应用数学和力学，第11卷第11期（1990年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Fan Ky极大极小不等式的进一步推广及对变分不等式的应用*

张石生　杨干山

（四川大学数学系）（云南民族学院数学系）

摘　要

本文引出广义KKM映象的概念，其包含著名的KKM映象为特例．借助于这一映象，我们给出著名的KKM定理和Fan Ky极大极小不等式以一种新的推广形式．作为应用，我们考虑了变分不等式解的存在性问题．本文结果是引文[1～6]中相应结果的改进和发展．

关键词　广义KKM映象　上半连续　γ-对角拟凸　鞍点

一、引言及预备知识

著名的Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz定理（简称KKM定理）和Fan Ky极大极小不等式是非线性分析的两个基本定理，它们在工程、力学、经济数学、对策论、控制论、微分方程和变分不等式理论中起到极为重要的作用．近年来，许多作者对这两个定理给出多种形式的推广和多方面的应用（见，[1～7]）．

本文的目的是引出广义KKM映象的概念，借助于这一概念得到了KKM定理和Fan Ky极大极小不等式的一种新的推广形式．作为应用，我们讨论了拟变分不等式解的存在性问题．本文结果改进和发展了引文[1～6]中的相应结果．

为叙述方便，先给出如下定义：

定义1　设E是线性空间，X是E的子集．G: $X\to 2^E$称为广义KKM映象，如果对任意的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，存在与之相应的有限集$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset E$，使得对任意的子集$\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}\subset\{y_1, \cdots, y_n\}$有

$$\mathrm{co}\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}\subset\bigcup_{j=1}^{k} G(x_{i_j}) \tag{1.1}$$

称G: $X\to 2^E$为KKM映象，如果对任意的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，有

$$\mathrm{co}\,\{x_1, \cdots, x_n\}\subset\bigcup_{i=1}^{n} G(x_i) \tag{1.2}$$

由上面的定义易知，如果G: $X\to 2^E$是KKM映象，则G必是$X\to 2^E$的广义KKM映象．事实上，对任给的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，取$y_i=x_i$ $(i=1, \cdots, n)$于是由G的KKM

* 1989年11月10日收到．国家自然科学基金资助项目．

性，对任意的子集$\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}\subset\{y_1, \cdots, y_n\}$，(1.1)式成立。

下面我们举例说明广义 KKM 映象的概念是 KKM 映象的真推广。

例 设$E=(-\infty, +\infty)$，$X=[-2, 2]$，设$G: X\to 2^E$，由下式定义：

$$G(y)=\left[-\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2},\ \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2}\right]\qquad(y\in X).$$

因$\bigcup_{y\in X}G(y)=\left[-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$，故当$x\in\left[-2,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2\right]$时，$x\notin G(x)$，因而$G$不是$X\to 2^E$的 KKM 映象。

下证G是$X\to 2^E$的广义 KKM 映象。

事实上，对任意的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，取

$$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset\left[-\sqrt{\frac{1}{6}},\ \sqrt{\frac{1}{6}}\right]=\bigcap_{x\in X}G(x).$$

于是对任意的子集$\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}\subset\{y_1, \cdots, y_n\}$有

$$\mathrm{co}\{y_{i_1},\cdots,y_{i_k}\}\subset\mathrm{co}\{y_1,\cdots,y_n\}\subset\left[-\sqrt{\frac{1}{6}},\ \sqrt{\frac{1}{6}}\right]$$

$$=\bigcap_{x\in X}G(x)\subset\bigcup_{j=1}^{k}G(x_{i_j}).$$

故G是$X\to 2^E$的广义 KKM 映象。

定义2[3] 设E是一线性空间，X是E中的凸子集，$R=(-\infty, +\infty)$，$\bar{R}=R\cup\{+\infty\}$，$\varphi: X\times X\to\bar{R}$。

(i) $\varphi(x, y)$称为关于y为对角拟凸（凹），如果对任意的有限集$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset X$及任一$y_0\in\mathrm{co}\{y_1, \cdots, y_n\}$都有

$$\varphi(y_0, y_0)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(y_0, y_i)\qquad(\varphi(y_0, y_0)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(y_0, y_i)).$$

