应用数学和力学，第11卷第10期（1990年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

恒星对增长螺旋引力扰动的非线性响应及其对增长模式的致稳作用*

张 彬　　岳曾元

（北京大学地球物理系，1988年7月16日收到）

摘　　要

本文计算了在增长的螺旋扰动引力场中恒星响应的非线性效应．结果表明，这一非线性效应会导致 Q 值的增加，从而降低增长率．对于振幅很小，增长率也较小的螺旋形模式，Q 值增加较慢；对于振幅较大或增长率较大的模式，Q值也增加较快，从而有效地抑止振幅的增长．这一调节机制是使得由线性理论所得出的增长模式最终达到准稳状态的原因之一．

关键词　星系密度波，螺旋结构，恒星非线性响应

一、引　　言

旋涡星系的现代密度波理论，经过林家翘及其合作者们近20多年的努力，已取得很大成功．不但对于"缠卷困难"和大尺度规则图案的存在能给出自然的解释[1]，而且已能对Hubble分类的动力学机制给出一个简单的物理图象：当盘质量（与总质量相比）较低而恒星弥散速度也较低时，得到正常旋涡星系，当盘质量（与总质量相比）较高而弥散速度也较高时，得到棒旋星系[2~6]．

在迄今为止的密度波理论中，绝大部分研究者都采用了线性近似．而非线性效应的研究仍是很困难的课题．本文讨论了非线性效应的一个方面：当星系中存在由线性理论得出的增长模式——即增长的螺旋形扰动引力势时，恒星的运动以及恒星的弥散速度将如何受这一增长模式的影响？我们将指出，当计入非线性效应后，恒星弥散速度会增长，从而降低增长率．这将是由线性理论得出的增长模式最终会稳定下来的物理原因之一．

二、单个星对增长螺旋扰动引力场的非线性响应的数学提法

我们仍将星系中对螺旋引力场有响应的"积极盘"(active disk) 简化为无限薄盘．设 $\{r,\ \theta,\ z\}$ 为以星系中心为原点的柱坐标，$z=0$ 平面为星系平面，r 为到星系中心的距离，θ增加的方向为星系旋转的方向．考虑满足初始条件

* 国家自然科学基金资助课题．

$$\left.\begin{array}{l} r(0)=r_0+\Delta(\varepsilon),\ \theta(0)=\alpha+\delta(\varepsilon) \\ \dot{r}(0)=\varepsilon x_1,\ \dot{\theta}(0)=\Omega(r_0)+\varepsilon x_2/r_0 \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

的星在给定的增长螺旋引力场

$$\psi(r,\theta,t)=\psi_0(r)+\varepsilon\psi_1(r,\theta,t)\quad (对于z=0) \tag{2.2}$$

作用下的运动，其中

$$\psi_1(r,\theta,t)=\Psi_1(r)\exp[\gamma t]\cos[\omega_r t-m\theta+\phi(r)] \tag{2.3}$$

ε 为一个小参数．γ 为螺旋扰动引力场的增长率．r_0，α 为与 ε 无关的常数，Δ和δ为与ε同阶的小量．

$$\Omega_p=\omega_r/m \tag{2.4}$$

为螺旋形扰动引力场的图案速度，m为旋臂数．εx_1 和 εx_2 显然代表初始时刻该星的速度与$r=r_0$处的平均速度的偏差．恒星所满足的精确运动的方程为

$$\begin{cases} \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\psi_r & (2.5) \\ d(r^2\dot{\theta})/dt=-\psi_\theta & (2.6) \end{cases}$$

设

$$r(t)=r_0+\varepsilon r_1(t)+\varepsilon^2 r_2(t)+\varepsilon^3 r_3(t)+\cdots \tag{2.7}$$

$$\theta(t)=\theta_0(t)+\varepsilon\theta_1(t)+\varepsilon^2\theta_2(t)+\varepsilon^3\theta_3(t)+\cdots \tag{2.8}$$

其中

$$\theta_0(t)=\Omega(r_0)t+\alpha \tag{2.9}$$

于是得到

$$\begin{aligned} \psi_r(r,\theta,t)=&\psi_0'(r_0)+\varepsilon[\psi_0''(r_0)r_1+\psi_{1r}(r_0,\theta_0,t)] \\ &+\varepsilon^2[\psi_0''(r_0)r_2+\psi_0'''(r_0)r_1^2/2+\psi_{1rr}(r_0,\theta_0,t)r_1 \\ &+\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1]+\varepsilon^3[\psi_0''(r_0)r_3+\psi_0'''(r_0)r_1r_2 \\ &+\psi_0''''(r_0)r_1^3/6+\psi_{1rr}(r_0,\theta_0,t)r_2+\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_2 \\ &+\psi_{1rrr}(r_0,\theta_0,t)r_1^2/2+\psi_{1rr\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1\theta_1 \\ &+\psi_{1r\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1^2/2]+\cdots \end{aligned} \tag{2.10}$$

和

$$\begin{aligned} \psi_\theta(r,\theta,t)=&\varepsilon\psi_{1\theta}(r_0,\theta_0,t)+\varepsilon^2[\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1+\psi_{1\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1] \\ &+\varepsilon^3[\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)r_2+\psi_{1\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_2+\psi_{1rr\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1^2/2 \\ &+\psi_{1r\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1\theta_1+\psi_{1\theta\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1^2/2]+\cdots \end{aligned} \tag{2.11}$$

