精确解析法的子结构算法

纪振义　　叶开沅

（安徽建筑工业学院）　　（兰州大学）

（1989年9月16日收到）

摘　　要

文[1]提出精确解析法，用以求解任意变系数常微分方程，并利用初参数算法给出一个解的解析表达式．但利用初参数算法，对某一类问题，如长柱壳弯曲和振动等，它们的解将难以在计算机上得到．本文通过非均匀轴对称长圆柱壳弯曲问题，给出精确解析法的子结构算法，它能够计算初参数算法在计算机上不能解决的问题．问题最后和初参数算法一样能归结为求解一个低阶代数方程组．文末给出算例，表明本文算法的正确性，并和初参数算法作了比较．

关键词　子结构算法，精确解析法，长圆柱壳

一、引　　言

工程中许多非均匀弹性力学问题，可归结为求解任意变系数微分方程问题．如轴对称圆板，变截面梁及轴对称圆柱壳的弯曲和屈曲．文[1]给出求解任意变系数微分方程的精确解析法，利用初参数算法给出一个解的解析表达式．它能一致收敛于精确解．初参数算法具有解的公式简单，运算非常容易等特点．但它对某一类问题，如轴对称长柱壳弯曲、振动和稳定问题，由于计算机字长的限制将难以计算．

本文以非均匀轴对称长柱壳弯曲为例，给出精确解析法的子结构算法．它所得到的解一致收敛于精确解，能够解决初参数算法不能计算的问题，是一个带有普遍性的算法．和初参数算法一样，对 $2k$ 阶微分方程问题最后归结为求解k阶线性代数方程．文末给出算例，计算结果表明了本文算法的正确性和普遍性．

二、非均匀长柱壳弯曲的子结构算法

这里以长柱壳轴对称变形为例，给出精确解析法的子结构算法．从[2]，我们可得非均匀圆柱壳的平衡方程

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)-N_x\frac{d^2w(x)}{dx^2}+\frac{E(x)h(x)}{r^2(x)}w(x)=q(x) \tag{2.1}$$

这里

$$\bar{q}(x)=q(x)-\frac{\nu(x)}{r(x)}N_x$$

内力和位移的关系

$$M_x=-D(x)\frac{d^2w}{dx^2},\quad Q_x=-\frac{d}{dx}\left(D(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) \tag{2.2}$$

式中记号：w 为圆柱壳的径向挠度；$E(x)$和 $\nu(x)$分别为弹性模量和泊松比；$h(x)$和 $r(x)$分别为柱壳的厚度和半径；N_x为轴向膜力；M_x 和 Q_x 分别为轴向弯矩和横向剪力；$D(x)$为弯曲刚度，$D(x)=E(x)h^3(x)/12(1-\nu^2(x))$；$q(x)$为柱壳径向分布载荷.

把柱壳分成N个壳元，假设第 i 个壳元的区间是$[x_{i-1},\ x_i)$。因(2.1)可以写成

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left[\left(N_x\frac{dw}{dx}x\right)_{,x}-x\left(N_x\frac{dw}{dx}\right)_{,x}\right]$$

$$+\left(x\frac{E(x)h(x)}{r^2(x)}w(x)\right)_{,x}-x\left(\frac{E(x)h(x)}{r^2(x)}w(x)\right)_{,x}=\bar{q}(x) \tag{2.3}$$

