta_2 + H\cos^2 2\theta_2 + (N/2)\sin^2 2\theta_2 \\
 b'' &= \frac{X}{2}(1 - \cos 2\theta_2) \left[\frac{1}{2}(G + F - 2N)\sin^2 2\theta_2 - 2H\cos^2 2\theta_2 \right] \\
 &\quad + \frac{X}{2}\sin^2 2\theta_2 [2G\cos^2 \theta_2 - 2F\sin^2 \theta_2 - 2(N - 2H)\cos 2\theta_2] \\
 c'' &= \frac{X^2}{4}(1 - \cos 2\theta_2)^2 \left[F\cos^4 \theta_2 + G\sin^4 \theta_2 + H\cos^2 2\theta_2 + \frac{N}{2}\sin^2 2\theta_2 \right] \\
 &\quad - \frac{X^2}{2}(1 - \cos 2\theta_2)\sin^2 2\theta_2 [F\cos^2 \theta_2 - G\sin^2 \theta_2 + (2H - N)\cos 2\theta_2] \\
 &\quad + \frac{X^2}{4}\sin^2 2\theta_2 [(F + G + 4H)\sin^2 2\theta_2 + 2N\cos^2 2\theta_2] - 1
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

在区域 $B'O'A'$ ，也给出一种材料部分点的数值解。

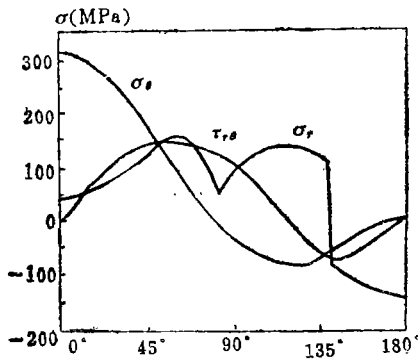
表2 II型裂纹尖端应力场区域 $B'O'A'$ 的数值解
 ($X=150\text{MPa}$, $X:Y:Z:S_{xy}=1:2:1:1.33$)

θ (度)	$\sigma_\theta(\text{MPa})$	$\sigma_r(\text{MPa})$	$\tau_{r\theta}(\text{MPa})$
0.0	0.0	0.0	112.50
11.46	-44.34	4.42	107.56
22.92	-84.82	5.44	93.48
34.38	-118.18	-0.06	72.36

此时, $\theta_1=34.38^\circ$, $\theta_2=165.6^\circ$

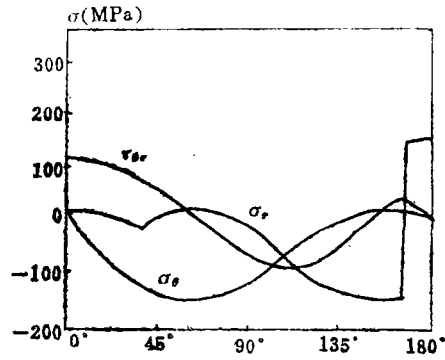
五、应力解的曲线

图3, 图4给出了I型裂纹和II型裂纹的尖端应力场全场的应力分布曲线。



材料 $X=150\text{MPa}$, $X:Y:Z:S_{xy}=1:2:1:1.33$

图3 I型裂纹平面应力问题的尖端场应力解



材料 $X=150\text{MPa}$, $X:Y:Z:S_{xy}=1:2:1:1.33$

图4 II型裂纹平面应力问题的尖端场应力解

参 考 文 献

- [1] Rice, J. R. and G. R. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 1 (1968). 1—12.
- [2] Hutchinson, J.W., Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening

- material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 1 (1968), 13—31.
- [3] Hutchinson, J. W., Plastic stress and strain field at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 3 (1968), 337—347.
- [4] Shih, C. F., Small-scale yielding analysis of mixed mode crack plane strain problem, ASTM STP 560 (1974), 187—240.
- [5] Shih, C. F., Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems, Ph. D. Thesis Harvard University (1973).
- [6] Hayashi, K., Singular behavior at the tip of a crack in an elastic-plastic material with plastic orthotropy, *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, 2 (1979), 163—174.
- [7] Pan, J. and C. F. Shih, Plane-strain crack-tip fields for power-law hardening orthotropic materials, *Mechanics of Materials*, **5** (1986), 299—316.
- [8] Pan, J., Plane-strain crack-tip stress field for anisotropic perfectly-plastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **34**, 6 (1986), 617—635.

Plane-Stress Crack-Tip Stress Fields for Orthotropic Perfectly-Plastic Materials

Fan Ji-xia

(805 Research Institute, Shanghai Astronautics Bureau, Shanghai)

Yuan Zu-pei

(Department of Engineering Mechanics, Harbin Institute of
Technology, Harbin)

Abstract

Under the hypothesis that the stress components of crack-tip fields are only the functions of θ , the differential equations of plane-stress crack-tip stress fields for orthotropic perfectly-plastic materials are obtained by using Hill's yield condition and equilibrium equations. By combining the general analytical expression with the numerical method the crack-tip stress fields for orthotropic perfectly-plastic materials for plane stress are presented.

Key words orthotropic, plasticity, crack-tip, stress field