

# 弹性拱振动失稳的突变模型\*

沈茂山 魏德敏

(太原工业大学, 1989年11月9日收到)

## 摘 要

本文是将突变理论应用于工程结构的动力稳定性的一个尝试。作者不仅得到弹性拱振动失稳的突变模型, 而且给出发生失稳的条件。

**关键词** 突变 尖点突变 滞后 不可达性 分歧点集

## 一、引 言

R. Thom创立的突变理论是关于奇异点的理论。突变理论提供了一个普遍适用的, 研究各种突变和不连续现象的方法。由于自然界广泛存在着由量变到质变, 由渐变到突变的现象, 因此突变论引起各领域专家和学者的兴趣。国内力学界也开始出现了一些介绍性和应用性的文献<sup>[2~4]</sup>。本文研究弹性扁拱振动失稳问题的突变理论。

结构的动力稳定性是工程界具有实际意义的重要课题。目前, 虽有不少研究工作, 但亟待解决的问题仍然不少。本文试图将突变理论应用于振动失稳问题。我们知道, 有些结构的失稳是在平衡状态下突然发生的, 而这正是突变现象的特点。为了了解失稳发生的临界状态, 我们经过简单的数学变换, 可以得到弹性扁拱振动失稳的尖点突变模型, 从而不仅可以给出振动失稳的临界点, 而且可以经过进一步分析得出发生失稳的条件。

## 二、基本关系式

考虑受竖向振动荷载作用的拱, 其平衡方程为:

$$\partial V / \partial x = -q(x, t) + \rho w \quad (2.1)$$

$$\partial M / \partial x = V - H \partial w / \partial x \quad (2.2)$$

其中,  $q(x, t)$  为单位长度拱上的垂直荷载;  $\rho$  为拱的线密度;  $H$ ,  $V$  和  $M$  分别为横截面上的水平内力, 竖向内力和弯矩;  $w$  为拱挠度。

对于扁拱, 根据 Euler-Bernoulli 假设, 并考虑线性阻尼, 可得:

$$EI(w'''' - w_0''''') + \frac{EA}{2L} w' \int_0^L [(w_0')^2 - (w')^2] dx + c_0 \dot{w}$$

\* 杨桂通推荐。

$$+q(x, t) + \rho \dot{w} = 0 \quad (2.3)$$

其中,  $E$ 为弹性模量,  $A$ 和 $I$ 分别为截面面积和惯性矩,  $L$ 为拱的跨度,  $c_0$ 为阻尼系数, 并且  $c_0 > 0$ ,  $w_0$ 为拱的初始位形, “ $\cdot$ ”表示对时间 $t$ 求导, “ $'$ ”表示对 $x$ 求导。

下面考虑工程中最常用的二次抛物线拱(圆拱推导完全类似), 其拱轴线方程为:

$$w_0(x) = \frac{4H_0x}{L^2}(L-x) \quad (2.4)$$

式中,  $H_0$ 为拱的矢高。

两端铰支的边界条件为:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad w''(0, t) = w''(L, t) = 0 \quad (2.5)$$

荷载为:

$$q(x, t) = F \cos \Omega t \sin(\pi x/L) \quad (2.6)$$

我们可以假定:

$$w(x, t) = f(t) \sin(\pi x/L) \quad (2.7)$$

并将上式代入(2.3)式, 整理得到:

$$\ddot{f} + k_0 \dot{f} + p_0 f + a f^3 + F \cos \Omega t = 0 \quad (2.8)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= c_0/\rho > 0, \quad a = \pi^4 E A / 4 \rho L^4 \\ p_0 &= \frac{E \pi^2}{\rho L^4} \left( \pi^2 I - \frac{8A}{3} H_0^2 \right) > 0 \\ \Omega &= \sqrt{p_0} + \omega, \quad \text{且 } \omega \text{ 很小} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