由[1]中的精确解析法理论，(2.3)可以变为

$$D_i\frac{d^4w}{dx^4}=\bar{q}(x)\qquad x\in[x_{i-1},\ x_i) \tag{2.4}$$

以及(2.2)可以变为

$$\left.\begin{aligned}&Q_x+N_x\frac{dw}{dx}=-D_i\frac{d^3w}{dx^3}+(x-\bar{x}_i)\frac{E(x)h(x)}{r^2(x)}w(x)\\&M_x=-D_i\frac{d^2w}{dx^2}-(x-\bar{x}_i)N_x\frac{dw}{dx}\qquad x\in[x_{i-1},\ x_i)\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式中D_i和$\bar{x}_i$是$D(x)$和x在单元中点的值．如果w，dw/dx和(2.5)中的Q_x+N_xdw/dx，M_x在单元之间连续，并且w满足方程(2.4)，由(2.4)和(2.5)所得到的位移和内力当 $N\to\infty$ 时，可一致收敛于精确解．其初参数解[1]为

$$\left.\begin{aligned}&\{\delta(x)\}=[F_i(x-x_{i-1})]\{\delta(0)\}+\{P_i(x)\}+\sum_{m=1}^{i-1}\{x-x_m\}^\circ[F_i(x-x_{i-1})]\{A_m\}\\&\{A_{i-1}\}=([F_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})]-[I])\{\delta(0)\}+\{P_{i-1}(x_{i-1})\}+\sum_{m=1}^{i-2}\{x-x_m\}^\circ\\&\quad\cdot([F_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})]-[I])\{A_m\}\qquad x\in[x_{i-1},x_i)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

这里矢量

$$\{\delta(x)\}=\left\{w(x)\quad\frac{dw(x)}{dx}\quad M_x(x)\quad Q_x(x)+N_x\frac{dw(x)}{dx}\right\}^T$$

记号

$$\{x-x_m\}^\circ=\begin{cases}0 & (x<x_m)\\1 & (x\geqslant x_m)\end{cases}$$

是 Heaviside 函数，我们可以容易地

$$
[F_i(x-x_{i-1})]=\begin{bmatrix}
1-\frac{1}{6D_i}\cdot\frac{\Delta}{2}\bar{E}(x_{i-1})(x-x_{i-1})^3 & (x-x_{i-1})+\frac{1}{2D_i}\frac{\Delta}{2}N_x(x-x_{i-1})^2 & -\frac{1}{2D_i}(x-x_{i-1})^2 & -\frac{1}{6D_i}(x-x_i)^3 \\
-\frac{1}{2D_i}\frac{\Delta}{2}\bar{E}(x_{i-1})(x-x_{i-1})^2 & 1+\frac{1}{D_i}\frac{\Delta}{2}N_x(x-x_{i-1}) & -\frac{1}{D_i}(x-x_{i-1}) & -\frac{1}{2D_i}(x-x_{i-1})^2 \\
\frac{\Delta}{2}\left[\bar{E}(x_{i-1})(x-x_{i-1})+(x-\bar{x}_i)\frac{\bar{E}(x_{i-1})}{2D_i}N_x(x-x_{i-1})^2\right] & -\frac{\Delta}{2}N_x-(x-\bar{x}_i)N_x\left[1+\frac{1}{D_i}\cdot\frac{\Delta}{2}N_x(x-x_{i-1})\right] & 1+(x-\bar{x}_i)N_x\frac{1}{D_i}(x-x_{i-1}) & (x-x_{i-1})+(x-\bar{x}_i)N_x\cdot\frac{1}{2D_i}(x-x_{i-1})^2 \\
\frac{\Delta}{2}\bar{E}(x_{i-1})+(x-\bar{x}_i)\bar{E}(x)\cdot\left(1-\frac{1}{6D_i}\frac{\Delta}{2}\bar{E}(x_{i-1})(x-x_{i-1})^3\right) & (x-\bar{x}_i)\bar{E}(x)\left[(x-x_{i-1})+\frac{1}{2D_i}\frac{\Delta}{2}N_x(x-x_{i-1})^2\right] & -(x-\bar{x}_i)\bar{E}(x)\frac{1}{2D_i}\cdot(x-x_{i-1})^2 & 1-(x-\bar{x}_i)\bar{E}(x)\frac{1}{6D_i}\cdot(x-x_{i-1})^3
\end{bmatrix}
\tag{2.7}
$$