(ii) $\varphi(x, y)$称为关于y是γ-对角拟凸（凹），$\gamma\in\bar{R}$，如果对任意的有限集$\{y_1,\cdots,y_n\}\subset X$及任意的$y_0\in\mathrm{co}\{y_1, \cdots, y_n\}$有

$$\gamma\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(y_0, y_i)\qquad(\gamma\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(y_0, y_i)).$$

(iii) 对任给的$x\in X$，$\varphi(x, y)$称为关于y是拟凸（凹）的，如果对任意的$\lambda\in(-\infty, +\infty]$，

$$\{y\in X: \varphi(x, y)\leqslant\lambda\}\qquad(\{y\in X: \varphi(x, y)\geqslant\lambda\})$$

是凸集。

这里我们需要指出：

(1) 容易证明，对给定的$x\in X$，$\varphi(x, y)$关于y是拟凸（凹）的，当而且仅当对任意的有限集$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset X$和任意的$y_0\in\mathrm{co}\{y_1, \cdots, y_n\}$有

$$\varphi(x, y_0)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(x, y_i)\qquad(\forall x\in X)$$

$$(\varphi(x, y_0)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(x, y_i)\qquad(\forall x\in X)).$$

因而拟凸（凹）必对角拟凸（凹），但是逆结论不必成立。

(2) 如果$\varphi(x, y)$关于y是对角拟凹的，则必存在$\gamma\in\bar{R}$，使得$\varphi(x, y)$关于y是γ-对角拟凹的，例如，可以取$\gamma=\sup_{x\in X}\varphi(x, x)$。

二、主 要 结 果

关于广义 KKM 映象的特性可由下面的定理表征。

定理1 设E是 Hausdorff 线性拓朴空间，X是E中的非空凸子集。设 $G: X\to 2^E$ 是具非空值的集值映象，且对每一$x\in X$，$G(x)$是有限闭的（即对E中任一有限维子空间L,$G(x)\cap L$按L中的欧氏拓朴是闭的）。则集族$\{G(x): x\in X\}$具有限交性质的充分必要条件是G为$X\to 2^E$的广义 KKM 映象。

证 必要性。设$\{G(x): x\in X\}$具有限交性质，于是对任意的有限集$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}\subset X$，$\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)\neq\phi$。取$x_*\in\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)$，并令$y_i=x_*$ $(i=1, \cdots, n)$。于是对任意的$\{y_{i_1},\cdots, y_{i_k}\}\subset\{y_1, \cdots, y_n\}$有

$$\mathrm{co}\{y_{i_1},\cdots,y_{i_k}\}=\{x_*\}\subset\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)\subset\bigcup_{j=1}^{k}G(x_{i_j}).$$

此即G是$X\to 2^E$的广义 KKM 映象。

充分性。设 $G: X\to 2^E$是广义的 KKM 映象，若$\{G(x): x\in X\}$不具有限交性质，即存在某一有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)=\phi \tag{2.1}$$

而且对给定的$\{x_1, \cdots, x_n\}$，存在与之相应的$\{y_1, \cdots,y_n\}\subset E$，使得对任意的$\{y_{i_1},\cdots,y_{i_k}\}\subset\{y_1, \cdots, y_n\}$有$\mathrm{co}\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}\subset\bigcup_{j=1}^{k}G(x_{i_j})$。特别有

$$\mathrm{co}\{y_1, \cdots, y_n\}\subset\bigcup_{j=1}^{n}G(x_j) \tag{2.2}$$

令 $C=\mathrm{co}\{y_1, \cdots, y_n\}$，$L=\mathrm{span}\{y_1, \cdots, y_n\}$。

则$C\subset L$。因对每一$x\in X$，$G(x)$是有限闭的，故$G(x_i)\cap L$是闭集。设 $d(\cdot,\cdot)$ 表L上的欧氏距离，易知

$$d(x, L\cap G(x_i))>0\Longleftrightarrow x\notin L\cap G(x_i)\qquad (i=1, \cdots, n) \tag{2.3}$$

