

# 一种有效的边界元/有限元混合法迭代算法 及其在回转体自由扭振分析中的应用\*

王秀喜 陈 锋 钱 江

(中国科学技术大学, 1989年11月13日收到)

## 摘 要

本文给出一种新的边界元/有限元混合法迭代算法, 基本做法是将近似的固有频率值代入自由振动问题的基本解, 按一般混合法列式, 通过迭代逐步修正近似解的值。这种算法避开了一般边界元法需要求解非代数特征值问题的困难, 同时数值结果的精度基本上不依赖于区域内单元网格的疏密程度, 这都给实际计算带来很多方便。应用于回转体自由扭振问题的分析, 得到令人满意的数值结果。

**关键词** 边界元/有限元混合法 迭代 自由振动 回转体

## 一、引 言

解振动特征值问题的边界积分方程基本上可分为两种类型。一种是选取动力学问题的基本解, 最后得到的积分方程中只含边界上的积分; 离散后是标准的边界元法公式, 具有降维, 从而减少求解自由度的优点。但待求的固有频率(特征值)包含在积分方程的核函数中, 所以归结为求解非代数特征值问题。通常用特征值搜索法求解, 这种方法实用中很不经济。另一种方法是以静力学问题的基本解为基础, 建立混合型积分方程, 即方程中既有边界积分项, 又有区域积分项, 离散后得到代数特征值方程。对这类问题已有成熟的求解方法和实用程序。但是数值结果的精度受域内离散网格疏密程度的影响很大。为了提高精度往往需要在区域内划分较密的网格, 这就增加了求解的自由度, 从而抵消了边界元法的优点。

本文给出一种分析自由振动问题的边界元/有限元混合法的迭代算法, 它利用相应的动力学方程的基本解, 仍按一般混合法列式, 离散后归结为一个代数特征值问题, 用迭代算法逐步改善固有频率近似值的精度。把这种方法应用于分析回转体自由扭振问题, 从给出的几个典型算例的数值结果可以看出, 在内部只需划分很稀疏的常值元网格, 就能得到精度较高的结果, 且迭代收敛很快。

\* 刘人怀推荐。  
国家自然科学基金资助的课题。

## 二、迭代算法的一般列式

自由振动问题的控制方程可写成如下形式

$$\mathbf{L}(u) + \lambda^2 u = 0 \quad \text{在域 } V \text{ 内} \quad (2.1)$$

齐次边界条件为

$$\mathbf{D}(u) = 0 \quad \text{在边界 } S_1 \text{ 上} \quad (2.2a)$$

$$\text{和} \quad \mathbf{F}(u) = 0 \quad \text{在边界 } S_2 \text{ 上} \quad (2.2b)$$

其中,  $\mathbf{L}$  是控制方程微分算子, 假设是线性自伴随算子;  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{F}$  是边界条件微分算子, 假设是线性算子. (2.1) 和 (2.2) 构成线性自伴随问题.  $\lambda$  是自由振动的固有频率参数. 整个边界记为  $S = S_1 \cup S_2$ .

与方程 (2.1) 对应的带奇点的方程可写成

$$\mathbf{L}(U) + \lambda^2 U + \delta(P) = 0 \quad \text{在域 } V \text{ 内} \quad (2.3)$$

记满足方程 (2.3) 和边界条件 (2.2) 的第  $i$  阶固有频率的第  $k$  次迭代的近似值为  $\lambda_i^{(k)}$ , 相应的含有  $\lambda_i^{(k)}$  的基本解为  $U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})$ , 则方程 (2.3) 可写成

$$\mathbf{L}(U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})) + \lambda_i^{2(k)} U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)}) + \delta(P) = 0 \quad (2.3a)$$

格林公式可写成如下形式

$$\begin{aligned} & \iiint_V [u_1 \mathbf{L}(u_2) - u_2 \mathbf{L}(u_1)] dV \\ & = \iint_S [\mathbf{D}(u_1) \mathbf{F}(u_2) - \mathbf{D}(u_2) \mathbf{F}(u_1)] dS \end{aligned} \quad (2.4)$$

令  $u_1 = u$ ,  $u_2 = U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})$ , 则 (2.4) 式可写成

$$\begin{aligned} & C_P u_P + \iint_S [\mathbf{D}(u) \mathbf{F}(U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})) - \mathbf{D}(U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})) \mathbf{F}(u)] dS \\ & = (\lambda^2 - \lambda_i^{2(k)}) \iiint_V [u U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})] dV \\ & = \Delta \lambda_i^{2(k)} \iiint_V [u U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})] dV \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中  $C_P$  是一系数, 它的数值由  $P$  点的位置确定.