和

$$
\{P_i(x)\}=\begin{Bmatrix}
\int_{x_{i-1}}^{x}\frac{x-\rho}{6D_i}\bar{q}(\rho)d\rho \\
\int_{x_{i-1}}^{x}\frac{(x-\rho)^2}{2D_i}\bar{q}(\rho)d\rho \\
-\int_{x_{i-1}}^{x}[(x-\rho)+(x-\bar{x}_i)N_x(x-\rho)^2/2D_i]\bar{q}(\rho)d\rho \\
-\int_{x_{i-1}}^{x}[1-(x-\bar{x}_i)\bar{E}(x)(x-\rho)^3/6D_i]\bar{q}(\rho)d\rho
\end{Bmatrix}
\tag{2.8}
$$

式中

$$\Delta/2=\bar{x}_i-x_{i-1},\quad \bar{E}(x)=E(x)h(x)/r^2(x)$$

我们不难证明

$$\{\delta(x_i)\}=[F_i(x_i-x_{i-1})]\{\delta(x_{i-1})\}+\{P_i(x_i)\}\tag{2.9}$$

首先，由(2.6)式，令$x=x_{i-1}$则可得

$$\{\delta(0)\}=\{\delta(x_{i-1})\}-\sum_{m=1}^{i-1}\{x-x_m\}^\circ\{A_m\}$$

将$\{\delta(0)\}$代入(2.6)式，即可获得(2.9)式。(2.9)式是矩阵迁移法公式，从而可得(2.6)式计算结果与矩阵迁移法相同。重新排列(2.9)中的$[F_i(x_i-x_{i-1})]$和$\{P_i(x_i)\}$中元素，可以得到

$$\begin{Bmatrix}\delta_1(x_i)\\\delta_2(x_i)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1(x_{i-1})\\\delta_2(x_{i-1})\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1(x_i)\\P_2(x_i)\end{Bmatrix}\tag{2.10}$$

式中

$$\delta_1=\begin{Bmatrix}w\\\dfrac{dw}{dx}\end{Bmatrix},\quad \delta_2=\begin{Bmatrix}Q_x+N_x\dfrac{dw}{dx}\\M_x\end{Bmatrix}\tag{2.11}$$

从(2.10)，我们不难推出

$$\begin{Bmatrix}\delta_2(x_{i-1})\\\delta_2(x_i)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1(x_{i-1})\\\delta_1(x_i)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\end{Bmatrix}\tag{2.12}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}&K_{11}=-F_{12}^{-1}F_{11},\ K_{12}=F_{12}^{-1},\ R_1=-F_{12}^{-1}P_1(x_i)\\&K_{21}=F_{21}-F_{22}F_{12}^{-1}F_{11},\ K_{22}=F_{22}F_{12}^{-1},\ R_2=P_2(x_i)-F_{22}F_{12}^{-1}P_1(x_i)\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

我们假定对第$i-1$个单元已写成子结构形式

$$\delta_2(x_{i-1})=Z_{i-1}\delta_1(x_{i-1})+U_{i-1}\tag{2.14}$$

由(2.12)和(2.14)，消去$\delta_2(x_{i-1})$我们有

$$\begin{Bmatrix}0\\\delta_2(x_i)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}-Z_{i-1} & K_{12}\\K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1(x_{i-1})\\\delta_1(x_i)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}R_1-U_{i-1}\\R_2\end{Bmatrix}\tag{2.15}$$

从而求得

$$\delta_1(x_{i-1})=-(K_{11}-Z_{i-1})^{-1}(K_{12}\delta_1(x_i)+R_1-U_{i-1})\tag{2.16}$$

$$\delta_2(x_i)=Z_i\delta_1(x_i)+U_i\tag{2.17}$$

式中 $Z_i=K_{22}-K_{21}(K_{11}-Z_{i-1})^{-1}K_{12},\quad U_i=R_2-K_{21}(K_{11}-Z_{i-1})^{-1}(R_1-U_{i-1})$ (2.18)