当  $k_0$ ,  $a$ ,  $\omega$  均很小时, 弱非线性方程式(2.8)的解接近其线性方程的解。故可设(2.8)式之解为:

$$f(t) = B \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.10)$$

将  $f$ ,  $\dot{f}$  和  $\ddot{f}$  代入(2.8)式, 忽略高阶小量和  $\cos 3\Omega t$  项, 整理后得到:

$$\operatorname{tg} \phi = 4k_0 / (3aB^2 - 8\omega) \quad (2.11)$$

$$B^2(3aB^2/4 - 2\omega)^2 + k_0^2 B^2 = F^2 \quad (2.12)$$

(2.12)式表示的是以  $B^2$  为状态变量,  $a$  和  $\omega$  为控制变量的尖点突变。图 1 所示为该尖点突变的平衡曲面  $M$  和控制平面  $N$ 。

由(2.12)式不难求出两个尖点  $G_1$ ,  $G_2$  的位置为

$$(a, \omega) = \pm (32\sqrt{3} k_0^3 / 27 F^2, \sqrt{3} k_0 / 2) \quad (2.13)$$

对于我们的具体问题  $a \geq 0$ , 以下进行详细的讨论。

### 三、振动失稳模型的讨论

#### 1. 对于无限长杆

$L \rightarrow \infty$ , 则  $a = 0$ , 从而得到平衡曲面  $M$  的截线方程为:

$$B^2(4\omega^2 + k_0^2) = F^2 \quad (3.1)$$

从图 2 可以看出, 一个  $\omega$  只与一个  $B^2$  对应, 而且所得截线是一条关于  $B^2$  轴对称的正则曲线。因此,  $\omega$  的连续变化只会引起  $B^2$  的光滑变化。

#### 2. $0 < a < 32\sqrt{3} k_0^3 / 27 F^2$

若取  $a = 4k_0^3 / 3 F^2$ , 得到平衡曲面  $M$  的截线方程为:

$$B^2(k_0^3 B^2 / F^2 - 2\omega)^2 + k_0^2 B^2 = F^2 \quad (3.2)$$

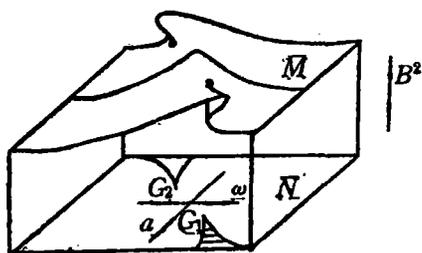


图1 方程(2.12)表示的尖点突变

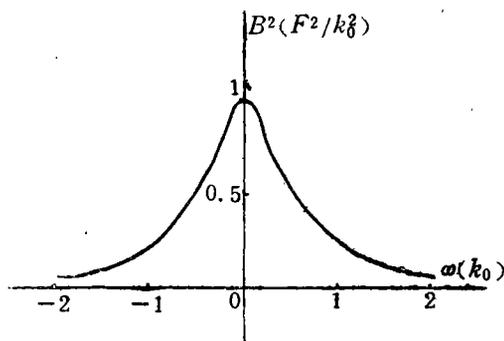


图2  $\alpha=0$ 时平衡曲面 $\bar{M}$ 的截线

由图 3 显然可以看出, 所得截线仍是一条正则曲线。 $\omega$ 的连续变化不会引起 $B^2$ 的突然变化。

3.  $a > 32\sqrt{3}k_0^3/27F^2$

若取 $a=4k_0^3/F^2$ , 则得到平衡曲面 $\bar{M}$ 的截线方程为:

$$\omega = (3k_0^3 B^4 / F^2 \pm \sqrt{F^2 B^2 - k_0^3 B^4}) / 2B^2 \quad (3.3)$$

显然,  $\omega$ 与 $B^2$ 不是一一对应的。图 4 表示的是这条非正则曲线。当 $\omega$ 由小逐渐增大到 $1.5k_0$ 附近,  $B^2$ 会突然有限减小, 而 $\omega$ 由大逐渐减小到 $1.2k_0$ 附近,  $B^2$ 又会突然有限增大。