现定义连续映象$\lambda: C\to[0, \infty)$如下：

$$\lambda(c)=\sum_{i=1}^{n}d(c, L\cap G(x_i))\qquad (c\in C).$$

由(2.1)和(2.3)知，对任一$c\in C$，$\lambda(c)>0$。再令

$$F(c)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(c, L\cap G(x_i))}{\lambda(c)}y_i\qquad (c\in C) \tag{2.4}$$

则F是$C\to C$的连续映象。而C是有限维空间L中的有界闭凸集，由熟知的 Brouwer 不动点定理知，存在$c_*\in C\subset L$，使得$c_*=F(c_*)$。因而有

$$c_* = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(c_*, L \cap G(x_i))}{\lambda(c_*)} y_i \tag{2.5}$$

记 $$I = \{i \in \{1, \cdots, n\}: d(c_*, L \cap G(x_i)) > 0\} \tag{2.6}$$

因而对每一$i \in I$，$c_* \notin G(x_i) \cap L$．因$c_* \in L$，故$c_* \notin G(x_i)$（$\forall i \in I$）．于是有

$$c_* \notin \bigcup_{i \in I} G(x_i) \tag{2.7}$$

由(2.5)和(2.6)有

$$c_* = \sum_{i \in I} \frac{d(c_*, L \cap G(x_i))}{\lambda(c_*)} y_i \in \mathrm{co}\{y_i: i \in I\}.$$

但因G是$X \to 2^E$的广义 KKM 映象，故又有

$$c_* \in \mathrm{co}\{y_i: i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} G(x_i) \tag{2.8}$$

上式与(2.7)相矛盾．因而得证$\{G(x): x \in X\}$具有限交性质． Q.E.D.

定理2 设E是 Hausdorff 线性拓朴空间，$X \subset E$是一非空凸子集．设$G: X \to 2^E$是具非空闭值的集值映象．再设存在$y_0 \in X$，使得$G(y_0)$是E中的紧集．则$\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \phi$的充分必要条件是$G$为$X \to 2^E$的广义 KKM 映象．

证 必要性．由假设，对每一$x \in X$，$G(x)$是非空闭集，故$G(x)$是非空的有限闭集．另因$\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \phi$，故$\{G(x): x \in X\}$必具有限交性质．故结论由定理 1 得知．

充分性．设$G: X \to 2^E$是广义 KKM 映象，由定理 1 知$\{G(x): x \in X\}$具有限交性质，故$\{G(x) \cap G(x_0): x \in X\}$也具有限交性质．但因$\{G(x) \cap G(x_0), x \in X\}$是$G(x_0)$中的紧集族．于是由紧集的性质知

$$\bigcap_{x \in X} G(x) = G(x_0) \bigcap_{x \in X} G(x) = \bigcap_{x \in X} \{G(x) \cap G(x_0)\} \neq \phi$$ Q.E.D.

定理3 设E是一 Hausdorff 线性拓朴空间，X是E中的非空闭凸集．设φ，ψ: $X \times X \to \bar{R}$满足条件：

(i) 对每一$y \in X$，$\varphi(x, y)$关于x是下半连续的；

(ii) $\psi(x, y)$关于y是γ-对角拟凹的；

(iii) $\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$ $(\forall (x, y) \in X \times X)$；

(iv) 存在某一$y_0 \in X$，使得集合$G(y_0) = \{x \in X: \varphi(x, y_0) \leqslant \gamma\}$是$X$中的非空紧集．

则存在$\bar{x} \in X$，使得

$$\sup_{y \in X} \varphi(\bar{x}, y) \leqslant \gamma \tag{2.9}$$

为了证明定理3，我们先证明下面的结果．

命题1 设E是 Hausdorff 拓朴线性空间，X是E中之一非空闭凸集．设φ: $X \times X \to \bar{R}$，而且假定$\varphi(x, y)$关于y是γ-对角拟凹的．则映象G:

$$G(y) = \{x \in X: \varphi(x, y) \leqslant \gamma\} \qquad (y \in X) \tag{2.10}$$