方程 (2.5) 与下面公式 (2.6) 一起组成迭代公式.

$$\lambda_i^{2(k+1)} = \lambda_i^{2(k)} + \Delta \lambda_i^{2(k)} \quad (2.6)$$

迭代收敛精度  $\varepsilon$  的表达式可写成

$$\varepsilon = (\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}) / \lambda_i^{(k)} \quad (2.7)$$

通常  $\varepsilon$  取为  $10^{-4} \sim 10^{-2}$ .

## 三、回转体的自由扭振问题

回转体自由扭振的运动方程在柱坐标  $(r, \theta, z)$  下可表示为<sup>[1]</sup>

$$r \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\lambda^2 r \Psi \quad \text{在域 } V \text{ 内} \quad (3.1)$$

式中  $\Psi = \Psi(r, z)$  是振幅函数, 自由振动固有频率参数  $\lambda$  的表达式为

$$\lambda = \sqrt{\rho/G\omega}$$

$\omega$ 是圆频率,  $\rho$ 是质量密度,  $G$ 是剪切模量.

回转体表面上的位移约束条件和应力自由条件可分别写成

$$\Psi = 0 \quad \text{在边界面 } S_1 \text{ 上} \quad (3.2a)$$

和 
$$\partial\Psi/\partial n = 0 \quad \text{在边界面 } S_2 \text{ 上} \quad (3.2b)$$

引入函数  $u = \Psi(r, z)r\sin\theta^{(1)}$ , 并考虑(3.1)式, 则有

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= r \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \sin\theta \\ &= -\lambda^2 r \Psi \sin\theta = -\lambda^2 u \quad \text{在域 } V \text{ 内} \end{aligned} \quad (3.3)$$

由(3.2)式得到关于  $u$  的边界条件如下

$$u = 0 \quad \text{在边界面 } S_1 \text{ 上} \quad (3.4a)$$

$$\partial u / \partial n = 0 \quad \text{在边界面 } S_2 \text{ 上} \quad (3.4b)$$

对应的带奇点的动力学方程为

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U + \delta(P) = 0 \quad \text{在域 } V \text{ 内} \quad (3.5)$$

上述方程相应于第  $i$  阶固有频率第  $k$  次迭代近似值的基本解  $U_i^{(k)}(\lambda_i^{(k)})$  可写成<sup>[2]</sup>

$$U_i^{(k)} = \exp[i\lambda_i^{(k)}R] / 4\pi R \quad (3.6)$$

式中  $R$  表示源点  $P$  到场点  $Q$  的距离 (如图1), 表达式如下

$$R = R(P, Q) = [r_p^2 + r_q^2 - 2r_p r_q \cos(\theta_q - \theta_p) + (z_q - z_p)^2]^{1/2} \quad (3.7)$$

根据上述讨论, 对回转体自由扭转振动问题, 与方程(2.5)相应的积分方程可写为

$$\begin{aligned} C_P u_P + \oint_S \left( u \frac{\partial U_i^{(k)}}{\partial n} - U_i^{(k)} \frac{\partial u}{\partial n} \right)_Q dS_Q \\ = \Delta \lambda_i^{(k)} \iiint_V (u U_i^{(k)})_Q dV_Q \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中

$$C_P^{(1)} = \begin{cases} 0 & P \text{ 点在域外} \\ 4\pi & P \text{ 点在域内} \\ 2\pi & P \text{ 点在光滑表面上} \end{cases}$$

方程(3.8)中  $dS_Q$  的表达式为  $dS_Q = r_Q d\Gamma_Q d\theta_Q$ , 其中  $\Gamma_Q$  是回转体子午面的边界.