从(2.14～2.18)，类推可得

$$\delta_2(x_N)=Z_N\delta_1(x_N)+U_N\tag{2.19}$$

一般地，当边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\text{简支时}\quad w=M_x=0\\&\text{固支时}\quad w=dw/dx=0\\&\text{自由时}\quad M_x=Q_x+N_x dw/dx=0\end{aligned}\right\}\tag{2.20}$$

把终端边界条件(2.20)代入(2.19)，即可求出$\delta_1(x_N)$和$\delta_2(x_N)$。再反复利用(2.16～2.17)，单元交接处的位移和内力可以被得到。

在第一个单元上，我们有

$$\begin{Bmatrix}\delta_1(x_1)\\\delta_2(x_1)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{01}\\\delta_{02}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1(x_1)\\P_2(x_1)\end{Bmatrix}\tag{2.21}$$

这里δ_{01}表示由已知边界条件已经确定，δ_{02}是未知的。从(2.21)可以得到

$$\delta_{02}=F_{12}^{-1}(\delta_1(x_1)-F_{11}\delta_{01}-P_1(x_1))\tag{2.22}$$

$$\delta_2(x_1)=Z_1\delta_1(x_1)+U_1\tag{2.23}$$

式中 $Z_1=F_{22}F_{12}^{-1},\quad U_1=P_2(x_1)+F_{21}\delta_{01}-F_{22}F_{12}^{-1}(F_{11}\delta_{01}+P_1(x_1))$ (2.24)

利用(2.23)，我们不难得到(2.14)式，

三、算　　例

算例1　一个带有线性变厚度注满水的水池[2]，它的顶端厚度 $\delta_t=8.89\text{cm}$，底端厚度 $\delta_b=35.56\text{cm}$，长 $l=792.48\text{cm}$，半径 $r=914.4\text{cm}$，弹性模量 $E=2.1\times10^6\text{kgf/cm}^2(=2.06\times10^7\text{N/cm}^2)$，泊松比 $\nu=0.25$，水的容重 $\gamma=0.001\text{kg/cm}^3$。顶端自由，底端固定。将水池分成 N 个等厚度壳元，每个壳元上的厚度和载荷均取壳元上的平均值。表1给出了 $N=10$ 和 $N=45$ 时，子结构算法的计算结果，并和初参数算法(利用公式(2.6))及[2]的结果作了比较。从表1可以看出虽然本文采用的基本解是多项式，但仍能收敛于精确解。在本例中，由于水池是短柱壳，因此初参数算法和子结构算法数值计算是相同的。

表1　　水池的径向位移 w 和纵向弯矩 M_x

x		0		304.8		609.6		746.8		792.5	
		$0.01w$	M_x	$0.01w$	M_x	$0.01w$	M_x	$0.01w$	M_x	$0.01w$	M_x
$N=10$	初参数算法	0.1270	0	0.6917	−87.77	0.5742	672.0	0.0735	−2985	0	−6534
	子结构算法	0.1270	0	0.6917	−87.78	0.5742	672.0	0.0735	−2985	0	−6541
	[2]解	0.1057	0	0.6641	45.94	0.5628	907.5	0.0715	−2840	0	−6470
$N=45$	初参数算法	0.06233	0	0.6652	40.44	0.5579	891.5	0.0680	−2925	0	−6591
	子结构算法	0.06232	0	0.6652	40.80	0.5578	891.6	0.0680	−2924	0	−6593
	[2]解	0.0610	0	0.6641	48.03	0.5579	902.6	0.0679	−2923	0	−6592
精确解		0.06014	0	0.6660	48.39	0.5583	903.3	0.0679	−2928	0	−6605