是$X \to 2^X$的具非空值的广义 KKM 映象．

证 (1)先证对每一$y \in X$，$G(y) \neq \phi$．事实上，当$\gamma = +\infty$时结论显然．当$\gamma < +\infty$时，若存在某一$y_0 \in X$，使得$G(y_0) = \phi$，于是由(2.10)知

$$\varphi(x,\ y_0)>\gamma \qquad (\forall x\in X) \tag{2.11}$$

但因 $\varphi(x,\ y)$ 关于 y 是 γ-对角拟凹的，于是特别对单元集 $\{y_0\}\subset X$，有 $\varphi(y_0,\ y_0)\leqslant\gamma$。这与(2.11)相矛盾。

（2） 下证 G: $X\to 2^X$ 是广义 KKM 映象。

事实上，若存在某一限集 $\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}\subset X$，使得对任意的有限集 $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset X$ 都存在某一有限子集，$\{x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_k}\}\subset\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$，使得

$$\mathrm{co}\{x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_k}\}\not\subset\bigcup_{j=1}^{k}G(y_{i_j}) \tag{2.12}$$

因而存在某一 $y_0\in\mathrm{co}\{x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_k}\}$，使得 $y_0\notin\bigcup_{j=1}^{k}G(y_{i_j})$。于是有

$$\varphi(y_0,\ y_{i_j})>\gamma \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \tag{2.13}$$

但因 $\varphi(x,\ y)$ 关于 y 是 γ-对角拟凹的，于是有

$$\min_{1<j<k}\varphi(y_0,\ y_{i_j})\leqslant\gamma \tag{2.14}$$

上式与(2.13)相矛盾。 Q.E.D.

定理 3 的证明

定义映象 F，G: $X\to 2^X$ 如下：

$$F(y)=\{x\in X:\ \psi(x,\ y)\leqslant\gamma\},$$
$$G(y)=\{x\in X:\ \varphi(x,\ y)\leqslant\gamma\}.$$

由条件(ii)及命题 1，$F(y)$，$y\in X$，是非空值的。另由条件(iii)，对每一 $y\in X$，$F(y)\subset G(y)$。于是由条件(i)对每一 $y\in X$，$G(y)$ 是非空的闭集合。

其次，由命题1，F 是 $X\to 2^X$ 的广义 KKM 映象，故 G 也是 $X\to 2^X$ 的广义 KKM 映象。故定理 2 的条件满足。因而有 $\bigcap_{y\in X}G(y)\neq\phi$。设 $\bar{x}\in\bigcap_{y\in X}G(y)$。于是对一切 $y\in X$，有 $\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant\gamma$，即 $\sup_{y\in X}\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant\gamma$。 Q.E.D.

作为定理 3 的直接推论可得下面的结果。

推论1 设满足定理 3 中的条件，其中 $\gamma=\sup_{y\in X}\psi(y,\ y)$。则存在 $\bar{x}\in X$，使得

$$\sup_{y\in X}\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant\sup_{y\in X}\psi(y,\ y).$$

注 Yen[1] 和 Zhou[3] 中的相应结果都是推论 1 的特例。

三、应 用

在本节中，我们将应用第二节的结果研究鞍点问题和拟变分不等式解的存在性问题。

定理4 设 E 是 Hausdorff 线性拓朴空间，$X\subset E$ 是一紧凸集。设 φ: $X\times X\to(-\infty,\ +\infty)$ 满足条件：

（i） 对每一 $y\in X$，$\varphi(x,\ y)$ 关于 x 是下半连续的；且 φ 关于 x 是 O-对角拟凸的；

（ii） 对每一 $x\in X$，$\varphi(x,\ y)$ 关于 y 是上半连续的；且 φ 关于 y 是 O-对角拟凹的。

则存在 $(\bar{x},\ \bar{y})\in X\times X$，满足

$$\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant\varphi(\bar{x},\ \bar{y})\leqslant\varphi(x,\ \bar{y}) \qquad (\forall x,\ y\in X)$$

证　于定理3中取$\varphi\equiv\psi$。由定理3，存在$\bar{x}\in X$，使得

$$\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant 0\qquad(\forall y\in X)\tag{3.1}$$