令

$$J_i^{(k)} = \int_0^{2\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(k)}R]}{R} \sin\theta_Q d\theta_Q \quad (3.9)$$

将(3.6)式和  $u = \Psi(r, z)r\sin\theta$  代入方程(3.8), 并沿周向对  $\theta$  积分, 得到

$$\begin{aligned} C_P r_P \Psi_P + \oint_{\Gamma} \left[ (\Psi r)_Q \frac{\partial J_i^{(k)}}{\partial n_Q} - J_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial n_Q} (\Psi r)_Q \right] r_Q d\Gamma_Q \\ = \Delta \lambda_i^{(k)} \iiint_V (\Psi r)_Q J_i^{(k)} r_Q dr_Q dz_Q \end{aligned} \quad (3.10)$$

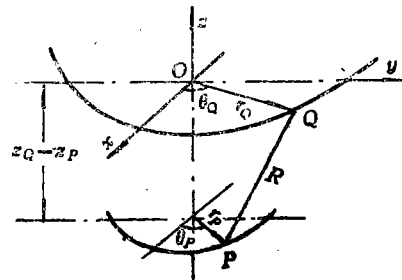


图1 回转体

式中 $D$ 表示回转体子午面的面积, 而

$$I_i^{(k)} = J_i^{(k)} / \sin \theta_p = \int_0^{2\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(k)} R]}{R} \cos \alpha da \quad (3.11)$$

其推导见附录。

#### 四、积分方程的离散化

对方程(3.10)进行离散时, 边界 $\Gamma$ 上以位移( $r\Psi$ )和剪应变( $rq=r\partial\Psi/\partial n$ )为节点未知量划分为 $N$ 个常值边界元; 区域 $D$ 内以位移( $r\Psi$ )为未知量划分为 $M$ 个常值单元。以 $\{X\}$ 和 $\{Y\}$ 分别表示边界和域内未知量向量。

当 $P$ 点为边界节点时, 有方程组

$$[G]\{X\} - \Delta\lambda_i^{2(k)}[H]\{Y\} = \{0\} \quad (4.1)$$

当 $P$ 点为域内节点时, 有方程组

$$\{Y\} + [M]\{X\} = \Delta\lambda_i^{2(k)}[N]\{Y\} \quad (4.2)$$

方程组(4.1)可写成

$$\{X\} = \Delta\lambda_i^{2(k)}[G]^{-1}[H]\{Y\} \quad (4.3)$$

将(4.3)式代入方程组(4.2), 整理后可得到

$$[K]\{Y\} = \{Y\} / \Delta\lambda_i^{2(k)} \quad (4.4)$$

其中

$$[K] = [N] - [M][G]^{-1}[H]$$

方程组(4.4)表示一个具有较少自由度的标准特征值问题。

#### 五、算 例

1. 上、下端均固支的实心圆柱(图2), 图2给出一种边界上和区域内的网格划分。数值结果(振动频率参数 $\lambda$ 值)列在表1中, 表中 $N$ 栏给出边界上常值元个数, 括号内用横杠联接的四个数码表示子午面各边上边界单元的个数, 所有算例内部均为 $8(2 \times 4)$ 个常值矩形单元。BFEM 栏内的数值是一般边界元/有限元混合法的结果, 也是本文解法未经迭代的

