应用数学和力学，第12卷第4期（1991年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

局部Lipschitz方程解的叠代逼近*

邹 保 康

（上海同济大学，1989年10月27日收到）

摘 要

设$X=L_p$或l_p，$(p\geqslant 2)$，$T:D(T)\to X$是局部 Lipschitz 和严格增殖算子。本文给出非线性方程$Tx=y$的解的叠代逼近并讨论了局部Lipschitz和严格伪收缩映射不动点的叠代逼近。

关键词 局部Lipschitz算子 增殖性 叠代逼近 伪收缩 规范化对偶映射

一、引 言

设H是实的Hilbert空间，算子T映$D(T)$到H，如果对$D(T)$中的任意两个元素，存在常数$k>0$，使得

$$(Tx-Ty,\ x-y)\geqslant k\|x-y\|^2 \tag{1.1}$$

成立，则称T为严格增殖算子。关于增殖算子的理论是由Kato[4]和 Browder[1] 平行地引入的，其最初的结果是由Browder在讨论初值问题

$$du/dt+Tu=0,\ u(0)=u_0 \tag{1.2}$$

时给出的。

众所周知，问题(1.2)可解的条件是有关的算子T是局部Lipschitz 和增殖的[1]。这类非线性方程$Tx=y$在Hilbert空间内解的叠代逼近已有较多的讨论[1][3][7][8]。由于Banach 空间并不具备平行四边形公式的性质，给我们在 Banach 空间内讨论这类问题带来一定的困难，本文将给出Banach空间解的叠代逼近。

文中，首先涉及讨论非线性方程$Tx=y$解的叠代逼近，这里所述的算子T 是在所谓的上弱平行四边形空间的一类Banach空间上的局部Lipschitz和严格增殖的算子。这类算子的条件实际上弱于相应的Lipschitz和严格增殖算子，因而得到了叠代逼近收敛的某些较弱条件。其次，设X是 Banach 空间，映射 $T:K\to K$ 是严格伪收缩算子 （请参看本文第二节中的定义）。Bogin揭示了严格伪收缩性和严格增殖性之间的联系，并证明了T是严格伪收缩算子的充分必要条件是$(I-T)$是严格增殖的。他进一步证明了Banach 空间上关于 Lipschitz 和严格伪收缩算子的不动点定理，因而得到了Browder关于 Lipschitz 和严格增殖算子的映射定

* 徐次达、吴家龙推荐。

理。因此，增殖算子的映射定理是和伪收缩性的不动点理论密切相关的。

Chidume[3]构造了由Mann引入的Lipschitz和严格伪收缩映射强收敛到该映射不动点的叠代逼近，本文将上述一些结果推广到局部Lipschitz算子上去。

二、预 备 知 识

设X为Banach空间，J表示映X到2^{X^*}的规范化对偶映射，即

$$J(x)=\{f^*\in X^*:\|f^*\|^2=\|x\|^2=(x,f^*)\} \tag{2.1}$$

其中X^*表示X的对偶空间，$(\cdot,\ \cdot)$表示广义的对偶对。如果X^*是严格凸的，则J是单值的，如果X^*是一致凸的，则J在X的有界集合上是一致连续的[3]。因此，单值规范化对偶映射j满足下述条件

$$(j(x),\ x)=\|j(x)\|\|x\|,\ \|j(x)\|=\|x\|,\qquad \forall x\in X \tag{2.2}$$

其中$j(x)$是X^*的一个元。

容易验证，规范化对偶映射是正齐次的，即对任意实数$\lambda>0$，有下列等式成立：

$$J(\lambda x)=\lambda J(x),\qquad \forall x\in X \tag{2.3}$$

设X是Banach空间，$K\subseteq X$，算子$T:K\to X$，如果对于K中任意两元x,y，存在$j(x-y)\in J(x-y)$，使得对于某个常数$k>0$，有