利用基态方程

$$r\Omega^2=\psi_0'(r) \tag{2.12}$$

我们可将(2.10)和(2.11)式中$\psi_0'(r_0)$，$\psi_0''(r_0)$，$\psi_0'''(r_0)$和$\psi_0''''(r_0)$均用$\Omega(r)$及其各阶导数在$r=r_0$处的值来表示：

$$\psi_0'(r_0)=r_0\Omega^2 \tag{2.13}$$

$$\psi_0''(r_0)=\Omega^2+2r_0\Omega\Omega' \tag{2.14}$$

$$\psi_0'''(r_0)=4\Omega\Omega'+2r_0\Omega'^2+2r_0\Omega\Omega'' \tag{2.15}$$

$$\psi_0''''(r_0)=6\Omega'^2+6\Omega\Omega''+6r_0\Omega'\Omega''+2r_0\Omega\Omega''' \tag{2.16}$$

其中Ω，Ω'，Ω''，Ω'''均表在$r=r_0$取值．此外，我们也将初始条件(2.1)中的$\Delta(\varepsilon)$和$\delta(\varepsilon)$写成ε幂级数：

$$\Delta=\varepsilon\Delta_1+\varepsilon^2\Delta_2+\varepsilon^3\Delta_3+\cdots \tag{2.17}$$

$$\delta=\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\varepsilon^3\delta_3+\cdots \tag{2.18}$$

将(2.7)～(2.18)代入方程(2.5)，(2.6)和初始条件(2.1)，得到关于$\{r_1,\theta_1\}$，$\{r_2,\theta_2\}$，$\{r_3,\theta_3\}$等各级量的方程和初始条件如下：

$$\begin{cases}\ddot{r}_1+2r_0\Omega\Omega'r_1-2r_0\Omega\dot{\theta}_1=-\psi_{1r}(r_0,\theta_0,t) & (2.19)\\ r_0^2\ddot{\theta}_1+2r_0\Omega\dot{r}_1=-\psi_{1\theta}(r_0,\theta_0,t) & (2.20)\\ r_1(0)=\Delta_1,\ \ \theta_1(0)=\delta_1 & (2.21)\\ \dot{r}_1(0)=x_1,\ \ \dot{\theta}_1(0)=x_2/r_0 & (2.22)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ddot{r}_2+2r_0\Omega\Omega'r_2-2r_0\Omega\dot{\theta}_2=r_0\dot{\theta}_1^2+2\Omega r_1\dot{\theta}_1-(2\Omega\Omega' & \\ \quad+r_0\Omega'^2+r_0\Omega\Omega'')r_1^2-\psi_{1rr}(r_0,\theta_0,t)r_1-\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1 & (2.23)\\ r_0^2\ddot{\theta}_2+2r_0\Omega\dot{r}_2=-2\Omega r_1\dot{r}_1-2r_0(\dot{r}_1\dot{\theta}_1+r_1\ddot{\theta}_1) & \\ \quad-\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1-\psi_{1\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1 & (2.24)\\ r_2(0)=\Delta_2,\ \ \theta_2(0)=\delta_2 & (2.25)\\ \dot{r}_2(0)=0,\ \ \dot{\theta}_2(0)=0 & (2.26)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ddot{r}_3+2r_0\Omega\Omega'r_3-2r_0\Omega\dot{\theta}_3=2r_0\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+r_1(\dot{\theta}_1^2+2\Omega\dot{\theta}_2)+2\Omega r_2\dot{\theta}_1 & \\ \quad-(4\Omega\Omega'+2r_0\Omega'^2+2r_0\Omega\Omega'')r_1r_2-(\Omega'^2+\Omega\Omega'' & \\ \quad+r_0\Omega'\Omega''+r_0\Omega\Omega'''/3)r_1^3-\psi_{1rr}(r_0,\theta_0,t)r_2 & \\ \quad-\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_2-\psi_{1rrr}(r_0,\theta_0,t)r_1^2/2 & \\ \quad-\psi_{1rr\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1\theta_1-\psi_{1r\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1^2/2 & (2.27)\\ r_0^2\ddot{\theta}_3+2r_0\Omega\dot{r}_3=-2r_0(\dot{r}_1\dot{\theta}_2+r_1\ddot{\theta}_2)-(2r_1\dot{r}_1+2r_0\dot{r}_2)\dot{\theta}_1 & \\ \quad-(r_1^2+2r_0r_2)\ddot{\theta}_1-2\Omega(\dot{r}_1r_2+r_1\dot{r}_2)-\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)r_2 & \\ \quad-\psi_{1\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_2-\psi_{1rr\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1^2/2-\psi_{1r\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)r_1\theta_1 & \\ \quad-\psi_{1\theta\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)\theta_1^2/2 & (2.28)\\ r_3(0)=\Delta_3,\ \ \theta_3(0)=\delta_3 & (2.29)\\ \dot{r}_3(0)=0,\ \ \dot{\theta}_3(0)=0 & (2.30)\end{cases}$$

由于恒星运动的轨道在$r=r_0$附近，我们将扰动引力势(2.3)作进一步的近似，即令

$$\Psi_1(r)\approx\Psi_1(r_0)\equiv x_3 \tag{2.31}$$

$$\phi(r)\approx\phi(r_0)+\phi'(r_0)(r-r_0)\equiv\phi(r_0)+k(r-r_0) \tag{2.32}$$

于是x_3，k皆常数，x_3为$r=r_0$处扰动引力势的振幅，k为$r=r_0$处径向波数．适当取θ的起点，可使$\phi(r_0)=0$．于是(2.3)式近似为

$$\psi_1(r,\theta,t)=x_3\exp[\gamma t]\cos[\omega_r t-m\theta+k(r-r_0)] \tag{2.33}$$