算例2　为了便于和精确解比较，我们计算一个带有均匀载荷简支边界条件的均匀长柱壳，它的弹性模量 $E=1544.2$，泊松比 $\nu=0.3$，厚度 $h=0.107$，半径 $r=10.7$ 和均布载荷 $q=1$。它的几何参数定义为

$$Z=(l^2/rh)\sqrt{1-\nu^2}$$

是柱壳的长度。我们取 $N=80$。表2给出对不同的几何参数的柱壳，由子结构算法计算的位移 w，dw/dx 和内力 Q_x，并和初参数算法（利用公式(2.6)）及精确解作了比较。由计算结果可以得到初参数算法当 $Z\geqslant200$ 时，在 $x=l$ 处已有很大的误差，但子结构法能够避免这种误差，可求解任意长度柱壳的位移和内力。本文中的解均采用单精度计算。

表2　　均匀长柱壳的位移和内力($N=80$)

Z		100			200		
x		0	$l/2$	l	0	$l/2$	l
w	子结构算法	0	0.6909	0	0	0.6916	0
	初参数算法	0	0.6913	0.082	0	0.6913	17.60
	精确解	0	0.6929	0	0	0.6929	0
$\frac{dw}{dx}$	子结构算法	0.8325	−8E−5	−0.8324	0.8326	−4E−5	−0.8326
	初参数算法	0.8325	9E−5	−0.8165	0.8327	−1.7E−3	−20.52
	精确解	0.8324	0	−0.8324	0.8324	0	−0.8324
Q_x	子结构算法	0.4181	−1.7E−4	−0.4182	0.4205	−1E−4	−0.4201
	初参数算法	0.4181	−1.1E−4	−0.3271	0.4201	−1E−4	10.14
	精确解	0.4162	0	−0.4162	0.4162	0	−0.4162

续表 2

	Z	500			1500		
	x	0	$l/2$	l	0	$l/2$	l
w	子结构算法	0	0.6940	0	0	0.7024	0
	初参数算法	0	0.6346	−6E5			
	精确解	0	0.6929	0	0	0.6929	0
$\frac{dw}{dx}$	子结构算法	0.8340	−4E−6	−0.8339	0.8461	9E−7	−0.8461
	初参数算法	0.8340	−0.5137	−8E4			
	精确解	0.8324	0	−0.8324	0.8324	0	−0.8324
Q_x	子结构算法	0.4261	−2E−4	−0.4265	0.4474	−3.6E−3	−0.4547
	初参数算法	0.4261	0.1794	−7E5			
	精确解	0.4162	0	−0.4162	0.4162	0	−0.4162

以上算例表明了本文算法的正确性和收敛性，对于初参数算法难以解决的问题，本文的方法均能解决，是一个普遍性的算法。

参 考 文 献

[1] 纪振义、叶开沅，任意变系数微分方程的精确解析法，应用数学和力学，**10**，10 (1989)，841—852.

[2] 叶开沅、纪振义，非均匀圆柱壳非线性轴对称变形的一般解，应用数学和力学，**10**，3 (1989)，187—193.

Substructure Computational Algorithm for Exact Analytic Method

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

Yeh Kai-yuan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

In [1], the exact analytic method for the solution of differential equation with variable coefficients was suggested and an analytic expression of solution was given by initial parameter algorithm. But to some problems such as the bending, free vibration and buckling of nonhomogeneous long cylinders, it is difficult to obtain their solutions by the initial parameter algorithm on computer. In this paper, the substructure computational algorithm for the exact analytic method is presented through the bending of non-homogeneous long cylindrical shell. This substructure algorithm can be applied to solve the problems which can not be calculated by the initial parameter algorithm on computer. Finally, the problems can be reduced to solving a low order system of algebraic equations like the initial parameter algorithm. Numerical examples are given and compared with the initial para-algorithm at the end of the paper, which confirms the correctness of the substructure computational algorithm.

Key words substructure computational algorithm, exact analytic method, long cylindrical shell