$$(Tx-Ty,\ j(x-y))\geqslant k\|x-y\|^2 \tag{2.4}$$

成立，则称T是严格增殖的。不失一般性，可假设$k\in(0,1)$。

设X是Banach空间，$K\subseteq X$，算子$T:K\to K$，如果对于K中任意两个元x，y和$r>0$，有$t>1$使得不等式

$$\|x-y\|\leqslant\|(1+r)(x-y)-rt(Tx-Ty)\| \tag{2.5}$$

成立，则称T是严格伪收缩的。如果上述定义中，$t=1$，则称T是伪收缩的。

Bogin证明了T是严格伪收缩的充分必要条件是$(I-T)$是严格增殖的[3]。

如果Banach空间中任意两个元x，y能够满足下列不等式

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2\leqslant\|x+y\|^2+\alpha\|x-y\|^2 \tag{2.6}$$

则称X为关于常数$\alpha>0$的上弱平行四边形空间，简记作$UWPS(\alpha)$。

Bynum证明了L_p或l_p，$p\geqslant 2$是$UWPS(p-1)$[2]，并进而证明了X是$UWPS(\alpha)$的充分必要条件是：存在$j(y)\in J(y)$，对于X的任意两个元x，y，不等式

$$\|x+y\|^2\leqslant\alpha\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,j(y)) \tag{2.7}$$

成立，其中$J(y)$是X的规范化对偶映射。对于$X=L_p$或l_p，$p\geqslant 2$，J是单值的，不等式(2.6)可表示为

$$\|x+y\|^2\leqslant(p-1)\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,j(y)) \tag{2.8}$$

在以后的讨论中，总假设L_p或l_p，$p\geqslant 2$至少具有两个有限正测度的不相交子集。在这种情况下，T的增殖性（或单调性）可表示为

$$\mathrm{Re}(Tx-Ty,\ J(x-y))\geqslant 0 \tag{2.9}$$

其中x，y为$D(T)$中的任意两个元[4]。

如果映射$T:D(T)\to X$，对于$D(T)$中的任意两个元x，y和某个常数$L>0$，有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant L\|x-y\| \tag{2.10}$$

则称T是关于常数L的Lipschitz算子。

如果对于$D(T)$中的任意一个元z，存在$\varepsilon>0$，使得对于$D(T)$中任意两个元x，y和某个常数$L>0$，只要$\|x-z\|\leqslant\varepsilon$和$\|x-y\|\leqslant\varepsilon$，就有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant L\|x-y\| \tag{2.11}$$

则称$T:D(T)\to X$是局部Lipschitz算子。显然，Lipschitz算子是局部 Lipschitz 算子，反之不然。

三、主 要 结 果

在证明主要定理时，需要下列引理：

引理 1 设X是Banach空间，如果算子$T:D(T)\to X$是局部Lipschitz 和严格增殖的，则对于$D(T)$中的任意一点z，存在一个闭凸子域$B(z)\subset D(T)$，使得T在$B(z)$上是Lipschitz 算子。

证明 设$z\in D(T)$为任意一点，由于T是局部 Lipschitz 算子，对于给定的$\varepsilon>0$，可取$\eta\in(0,\varepsilon]$，只要$\|x-z\|\leqslant\eta$，$\|y-z\|\leqslant\eta$，有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant L\|x-y\|$$

令

$$B_\eta(z)=\{x\in X:\|x-z\|\leqslant\eta\}$$

即$B_\eta(z)$是以z为中心，半径为η的闭球域。

由于T的增殖性，在它相应的定义域内的每个内点处是局部有界的[7]，因此存在$\zeta>0$，使得$T[B_\zeta(z)]$在闭球域$B_\zeta(z)=\{x\in X:\|x-z\|\leqslant\zeta\}$上是有界的。