这一简化仍保留了增长螺旋形扰动的基本特点。在(r_0,θ_0,t)点，我们得到

$$\psi_{1r}(r_0,\theta_0,t)=x_3k\exp[\gamma t]\sin(\beta t+m\alpha) \tag{2.34}$$

$$\psi_{1\theta}(r_0,\theta_0,t)=-x_3m\exp[\gamma t]\sin(\beta t+m\alpha) \tag{2.35}$$

$$\psi_{1rr}(r_0,\theta_0,t)=-x_3k^2\exp[\gamma t]\cos(\beta t+m\alpha) \tag{2.36}$$

$$\psi_{1r\theta}(r_0,\theta_0,t)=x_3km\exp[\gamma t]\cos(\beta t+m\alpha) \tag{2.37}$$

$$\psi_{1\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)=-x_3m^2\exp[\gamma t]\cos(\beta t+m\alpha) \tag{2.38}$$

$$\psi_{1rrr}(r_0,\theta_0,t)=-x_3k^3\exp[\gamma t]\sin(\beta t+m\alpha) \tag{2.39}$$

$$\psi_{1rr\theta}(r_0,\theta_0,t)=x_3k^2m\exp[\gamma t]\sin(\beta t+m\alpha) \tag{2.40}$$

$$\psi_{1r\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)=-x_3km^2\exp[\gamma t]\sin(\beta t+m\alpha) \tag{2.41}$$

$$\psi_{1\theta\theta\theta}(r_0,\theta_0,t)=x_3m^3\exp[\gamma t]\sin(\beta t+m\alpha) \tag{2.42}$$

其中

$$\beta=m(\Omega-\Omega_p)=-\kappa\nu_r \tag{2.43}$$

ν_r为复的无量纲本征频率

$$\nu=(\omega-m\Omega)/\kappa \tag{2.44}$$

的实部，而κ为在轴对称基态引力场中，恒星在$r=r_0$附近径向振荡的固有频率（epicyclic frequency）。它与旋转曲线$\Omega(r)$的关系为：

$$\kappa^2=2r_0\Omega\Omega'+4\Omega^2 \tag{2.45}$$

在我们寻求各级解之前，我们先来引入共动子系综的概念。

三、共动子系综

我们的目的并非研究单个星在增长螺旋引力场中的非线性响应，而是研究恒星的集体行为（例如弥散速度）如何受该引力场的影响。弥散速度是局部的一群星中每个星的个别速度与该群星平均速度偏差的均方根。当螺旋扰动力场存在时，在圆周$r=r_0$上，平均速度仍然依赖于θ，故为求弥散速度而考虑的星群必须是局部的。倘若在$t=0$时，我们考虑$r=r_0$，$\theta=\alpha$附近的所有星构成的系综，即初始条件(2.1)中x_1，x_2，$\varDelta$，δ为四个独立的随机变量。则容易看出，这样一个系综中的星群，在运动过程中不会始终保持在一起，因而在以后某一时刻t，该系综中的弥散速度并不代表我们所寻找的局部弥散速度。为此，我们将只保留x_1为独立的随机变量(以反映初始时刻的径向速度弥散度)，而对x_2，$\varDelta$，δ的取法加以限制，以保证所得的子系综在运动过程中仍然保持在一起，从而这一“共动子系综”的径向弥散速度才能近似代表我们所寻找的局部径向弥散速度。更具体地说，我们要求共动子系综的星要以零级解为中心作振荡。于是，我们令

$$x_2=0 \tag{3.1}$$

因为非零的x_2使偏差$\theta-\theta_0$随时间t持续增长。我们在求各级解的过程中，将会利用“共动”这一要求，定出$\varDelta$和δ对于x_1和x_3的具体依赖关系。x_3为固定量，只有x_1是随机变量，由于初始时刻该共动子系综在θ方向弥散速度已取为零[见(3.1)式]，故我们将只讨论该子系综中径向弥散速度随时间的演化。根据观测，也根据理论上简单性的考虑，我们设x_1的概率分布密度函数为

$$\rho(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,D_1}\exp\left[-\frac{x_1^2}{2D_1^2}\right] \tag{3.2}$$

于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x_1)dx_1=1 \tag{3.3}$$

$$\langle x_1^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2\rho(x_1)dx_1=D_1^2 \tag{3.4}$$

$$\langle x_1^4\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^4\rho(x_1)dx_1=3D_1^4 \tag{3.5}$$

$$\langle x_1\rangle=\langle x_1^3\rangle=0 \tag{3.6}$$

$$\langle (x_1^2-D_1^2)^2\rangle=2D_1^4 \tag{3.7}$$

等等。

四、一 级 解

将方程(2.34)，(2.35)，(3.1)代入(2.19)～(2.22)，我们得到共动子系综中单个星满足的一级方程和初始条件如下：

$$\begin{cases}\ddot{r}_1+2r_0\Omega\Omega' r_1-2r_0\Omega\dot{\theta}_1=-x_3k\exp[\gamma t]\sin(\beta t+ma) & (4.1)\\ r_0^2\ddot{\theta}_1+2r_0\Omega\dot{r}_1=x_3m\exp[\gamma t]\sin(\beta t+ma) & (4.2)\\ r_1(0)=\Delta_1,\ \ \theta_1(0)=\delta_1 & (4.3)\\ \dot{r}_1(0)=x_1,\ \ \dot{\theta}_1(0)=0 & (4.4)\end{cases}$$