令$\lambda(x,\ y)=-\varphi(y,\ x)$。于是对每一$y\in X$，$\lambda(x,\ y)$关于$x$是下半连续的；$\lambda$关于$y$是$O$-对角拟凹的。由定理3存在某一$\bar{y}\in X$，使得

$$\lambda(\bar{y},\ x)=-\varphi(x,\ \bar{y})\leqslant 0\qquad(\forall x\in X)\tag{3.2}$$

结合(3.1)和(3.2)知$(\bar{x},\ \bar{y})$是φ的鞍点，即有

$$\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant\varphi(\bar{x},\ \bar{y})\leqslant\varphi(x,\ \bar{y})\qquad(\forall x,\ y\in X)\tag{3.3}$$

注　当其注意到φ关于y上半连续，关于x下半连续及X的紧性，由(3.3)即得

$$\max_{y\in X}\inf_{x\in X}\varphi(x,\ y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in X}\varphi(x,\ y)=0.$$

现在我们讨论一类拟变分不等式解的存在性问题。

定理5　设E是局部凸的 Hausdorff 实线性拓朴空间，$X\subset E$是一非空紧凸集，设φ，ψ：$X\times X\to R$满足下面的条件：

(i)　对每一$y\in X$，$\varphi(x,\ y)$关于x是下半连续的；

(ii)　$\psi(x,\ y)$关于y是O-对角凹的；即对任意的有限集$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}\subset X$和任意的

$y_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$，$\alpha_i\geqslant 0$，$i=1,\ \cdots,\ n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(y_0,\ y_i)\leqslant 0\tag{3.4}$$

(iii)　$\varphi(x,\ y)\leqslant\psi(x,\ y)\quad(\forall x,\ y\in X)$.

再设F：$X\to 2^X$是一非空闭凸值映象，且对任一$p\in E^*$(E的对偶空间)，函数$\sigma(F(x),\ p)=\sup\limits_{y\in F(x)}\langle p,\ y\rangle$关于$x$是上半连续的，且集合

$$\{x\in X:\ \sup_{y\in F(x)}\varphi(x,\ y)\leqslant 0\}\tag{3.5}$$

是闭的。

则拟变分不等式在X中有解，即存在$\bar{x}\in X$，使得

$$\bar{x}\in F(\bar{x}),\quad \sup_{y\in F(\bar{x})}\varphi(\bar{x},\ y)\leqslant 0.$$

证　设结论不成立，于是对任一$x\in X$，或$x\notin F(x)$，或存在$y\in F(x)$，使得$\varphi(x,y)>0$。若$x\notin F(x)$，则由 Hahn-Banach 分离定理，存在$p\in E^*$，使得$\langle p,\ x\rangle>\sigma(F(x),p)$；若存在$y\in F(x)$，使得$\varphi(x,\ y)>0$。于是有

$$\alpha(x):=\sup_{y\in F(x)}\varphi(x,\ y)>0.$$

现定义集合$\varDelta_0$，$\varDelta_p$如下：

$$\begin{cases}\varDelta_0=\{x\in X:\ \alpha(x)>0\},\\ \varDelta_p=\{x\in X:\ \langle p,\ x\rangle>\sigma(F(x),\ p)\}\qquad(p\in E^*).\end{cases}$$

由假设易知$\varDelta_0$，$\varDelta_p$均为开集，且$X\subset\varDelta_0\cup\bigcup\limits_{p\in E^*}\varDelta_p$。由$X$的紧性，存在$p_1,\ \cdots,\ p_n\in E^*$，使得

$$X\subset\varDelta_0\cup\bigcup_{i=1}^{n}\varDelta_i,\quad \varDelta_i=\varDelta_{p_i}\qquad(i=1,\ \cdots,n)\tag{3.6}$$

设$\{\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n\}$是与$\{\varDelta_0, \varDelta_1, \cdots, \varDelta_n\}$相对应的连续单位分解，即$\beta_i$: $X\to[0, 1]$连续，当$x\in\varDelta_i$时，$\beta_i(x)>0$. 当$x\notin\varDelta_i$时，$\beta_i(x)=0$，而且对每一$x\in X$，$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)=1$.