在尖点突变的模式图 1 上, 设想控制变量 $a$ 和 $\omega$ 在控制平面上沿某一路径从左向右穿越

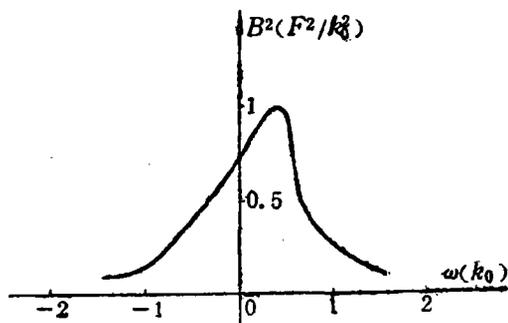


图3  $a=4k_0^3/3F^2$ 时平衡曲面 $\bar{M}$ 的截面

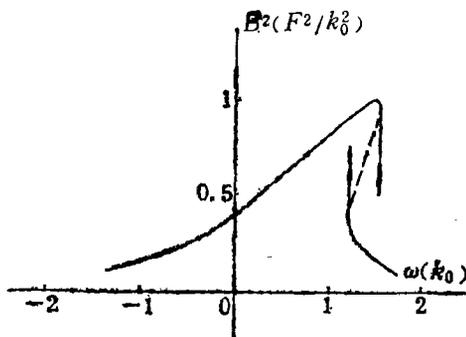


图4  $a=4k_0^3/F^2$ 时平衡曲面 $\bar{M}$ 的截面

阴影区域。在未进入该区域时, 控制平面上的一点即一个控制态, 对应唯一的一个振幅 $B^2$ ; 进入该区域后, 则一个控制态对应二至三个振幅, 可结构实际上保持一个振幅; 但当控制变量在穿出区域边界的那一瞬间, 微小的控制变量变化会引起结构振幅的突然有限减小。出了阴影区域, 结构又只有唯一的一个振幅。

反之, 当控制变量由右向左穿越阴影区域时, 会发生类似现象。只是当控制变量穿出边界的瞬时发生的跳跃是振幅 $B^2$ 的突然有限增大。

另外, 从图 4 中可以看出, 以上两种穿越方式发生突跳的位置并不相同, 这在突变理论中称为“滞后”现象。而且, 上述两个突跳之间的振幅 $B^2$ 相应的状态是实际上不可能达到的(用虚线表示), 这称为“不可达性”。

#### 四、结 论

由以上讨论可以得出以下两点结论:

1.  $0 \leq a < 32\sqrt{3k_0^3}/27F^2$ , 不会发生振动的突变失稳,  $a > 32\sqrt{3k_0^3}/27F^2$ , 才有可能发生振动突变失稳。而尖点  $G_1$  正是发生突变失稳的临界点。

2. 振幅  $B^2$  的跳跃现象只发生在阴影区域的边界线上。该边界线就是尖点突变的分歧点集, 满足方程:

$$r^2 + s^2 = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{其中: } r = \frac{8}{9a^2} \left( \frac{64\omega^3}{81a} + \frac{16k_0^2\omega}{9a} - F^2 \right), \quad s = \frac{16}{81a^2} (3k_0^2 - 4\omega^2) \quad (4.2)$$

我们把方程(4.1)作为发生失稳的条件。

作者对杨桂通教授的直接指导和武际可教授提出的宝贵意见表示深切的感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Poston, T., *Catastrophe Theory and Its Application*, Pitman, London (1978).
- [2] 凌复华, 突变理论——历史、现状和展望, 力学进展, 14, 4 (1984).
- [3] 刘式达、刘式适, 大气对流的分岔和突变模型, 力学学报, 16 (1984), 10—18.
- [4] 苗天德、艾南山, 滑坡发育的突变模型, 兰州大学学报(自然科学版), 24, 4 (1988).

## A Catastrophic Model for Vibrational Buckling of Elastic Arches

Shen Mao-shan    Wei De-min

(Taiyuan University of Technology, Taiyuan)

### Abstract

This paper represents an attempt at the application of catastrophe theory to the dynamic stability of engineering structures. The authors not only obtain a catastrophic model of vibrational buckling of elastic arches, but also give the critical condition of losing stability.

**Key words:** catastrophe, cusp catastrophe, hysteresis, inaccessibility, bifurcation set