方程(4.1)和(4.2)的通解为

$$\begin{cases}r_1=-\dfrac{c_1}{\kappa}\cos\kappa t+\dfrac{c_2}{\kappa}\sin\kappa t+c_3+x_3\exp[\gamma t][y_1\sin(\beta t+ma)\\ \qquad +y_2\cos(\beta t+ma)] & (4.5)\\ \theta_1=\dfrac{2\Omega}{r_0\kappa^2}(c_1\sin\kappa t+c_2\cos\kappa t)+c_3\Omega' t+c_4+(x_3/r_0)\exp[\gamma t][y_3\sin(\beta t+ma)\\ \qquad +y_4\cos(\beta t+ma)] & (4.6)\end{cases}$$

其中 y_1,y_2,y_3,y_4 满足如下线性方程组

$$\begin{bmatrix}\gamma^2-\beta^2+2r_0\Omega\Omega' & -2\gamma\beta & -2\Omega\gamma & 2\Omega\beta\\ 2\gamma\beta & \gamma^2-\beta^2+2r_0\Omega\Omega' & -2\Omega\beta & -2\Omega\gamma\\ 2\Omega\gamma & -2\Omega\beta & \gamma^2-\beta^2 & -2\beta\gamma\\ 2\Omega\beta & 2\Omega\gamma & 2\gamma\beta & \gamma^2-\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k\\ 0\\ m/r_0\\ 0\end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

而积分常数 c_1，c_2，c_3，c_4 以及 Δ_1 和 δ_1 将由初始条件(4.3)、(4.4)以及“共动”条件定出。首先，我们要求共动子系综中的所有星要在零级解 $r=r_0$，$\theta=\theta_0=\Omega t+a$ 附近振荡，亦即要求(r_1,θ_1)，(r_2,θ_2)，…均在(0,0)附近振荡。于是应令

$$c_3=0,\ \ c_4=0 \tag{4.8}$$

于是

$$\dot{r}_1=c_1\sin\kappa t+c_2\cos\kappa t+x_3\exp[\gamma t][(\gamma y_1-\beta y_2)\sin(\beta t+ma)\\ +(\gamma y_2+\beta y_1)\cos(\beta t+ma)] \tag{4.9}$$

和

$$\dot{\theta}_1=\frac{2\Omega}{r_0\kappa}(c_1\cos\kappa t-c_2\sin\kappa t)+\frac{x_3}{r_0}\exp[\gamma t][(\gamma y_3-\beta y_4)\\ \cdot\sin(\beta t+ma)+(\gamma y_4+\beta y_3)\cos(\beta t+ma)] \tag{4.10}$$

将初始条件(4.4)代入(4.9)和(4.10)得到确定c_1和c_2的方程：

$$\begin{cases} \dot{r}_1(0)=c_2+x_3[(\gamma y_1-\beta y_2)\sin ma+(\gamma y_2+\beta y_1)\cos ma]=x_1 & (4.11) \\ \dot{\theta}_1(0)=\dfrac{2\Omega}{r_0\kappa}c_1+\dfrac{x_3}{r_0}[(\gamma y_3-\beta y_4)\sin ma+(\gamma y_4+\beta y_3)\cos ma]=0 & (4.12) \end{cases}$$

由此定出c_1和c_2为

$$c_1=-\frac{x_3\kappa}{2\Omega}[(\gamma y_3-\beta y_4)\sin ma+(\gamma y_4+\beta y_3)\cos ma] \tag{4.13}$$

$$c_2=x_1-x_3[(\gamma y_1-\beta y_2)\sin ma+(\gamma y_2+\beta y_1)\cos ma] \tag{4.14}$$

于是可将一级解写成

$$\begin{cases} r_1=x_1f_1(t)+x_3f_3(t) & (4.15) \\ \theta_1=x_1g_1(t)+x_3g_3(t) & (4.16) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa t & (4.17) \\ g_1=\dfrac{2\Omega}{r_0\kappa^2}\cos\kappa t & (4.18) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_3=&-\frac{1}{\kappa}[(\gamma y_1-\beta y_2)\sin ma+(\gamma y_2+\beta y_1)\cos ma]\sin\kappa t \\ &+\frac{1}{2\Omega}[(\gamma y_3-\beta y_4)\sin ma+(\gamma y_4+\beta y_3)\cos ma]\cos\kappa t \\ &+\exp[\gamma t][y_1\sin(\beta t+ma)+y_2\cos(\beta t+ma)] \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} g_3=\frac{1}{r_0}\Big\{&-\frac{1}{\kappa}[(\gamma y_3-\beta y_4)\sin ma+(\gamma y_4+\beta y_3)\cos ma]\sin\kappa t \\ &-\frac{2\Omega}{\kappa^2}[(\gamma y_1-\beta y_2)\sin ma+(\gamma y_2+\beta y_1)\cos ma]\cos\kappa t \\ &+\exp[\gamma t][y_3\sin(\beta t+ma) \\ &+y_4\cos(\beta t+ma)]\Big\} \end{aligned} \tag{4.20}$$

将已得到的上述一级解(4.15)～(4.20)代入初始条件(4.3)，定出满足共动条件的Δ_1和δ_1为

$$\begin{aligned} \Delta_1=x_3f(0)=x_3\Big[&\Big(y_1+\frac{\gamma}{2\Omega}y_3-\frac{\beta}{2\Omega}y_4\Big)\sin ma \\ &+\Big(y_2+\frac{\gamma}{2\Omega}y_4+\frac{\beta}{2\Omega}y_3\Big)\cos ma\Big] \end{aligned} \tag{4.21}$$