置

$$B(z)=B_\eta(z)\cap B_\zeta(z)$$

$B(z)$是含于$D(T)$内的闭凸子域，因此$T[B(z)]$是有界的，T在$B(z)$上是关于同一常数L 的 Lipschitz算子。

引理 2 设X是Banach空间，算子$T:D(T)\to X$是连续的和严格增殖的，则非线性方程$Tx=y$，$y\in X$具有解。

本引理是Morales所证明定理的直接结果，请参看[5]。

定理 1 设$X=L_p$或l_p，$p\geqslant 2$。$T:D(T)\to X$是局部Lipschitz算子且$L\geqslant 1$和严格增殖的，则存在包含非线性方程$Tx=y$的解q的某个闭域$B(q)$。对于$B(q)$内任意一点x_0，令 $x_{n+1}=x_n+\lambda r_n(n=0,1,2,\cdots)$，其中$r_n$为$n$次叠代的余项，可适当选取加权参数$\lambda$，使得序列$\{x_n\}_n^\infty$强收敛于解$q$。

证明 再提及不失一般性$k\in(0,1)$，因为T是局部Lipschitz算子，故为连续的，由引理2立即得出非线性方程$Tx=y$有解q。

由引理1，存在闭子域$B(q)$，使得T在$B(q)$上是具有常数$L\geqslant 1$的Lipschitz算子。

任取$x_0\in B(q)$作为初始值，令序列$\{x_n\}_0^\infty$满足下列条件：

$$x_{n+1}=x_n+\lambda r_n \tag{3.1}$$

$$r_n=q-Tx_n \tag{3.2}$$

$$r_{n+1}=q-Tx_{n+1}=r_n+Tx_n-Tx_{n+1}=r_n+[-(Tx_{n+1}-Tx_n)] \tag{3.3}$$

因为L_p或l_p，$p\geqslant 2$是$UWPS(p-1)$，由(2.8)和(3.3)得

$$\|r_{n+1}\|^2\leqslant\|r_n\|^2+(p-1)\|Tx_{n+1}-Tx_n\|^2-2(Tx_{n+1}-Tx_n,\ j(r_n)) \tag{3.4}$$

由$J(y)$的正齐次性，对于$\lambda>0$，有

$$\|r_{n+1}\|^2\leqslant\|r_n\|^2+(p-1)\|Tx_{n+1}-Tx_n\|^2 \\ -\frac{2}{\lambda}(Tx_{n+1}-Tx_n,\ j(\lambda r_n)) \tag{3.5}$$

又由于T在$B(q)$上是Lipschitz算子，得到

$$\|Tx_{n+1}-Tx_n\|^2\leqslant L^2\|x_{n+1}-x_n\|^2=\lambda^2L^2r_n^2 \tag{3.6}$$

由严格增殖性(2.4)，存在常数$k>0$，对于x_{n+1}，$x_n\in B(q)$有

$$(Tx_{n+1}-Tx_n,\ j(\lambda r_n))\geqslant k\|x_{n+1}-x_n\|^2=k\|r_n\|^2\lambda^2 \tag{3.7}$$

因此，

$$\|r_{n+1}\|^2\leqslant\|r_n\|^2+\lambda^2L^2(p-1)\|r_n\|^2-2k\lambda\|r_n\|^2 \\ =[1+\lambda^2L^2(p-1)-2k\lambda]\|r_n\|^2 \tag{3.8}$$

令 $1+\lambda^2L^2(p-1)-2k\lambda\in(0,1)$，即当$\lambda$满足条件

$$0<\lambda<2k/(p-1)L^2 \tag{3.9}$$

则实数列$\{\|r_n\|\}_0^\infty$是单调减少的且$\|r_n\|\geqslant0$，因而$\{x_n\}_0^\infty$强收敛于解q。

容易知道，如果λ是小于$2k/(p-1)L^2$的正数，则序列$\{x_n\}_0^\infty$和具有公比

$$\delta=[1+\lambda^2L^2(p-1)-2k\lambda]^{\frac{1}{2}}<1 \tag{3.10}$$

的几何级数有相同的收敛速度。

定理 2 设$X=L_p$或l_p，$p\geqslant2$，算子S是局部 Lipschitz 且$L\geqslant1$和严格伪收缩的，则存在闭凸子域$B(q)\subset D(S)$，其中q为非线性方程$Sx=y$的解。对于任一点$x_0\in B(q)$，叠代逼近$x_{n+1}=x_n+\lambda r_n(n=0,1,2,\cdots)$，$r_n$为$n$次叠代的余项，可适当选取加权系数$\lambda$，使得序列$\{x_n\}_0^\infty$强收敛于解$q$。