令
$$f(x, y)=\beta_0(x)\varphi(x, y)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\langle p_i, x-y\rangle,$$
$$g(x, y)=\beta_0(x)\psi(x, y)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\langle p_i, x-y\rangle.$$

由定理的假设知

(i) $f(x, y)\leqslant g(x, y)$ $(\forall x, y\in X)$;

(ii) 对每一$y\in X$，$f(x, y)$关于x是下半连续的;

(iii) 因$\psi(x, y)$关于y是O-对角凹的，易知$g(x, y)$关于y也是O-对角凹的，故$g(x,y)$关于y是O-对角拟凹的. 因而f, g满足定理3的条件. 于是存在$x_*\in X$，使得$f(x_*,y)\leqslant 0$, $(\forall y\in X)$，即有

$$\beta_0(x_*)\varphi(x_*, y)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_*)\langle p_i, x_*-y\rangle\leqslant 0 \qquad (\forall y\in X) \tag{3.7}$$

因$x_*\in X$，由(3.6)存在某一$i\in\{0, 1, \cdots, n\}$使得$x_*\in\varDelta_i$.

如果$i=0$，则存在$\bar{y}\in F(x_*)$，使得$\varphi(x_*, \bar{y})>0$;

如果$i\geqslant 1$，则由$\varDelta_i$的定义知，对任意的$y\in F(x_*)$，$\langle p_i, x_*-y\rangle>0$. 故不论是那种情形，必存在$\bar{y}\in F(x_*)$，使得

$$\beta_0(x_*)\varphi(x_*, \bar{y})+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_*)\langle p_i, x_*-\bar{y}\rangle>0 \tag{3.8}$$

这与(3.7)相矛盾. 定理得证. Q.E.D

注 定理5统一了许多已知结果，特别它包含[3]中的定理3.1和 Aubin [5]中的相应结果(见[5,pp. 349-350])为特例.

另由定理5可得下面的推论.

推论2 设E是局部凸的 Hausdorff 实线性拓朴空间，设X, φ, ψ满足定理5中的条件. 再设F: $X\to 2^X$是具非空闭凸值的上半连续映象，且设由(3.5)式定义的集合是闭的. 则定理5的结论成立.

证 只要注意，因F: $X\to 2^X$是具非空闭凸值的上半连续映象，故$\sigma(F(x), p)$, $p\in E^*$是x的上半连续泛函，因而结论成立. Q.E.D.

由推论2可得下面的著名的 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理 (KFG 不动点定理)[2]:

推论3[2] 设E为 Hausdorff 线性拓朴空间，$X\subset E$为非空紧凸集，F: $X\to 2^X$是具非空闭凸值的上半连续映象. 则F在X中存在不动点.

证 这只要在推论2中取$\varphi\equiv\psi\equiv 0$，即得证.

参考文献

[1] Yen, C. L. A minimax inequalities and its applications to variational inequalities, *Pacific J. Math.*, **97** (1981), 477—480.

[2] Shih, M. H. and K. K. Tan, Generalized quasi-variational inequalities in L. C. S., *J. Math. Anal. Appl.*, **108** (1985), 333—343.

[3] Zhou J. X. and G. Chen, Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 213—223.

[4] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Some further generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 484—490.

[5] Aubin, J. P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience Publication, New York (1984).

[6] Lassonde, M., On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics, *J. Math. Anal. Appl.*, **97** (1985), 151—201.

[7] 张石生、舒永录，多值映象的变分不等式及其在非线性规划和鞍点问题的应用，应用数学学报（待发表）.

Some Further Generalizations of Ky Fan's Minimax Inequality and Its Applications to Variational Inequalities

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Yang Gan-shan

(*Department of Mathematics, Yunnan National Institute, Kunming*)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce the concept of generalized KKM mapping and to obtain some general version of the famous KKM theorem and Ky Fan's minimax inequality. As applications, we utilize the results presented in this paper to study the saddle point problem and the existence problem of solutions for a class of quasi-variational inequalities. The results obtained in this paper extend and improve some recent results of [1-6].

Key words generalized KKM map, upper-semicontinuous, γ-diagonally quasi-convex, saddle point