和

$$\begin{aligned} \delta_1&=x_1g_1(0)+x_3g_3(0) \\ &=x_1\frac{2\Omega}{r_0\kappa^2}+\frac{x_3}{r_0}\Big[\Big(y_3-\frac{2\Omega\gamma}{\kappa^2}y_1+\frac{2\Omega\beta}{\kappa^2}y_2\Big)\sin ma \\ &\quad+\Big(y_4-\frac{2\Omega\gamma}{\kappa^2}y_2-\frac{2\Omega\beta}{\kappa^2}y_1\Big)\cos ma\Big] \end{aligned} \tag{4.22}$$

我们应将方程(3.1)，(4.21)和(4.22)看成是共动子系综对于初始条件所加的限制。

五、二级解和三级解的结构

如果我们将一级解(4.15)～(4.20)代入二级方程(2.23)和(2.24)右端，求出完全的二级解，并进而代入三级方程(2.27)和(2.28)的右端，求出完全的三级解，将是一个极其麻烦和和冗长的计算。我们看到，为得出我们需要的物理结论，这样完全的求解是 不 需 要 的。为此，先来分析二级解和三级解的结构。

因为一级解为$x_i(i=1,3)$的线性齐次式，因而二级方程(2.23)和(2.24)右端为$x_ix_j(i,\ j=1,3)$二次齐次式。而二次方程左端与一级方程相同，因此，二级方程通解必可写成如下形式：

$$r_2=-\frac{d_1}{\kappa}\cos\kappa t+\frac{d_2}{\kappa}\sin\kappa t+d_3+x_1^2P_{11}(t)$$

$$+x_1x_3P_{13}(t)+x_3^2P_{33}(t) \tag{5.1}$$

$$\theta_2=\frac{2\Omega}{r_0\kappa^2}(d_1\sin\kappa t+d_2\cos\kappa t)+d_3\Omega' t+d_4$$

$$+x_1^2Q_{11}(t)+x_1x_3Q_{13}(t)+x_3^2Q_{33}(t) \tag{5.2}$$

共动条件要求

$$d_3=0,\quad d_4=0 \tag{5.3}$$

再利用初始条件 (2.26)，可知d_1和d_2也是 $x_ix_j(i,\ j=1,\ 3)$ 二次齐次式。于是可将共动子系综中成员星的二级解最终写成x_1和x_3的二次齐次式形式：

$$\begin{cases} r_2=x_1^2F_{11}(t)+x_1x_3F_{13}(t)+x_3^2F_{33}(t) & (5.4)\\ \theta_2=x_1^2G_{11}(t)+x_1x_3G_{13}(t)+x_3^2G_{33}(t) & (5.5)\end{cases}$$

而$\varDelta_2$，δ_2，将由方程 (2.25)，(5.4) 和 (5.5) 定出，它们也是 x_ix_j $(i,\ j=1,\ 3)$ 二次齐次式。按同样的论证，我们可将共动子系综中成员星的三级解写成x_1和x_3的三次齐次式：

$$\begin{cases} r_3=x_1^3H_{111}(t)+x_1^2x_3H_{113}(t)+x_1x_3^2H_{133}(t)+x_3^3H_{333}(t) & (5.6)\\ \theta_3=x_1^3L_{111}(t)+x_1^2x_3L_{113}(t)+x_1x_3^2L_{133}(t)+x_3^3L_{333}(t) & (5.7)\end{cases}$$

$\varDelta_3$和δ_3由方程 (2.29)，(5.6) 和 (5.7) 定出。

于是共动子系综中成员星的径向速度为

$$\begin{aligned}\dot r&=\varepsilon\dot r_1+\varepsilon^2\dot r_2+\varepsilon^3\dot r_3+\cdots\\ &=\varepsilon(x_1\dot f_1+x_3\dot f_3)+\varepsilon^2(x_1^2\dot F_{11}+x_1x_3\dot F_{13}+x_3^2\dot F_{33})\\ &\quad+\varepsilon^3(x_1^3\dot H_{111}+x_1^2x_3\dot H_{113}+x_1x_3^2\dot H_{133}+x_3^3\dot H_{333})+\cdots\end{aligned} \tag{5.8}$$

我们用〈 〉表示共动子系综中的平均值。于是，该共动子系综中的星在时刻t径向速度的平均值为

$$\langle\dot r\rangle=\varepsilon x_3\dot f_3+\varepsilon^2(D_1^2\dot F_{11}+x_3^2\dot F_{33})+\varepsilon^3(D_1^2x_3\dot H_{113}+x_3^3\dot H_{333})+\cdots \tag{5.9}$$

这里已用方程 (3.4) 和 (3.6)。于是得到

$$\begin{aligned}\dot r-\langle\dot r\rangle&=\varepsilon x_1\dot f_1+\varepsilon^2[(x_1^2-D_1^2)\dot F_{11}+x_1x_3\dot F_{13}]\\ &\quad+\varepsilon^3[x_1^3\dot H_{111}+x_3(x_1^2-D_1^2)\dot H_{113}+x_1x_3^2\dot H_{133}]+\cdots\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$(\dot r-\langle\dot r\rangle)^2=\varepsilon^2x_1^2\dot f_1^2+2\varepsilon^3\dot f_1[(x_1^3-D_1^2x_1)\dot F_{11}+x_1^2x_3\dot F_{13}]$$

$$+\varepsilon^4\{(x_1^2-D_1^2)^2\dot F_{11}^2+x_1^2x_3^2\dot F_{13}^2+2x_1(x_1^2-D_1^2)x_3\dot F_{13}$$
$$+2\dot f_1[x_1^4\dot H_{111}+(x_1^3-D_1^2x_1)x_3\dot H_{113}+x_1^2x_3^2\dot H_{133}]\}+\cdots \tag{5.11}$$