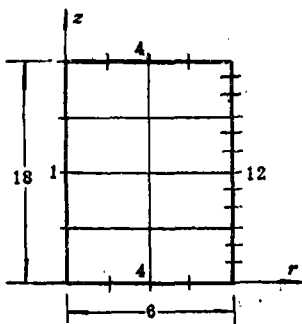


图2 实心圆柱 $N=21(4-12-4-1)$ 的网格划分

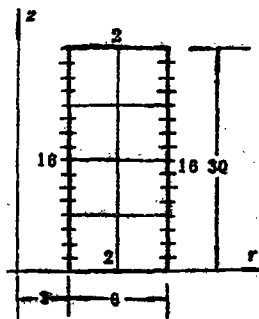


图3 空心圆柱 $N=36(2-16-2-16)$ 的网格划分

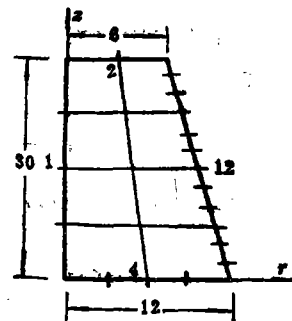


图4 实心圆锥 $N=19(4-12-2-1)$ 的网格划分

各阶频率初值; IBFEM栏内是本文解法迭代后的结果, 计算中取收敛精度  $\epsilon$  等于  $10^{-2}$ , 数值结果栏中括号内的数值是计算值与解析解相比的百分比误差。表 2 给出各迭代过程中的数值, 其中  $k$  为迭代次数。

由于在任何一阶频率  $\lambda_i$  的迭代过程中, 其后面所有的频率值 ( $\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots$ ) 也都随之改善, 所以为了提高迭代效率, 我们选取第  $i$  阶频率  $\lambda_i$  迭代完成时相应的第  $i+1$  阶频率  $\lambda_{i+1}$  的值为第  $i+1$  阶频率的迭代初值  $\lambda_{i+1}^{(0)}$ 。

表1 两端固支的实心圆柱的各阶固有频率  $\lambda$

$N$		1	2	3	4
21 (4-12-4-1)	BFEM	0.19258 (+10.34)	0.39137 (+12.12)	0.59024 (+12.73)	0.68471 (-1.98)
	IBFEM	0.17631 (+1.02)	0.35126 (+0.83)	0.52380 (+0.04)	0.70225 (+0.59)
41 (8-24-8-1)	BFEM	0.18853 (+8.02)	0.38597 (+10.57)	0.56159 (+11.08)	0.67619 (-3.14)
	IBFEM	0.17438 (-0.09)	0.34894 (-0.04)	0.52233 (-0.24)	0.69284 (-0.76)
解析解[3]		0.17453	0.34907	0.52380	0.69813

表2 实心圆柱的迭代过程

$N$	$k$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
21 (4-12-4-1)	0	0.19258	0.37355	0.56076	0.68390
	1	0.17462	0.34674	0.51811	0.72830
	2	0.17631	0.35237	0.52815	0.70427
	3		0.35126	0.52380	0.70225
41 (8-24-8-1)	0	0.18853	0.36997	0.55605	0.67860
	1	0.17298	0.34469	0.52734	0.71116
	2	0.17438	0.34988	0.52233	0.69618
	3		0.34894		0.69284
解析解[3]		0.17453	0.34907	0.52380	0.69813

2. 上、下两端均固支的空心圆柱, 如图 3 所示。数值结果列在表 3 中, 边界上为 36 (2-16-2-16) 个常值元。

表3 两端固支的空心圆柱的各阶固有频率  $\lambda$

	1	2	3	4	
BFEM	0.11259 (+7.52)	0.22929 (+9.48)	0.34773 (+10.69)	0.40577 (-3.12)	
IBFEM	0.10465 (-0.07)	0.20985 (+0.20)	0.31535 (+0.38)	0.42163 (+0.66)	
解析解[3]		0.10472	0.20944	0.31416	0.41888

3. 上、下两端均固支的实心圆锥, 如图 4 所示。数值结果列在表 4 和表 5 中, 边界上为 19 (4-12-2-1) 个常值元。

表4 两端固支的实心圆锥的各阶固有频率 $\lambda$ 

	1	2	3	4
BFEM	0.1197 (+0.32)	0.2351 (+10.90)	0.3525 (+11.59)	0.4094 (-2.57)
IBFEM	0.1105 (+0.91)	0.2121 (+0.05)	0.3162 (+0.09)	0.4191 (-0.28)
解析解[4]	0.1095	0.2120	0.3159	0.4202

表5 实心圆锥的迭代过程

k	i=1	i=2	i=3	i=4
0	0.1197	0.2225	0.3361	0.4098
1	0.1097	0.2093	0.3086	0.4180
2	0.1105	0.2128	0.3192	0.4191
3		0.2121	0.3162	
解析解[4]	0.1095	0.2120	0.3159	0.4202

## 六、结 论

与一般的边界元法和通常的边界元/有限元混合法相比,本文解法有许多优点.从算例的数值结果中可以看出,用这种迭代的解法,我们仅需要在域内划分很稀疏的常值元网格,就能得到精度很高的结果,减小了问题的求解规模,并解决了通常边界元/有限元混合法数值精度受域内网格影响很大的弊端.而且此法的迭代很有效,收敛很快.