证明 S是严格伪收缩的充分必要条件是$T=I-S$是严格增殖的[3]。

S的严格增殖性表示对于$D(S)$的任意两点x，y和$r>0$，$t>0$有

$$\|x-y\|\leqslant\|(1+r)(x-y)-rt(Sx-Sy)\| \\ =\|(1+r)(x-y)-r(tSx-tSy)\| \tag{3.11}$$

因此，映射tS是伪收缩的，由[1]，映射$I-tS$是单调的。对于$D(S)$的任意两点x,y，必有$j(x-y)\in J(x-y)$，使得

$$(((I-tS)x,\ (I-tS)y),\ j(x-y))\geqslant0 \tag{3.12}$$

又因为$I-tS=I-t(I-T)=tT-(t-1)I$，由(3.12)得到

$$(((I-tS)x,\ (I-tS)y),\ j(x-y)) \\ =t(Tx-Ty,\ j(x-y))-(t-1)(x-y,\ j(x-y))\geqslant0$$

即

$$(Tx-Ty,\ j(x-y))\geqslant\frac{t-1}{t}(x-y,\ j(x-y))=\frac{t-1}{t}\|x-y\|^2 \tag{3.13}$$

对比(3.13)与(2.4)，得到$k=(t-1)/t$，令$\lambda<2(t-1)/(p-1)tL^2$且λ为正数，根据定理1，定理2的断言得证。

以下，转入讨论逼近局部Lipschitz和严格伪收缩算子的不动点的叠代过程。Chidume[3]研究了Lipschitz和严格伪收缩算子不动点的叠代逼近。现将该结果推广到局部Lipschitz算子上去。

定理 3 设T是映$D(T)$的任何子集于自身的局部Lipschitz和严格伪收缩算子，实数列$\{c_n\}$适合：

(i) $0<c_n<1,\ n\geq 1$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\infty$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2<+\infty$,

如果序列$\{x_n\}_0^{\infty}$满足$x_{n+1}=(1-c_n)x_n+c_nTx_n(n=0,1,2,\cdots)$，任取$x_0\in B(q)$，其中 q 为T的不动点，则$\{x_n\}_0^{\infty}$强收敛于q。

定理3的证明相似于Chidume定理的证明，在该证明中，我们用$B(q)$代替其中的K即可。

参 考 文 献

[1] Browder, F. E., Nonlinear mapping of nonexpansive and accretive type in Banach space, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 875—882.

[2] Bynum, W.L., Weak parallelogram laws for Banach spaces, *Canad. Math. Bull.*, 19 (1976), 269—275.

[3] Chidume, C. E., Iterative approximation of fixed points of Lipschitzian strictly pseudo-contractive mapping, *Pro. Amer. Math. Soc.*, 99, 2 (1987), 283—288.

[4] Kato, T., Nonlinear semigroups and evolution equation, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (1967), 508—520.

[5] Morales, C., Pseudo-contractive mappings and Leray Schauder boundary conditions, *Comment. Math. Univ. Carolina*, 20 4 (1979), 745—756.

[6] Patter, W. M., Iterative methods for the solution of a linear operator equation in Hilbert space: A survey, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1974).

[7] Rhoades, B. E., Fixed point iteration using infinite matrices, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 196 (1974), 161—178.

[8] Rockafellar, R. T., Local boundness of nonlinear monotone operator, *Michigan Math. J.*, 16 (1969), 397—407.

Iterative Approximation of the Solution of a Locally Lipschitzian Equation

Zou Bao-kang

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

Suppose $X=L_p$ (or l_p) $p>2$, $T:D(T)\to X$ is a locally Lipschitzian and strictly accretive operator. In this paper, the iterative approximation of the solution of nonlinear equation $Tx=y$ is given and the iterative approximation of a fixed point of a locally Lipschitzian and strictly pseudo-contractive mapping is discussed.

Key words locally Lipschitzian operator, accretiveness, iterative approximation, pseudo-contraction, normalized duality mapping