和

$$\langle(\dot r-\langle\dot r\rangle)^2\rangle=\varepsilon^2D_1^2\dot f_1^2+2\varepsilon^3D_1^2x_3\dot f_1\dot F_{13}+\varepsilon^4\{2D_1^4\dot F_{11}^2$$
$$+D_1^2\dot F_{13}^2x_3^2+6\dot f_1\dot H_{111}D_1^4+2D_1^2\dot f_1\dot H_{133}x_3^3\}+\cdots \tag{5.12}$$

应当指出，$\langle(\dot r-\langle\dot r\rangle)^2\rangle$只代表$t=0$时刻位于$r=r_0$，$\theta=\alpha$附近的共动子系综中的星（$x_2=0$）在时刻$t$径向速度的方差．事实上，由于大多数星$x_2\neq0$，因而使同一圆周$r=r_0$上各处的径向速度方差趋于相等．因此，只有将（5.12）式对α取平均，并对含有振荡因子的项在一个振荡周期中取平均，才能代表$r=r_0$处在时刻t的径向弥散速度平方．采用通常星系动力学中的符号，为

$$\langle C_R^2\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\langle(\dot r-\langle\dot r\rangle)^2\rangle}d\alpha \tag{5.13}$$

其中"——"表示对时间在一个振荡周期中平均．当$x_3=0$（基态）时，有

$$\langle C_R^2\rangle_0=\varepsilon^2D_1^2\overline{\dot f_1^2}+\varepsilon^4\{2D_1^4\overline{\dot F_{11}^2}+6\overline{\dot f_1\dot H_{111}}D_1^4\}\approx\varepsilon^2D_1^2\overline{\dot f_1^2} \tag{5.14}$$

由（4.17）式有

$$\overline{\dot f_1^2}=\overline{\cos^2\kappa t}=1/2 \tag{5.15}$$

因此

$$\langle C_R^2\rangle_0\approx\varepsilon^2D_1^2/2 \tag{5.16}$$

在（5.12）中含有x_3的三项中，由于$\dot F_{13}$，$\dot H_{133}$均以$2\pi/m$为周期随α振荡，故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot f_1\dot F_{13}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot f_1\dot H_{133}d\alpha=0 \tag{5.17}$$

因而

$$\Delta\langle C_R^2\rangle\equiv\langle C_R^2\rangle-\langle C_R^2\rangle_0$$
$$=\varepsilon^4D_1^2x_3^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\dot F_{13}^2}d\alpha+O(\varepsilon^5) \tag{5.18}$$

这样，为计算增长螺旋形扰动引力场对$\langle C_R^2\rangle$影响的主项，我们只需计算二级解中F_{13}项即可．

六、径向弥散速度增长的估算

为了尽可能简单地估算出$\Delta\langle C_R^2\rangle$的量级，我们进一步考虑紧卷螺旋波的情形．于是我们可以采用密度波理论中常用的一个近似，即径向波数$|k|$为一个大参数．我们在方程(2.23)和（2.24）右端只保留关于k的最高项(k^2项)．注意到$\Delta\langle C_R^2\rangle$只与$F_{13}$有关，$F_{13}$是二级方程（2.23）～(2.24）右端只保留含$x_1x_3$的项，且令$x_1x_3=1$而得到的解．而在方程（2.23）和（2.24）右端，含有x_1x_3的项且关于k的量阶为$O(k^2)$者，只剩下

$$-\psi_{1rr}(r_0,\theta_0,t)x_1f_1=x_1x_3k^2\frac{1}{\kappa}\sin\kappa t\cdot\exp[\gamma t]\cos(\beta t+m\alpha)$$
$$=x_1x_3\frac{k^2}{2\kappa}\exp[\gamma t]\{\sin[(\beta+\kappa)t+m\alpha]-\sin[(\beta-\kappa)t+m\alpha]\} \tag{6.1}$$

因此，我们得到F_{13}的近似提法如下：

$$\begin{cases}\ddot{r}_2+2r_0\Omega\Omega' r_2-2r_0\Omega\dot{\theta}_2=\dfrac{k^2}{2\kappa}\exp[\gamma t]\{\sin[(\beta+\kappa)t+m\alpha] \\ \qquad -\sin[(\beta-\kappa)t+m\alpha]\} & (6.2)\\ r_0\ddot{\theta}_2+2\Omega\dot{r}_2=0 & (6.3)\\ r_2(0)=\Delta_{2,13},\ \ \theta_2(0)=\delta_{2,13} & (6.4)\\ \dot{r}_2(0)=0,\ \ \dot{\theta}_2(0)=0 & (6.5)\end{cases}$$

其中$\Delta_{2,13}$和$\delta_{2,13}$将由共动条件定出．它们与Δ_2和δ_2的关系为

$$\begin{cases}\Delta_2=x_1^2\Delta_{2,11}+x_1x_3\Delta_{2,13}+x_3^2\Delta_{2,33} & (6.6)\\ \delta_2=x_1^2\delta_{2,11}+x_1x_3\delta_{2,13}+x_3^2\delta_{2,33} & (6.7)\end{cases}$$