本文的工作得到了黄茂光教授的指导和帮助,在此表示衷心的感谢.

### 附录:公式(3.11)的推导

公式(3.9)为

$$J_i^{(h)} = \int_0^{2\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(h)}R]}{R} \sin\theta_Q d\theta_Q \quad (\text{A.1})$$

如让

$$\alpha = \theta_Q - \theta_P, \quad A = r_Q^2 + r_P^2 + (z_Q - z_P)^2, \quad B = 2r_P r_Q$$

则R的表达式可写为

$$R = (A - B \cos\alpha)^{1/2}$$

这样公式(A.1)就可写成如下形式

$$\begin{aligned} J_i^{(h)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(h)}(A - B \cos\alpha)^{1/2}]}{(A - B \cos\alpha)^{1/2}} \sin(\alpha + \theta_P) d\alpha \\ &= - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(h)}(A + B \cos\alpha)^{1/2}]}{(A + B \cos\alpha)^{1/2}} (\sin\alpha \cos\theta_P + \cos\alpha \sin\theta_P) d\alpha \end{aligned}$$

而 $\sin\alpha$ 是关于 $\alpha$ 的奇函数,  $\cos\alpha$ 是关于 $\alpha$ 的偶函数,所以上式第一项积分为零,即

$$\begin{aligned} J_i^{(h)} &= -\sin\theta_P \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(h)}(A + B \cos\alpha)^{1/2}]}{(A + B \cos\alpha)^{1/2}} \cos\alpha d\alpha \\ &= \sin\theta_P \int_0^{2\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(h)}(A - B \cos\alpha)^{1/2}]}{(A - B \cos\alpha)^{1/2}} \cos\alpha d\alpha = I_i^{(h)} \sin\theta_P \end{aligned}$$

其中

$$I_i^{(k)} = \int_0^{2\pi} \frac{\exp[i\lambda_i^{(k)} R]}{R} \cos \alpha da$$

这就是公式(3.11)

### 参 考 文 献

- [1] Huang, M. K., A mixed boundary integral equation-finite element method to free torsional vibration of variable diameter circular shafts, *Proceedings of the Invitational China-American Workshop on Finite Element Methods*, Chengde, People's Republic of China, June 2-6 (1986), 105-108.
- [2] 黄茂光, 边界积分方程法求解变截面圆轴扭转振动问题, 第三届华东固体力学学术讨论会, 安徽, 九华山 (1986).
- [3] Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solid*, Oxford University Press (1975), 464-470.
- [4] Richard, J., Vibrations de torsion d'arbre de section variable, *Revue Française de Mécanique*, 44 (1972), 13-20.

## An Efficient Iteration Algorithm of Mixed Boundary/Finite Element Method and Application to Free Torsional Vibration Analysis of Bodies of Revolution

Wang Xiu-xi    Chen Feng    Qian Jiang  
(University of Science and Technology of China, Hefei)

### Abstract

In this paper, the general formulation of a new proposed iteration algorithm of mixed BEM/FEM for eigenvalue problems of elastodynamics is described. Approximate fundamental solutions of elastodynamics are adopted in the normal mixed BEM/FEM equations. The accuracy of solutions is progressively improved by the iteration procedure. Not only could the awkwardness of non-algebraic eigenvalue equations be avoided but also the accuracy of numerical solutions is almost independent of the interior meshing. All these give many advantages in numerical calculation. The algorithm is applied to free torsional vibration analysis of bodies of revolution. A few cases are studied. All of the numerical results are very good.

**Key words** mixed BEM/FEM formulation, iteration, free vibration, bodies of revolution