方程 (6.2) 和 (6.3) 的通解为

$$\begin{cases}r_2\equiv F_{13}=\dfrac{d_2}{\kappa}\sin\kappa t-\dfrac{d_1}{\kappa}\cos\kappa t+d_3+r_{2*} & (6.8)\\ \theta_2=\dfrac{2\Omega}{r_0\kappa^2}(d_1\sin\kappa t+d_2\cos\kappa t)+d_3\Omega' t+d_4+\theta_{2*} & (6.9)\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}r_{2*}=\exp[\gamma t]\{z_{11}\sin[(\beta+\kappa)t+m\alpha]+z_{21}\cos[(\beta+\kappa)t+m\alpha] \\ \qquad -z_{12}\sin[(\beta-\kappa)t+m\alpha]-z_{22}\cos[(\beta-\kappa)t+m\alpha]\} & (6.10)\\ \theta_{2*}=\dfrac{\exp[\gamma t]}{r_0}\{z_{31}\sin[(\beta+\kappa)t+m\alpha]+z_{41}\cos[(\beta+\kappa)t+m\alpha] \\ \qquad -z_{32}\sin[(\beta-\kappa)t+m\alpha]-z_{42}\cos[(\beta-\kappa)t+m\alpha]\} & (6.11)\end{cases}$$

方程 (6.10) 和 (6.11) 中的八个常数 z_{1i}，z_{2i}，z_{3i}，z_{4i} $(i=1,\ 2)$ 由以下线性方程组写出：

$$\begin{bmatrix}\gamma^2-b_i^2+2r_0\Omega\Omega' & -2\gamma b_i & -2\Omega\gamma & 2\Omega b_i\\ 2\gamma b_i & \gamma^2-b_i^2+2r_0\Omega\Omega' & -2\Omega b_i & -2\Omega\gamma\\ 2\Omega\gamma & -2\Omega b_i & \gamma^2-b_i^2 & -2\gamma b_i\\ 2\Omega b_i & 2\Omega\gamma & 2\gamma b_i & \gamma^2-b_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{1i}\\ z_{2i}\\ z_{3i}\\ z_{4i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$(i=1,\ 2) \qquad (6.12)$$

其中

$$a=k^2/2\kappa,\ \ b_1=\beta+\kappa,\ \ b_2=\beta-\kappa \qquad (6.13)$$

由共动条件，应令

$$d_3=0,\ \ d_4=0 \qquad (6.14)$$

再由初始条件 (6.5) 定出d_1和d_2如下：

$$d_1=-\frac{r_0\kappa}{2\Omega}\dot{\theta}_{2*}(0),\ \ d_2=-\dot{r}_{2*}(0) \qquad (6.15)$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\dot{F}_{13}=&d_1\sin\kappa t+d_2\cos\kappa t+\exp[\gamma t]\{[\gamma z_{11}-(\beta+\kappa)z_{21}]\\ &\cdot\sin[(\beta+\kappa)t+m\alpha]+[\gamma z_{21}+(\beta+\kappa)z_{11}]\cos[(\beta+\kappa)t+m\alpha]\end{aligned}$$

$$+[-\gamma z_{12}+(\beta-\kappa)z_{22}]\sin[(\beta-\kappa)t+m\alpha]$$
$$+[-\gamma z_{22}-(\beta-\kappa)z_{12}]\cos[(\beta-\kappa)t+m\alpha]\} \qquad (6.16)$$

若只保留随指数增长的项，我们得到，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{13}^2\, d\alpha \sim \frac{1}{2}\exp[2\gamma t]\{[\gamma z_{11}-(\beta+\kappa)z_{21}]^2+[\gamma z_{21}+(\beta+\kappa)z_{11}]^2$$
$$+[-\gamma z_{12}+(\beta-\kappa)z_{22}]^2+[\gamma z_{22}+(\beta-\kappa)z_{12}]^2\} \qquad (6.17)$$

于是得到关于$\Delta\langle C_3^2\rangle$随时间增长的近似估计式（见(5.16)，(5.18)和(6.17)式）如下：

$$\Delta\langle C_3^2\rangle/\langle C_3^2\rangle_0 \approx \varepsilon^2 x_3^2 \exp[2\gamma t]\{[\gamma z_{11}-(\beta+\kappa)z_{21}]^2$$
$$+[\gamma z_{21}+(\beta+\kappa)z_{11}]^2+[-\gamma z_{12}+(\beta-\kappa)z_{22}]^2$$
$$+[\gamma z_{22}+(\beta-\kappa)z_{12}]^2\} \qquad (6.18)$$

为得出更简单、更具体的估计式，我们进一步考虑

$$\gamma \ll |b_i| \qquad (6.19)$$

的情形，这对于密度波理论中通常考虑的不太高的（moderate）增长率情形，在密度波存在的主区（不太接近共转圈处）成立。于是，作为初级近似，在方程组（6.12）中令$\gamma=0$，得到如下近似解：

$$z_{1i}=a/(\kappa^2-b_i^2),\ z_{2i}=0,\ z_{3i}=0,\ z_{4i}=2\Omega a/b_i(\kappa^2-b_i^2) \qquad (i=1,\ 2) \qquad (6.20)$$

将此式代入（6.18），并进一步略去（6.18）式花括号中含γ的项，得到

$$\frac{\Delta\langle C_3^2\rangle}{\langle C_3^2\rangle_0} = \varepsilon^2 x_3^2 \exp[2\gamma t]\frac{k^4}{4\kappa^4\nu_r^2}\left[\left(\frac{1-\nu_r}{2-\nu_r}\right)^2+\left(\frac{1+\nu_r}{2+\nu_r}\right)^2\right] \qquad (当\nu_r远离0，\pm1)$$

$$(6.21)$$

由于$t=0$时刻扰动力场振幅为$\varepsilon x_3|k|$，而$r=r_0$处基态引力大小为$r_0\Omega^2(r_0)$，因此，我们引进小参数

$$\varepsilon_1=\varepsilon x_3|k|/r_0\Omega^2 \qquad (6.22)$$

于是得到

$$\frac{\Delta\langle C_3^2\rangle}{\langle C_3^2\rangle_0} \sim \frac{1}{4}\varepsilon_1^2\exp[2\gamma t](kr_0)^2\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^4\frac{1}{\nu_r^2}\left[\left(\frac{1-\nu_r}{2-\nu_r}\right)^2+\left(\frac{1+\nu_r}{2+\nu_r}\right)^2\right] \qquad (6.23)$$

对于常见的旋转曲线，除去中心区外，近似有

$$\Omega \propto 1/r \qquad (6.24)$$

这时有

$$\kappa=\sqrt{2}\,\Omega \qquad (6.25)$$

于是得

$$\frac{\Delta\langle C_3^2\rangle}{\langle C_3^2\rangle_0} \sim \frac{1}{16}\varepsilon_1^2\exp[2\gamma t](kr_0)^2\frac{1}{\nu_r^2}\left[\left(\frac{1-\nu_r}{2-\nu_r}\right)^2+\left(\frac{1+\nu_r}{2+\nu_r}\right)^2\right]$$

$$(\nu_r不近于0，\pm1) \qquad (6.26)$$

由

$$Q=\kappa\langle C_3^2\rangle^{1/2}/\pi G\sigma_0 \qquad (6.27)$$

得到

$$\frac{\Delta Q}{Q_0}\sim\frac{1}{2}\,\frac{\Delta\langle C_s^2\rangle}{\langle C_s^2\rangle_0}\sim\frac{1}{32}\,\varepsilon_1^2\exp[2\gamma t](kr_0)^2\,\frac{1}{\nu_r^2}\left[\left(\frac{1-\nu_r}{2-\nu_r}\right)^2+\left(\frac{1+\nu_r}{2+\nu_r}\right)^2\right] \tag{6.28}$$

取典型值

$$|kr_0|\sim10,\ \nu_r\sim-1/2,\ \varepsilon_1\sim0.05 \tag{6.29}$$

得到

$$\Delta\langle C_s^2\rangle/\langle C_s^2\rangle_0\sim0.029\exp[2\gamma t] \tag{6.30}$$

和

$$\Delta Q/Q_0\sim0.015\exp[2\gamma t] \tag{6.31}$$

在典型情形

$$\gamma P\sim1\qquad(P=2\pi/\Omega) \tag{6.32}$$

得

$$\Delta\langle C_s^2\rangle/\langle C_s^2\rangle_0\sim0.029\exp[2t/P] \tag{6.33}$$

和

$$\frac{\Delta Q}{Q_0}\sim\frac{1}{2}\,\frac{\Delta\langle C_s^2\rangle}{\langle C_s^2\rangle}\sim0.015\exp[2t/P] \tag{6.34}$$

当$t\sim P$（即转一圈）时，已会使$(\Delta Q)/Q_0\sim0.11$。由密度波模式计算的经验[5,6]，我们知道，Q增加百分之十便会造成增长率γ的显著下降。

七、结　　论

本文计算表明，由非线性效应所导致的在增长模式作用下Q随时间的增长对于增长螺旋模式最终趋于稳定起着重要作用。由（6.28）式可知，当振幅较小，增长率也较小时，Q增加的慢；相反，当增长率较大，或振幅本身较大时，Q增加也较快。因此，这一非线性效应对于达到准稳起到自调节作用。当然，限制密度波振幅增长的还有其它因素，如气体的耗散等等。但本文所讨论的恒星的非线性响应对于波幅增长的致稳效应是非常重要的。

参　考　文　献

[1] Lin, C. C. and Y. Y. Lau, Density wave theory of spiral structure of galaxies, *Studies in Appl. Math.*, **60** (1979), 97.

[2] Bertin, G., C. C. Lin and S. A. Lowe, On the morphology of spiral modes, *Proceedings of a Course & Workshop on Plasma Astrophysics*, Varenna, Italy, 28 Aug.—7 Sep. (1984), 115—120.

[3] Lin, C. C. and R. P. Thurstans, On a spectral theory of the excitation mechanism of galactic spirals, ibid, 121—130.

[4] Lin, C. C. and G. Bertin, *The Milky Way Galaxy*, Ed. H. van Woerden, et al. (1985), 513—532.

[5] Thurstans, R. P., On spiral modes in galaxy models, Ph. D. Thesis, MIT, USA (1987).

[6] Lowe, S. A., On the viability of the model theory for spiral structure in galaxies, Ph. D. Thesis, MIT, USA (1988).

Nonlinear Stellar Response to the Growing Spiral Gravitational Disturbance and Its Stabilizing Effect on the Growing Mode

Zhang Bin Yue Zeng-yuan

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing)

Abstract

The nonlinear stellar response to the growing spiral gravitational disturbance is calculated. The result shows that this nonlinear response leads to the increase of Q, and the decrease of the growth rate. This self-regulation mechanism is an important reason for the growing spiral mode to reach a quasi-stationary state eventually.

Key words galactic density wave, spiral structure, nonlinear stellar response