

含内裂纹的有限圆盘的平面问题

尹昌言 祖承德

(洛阳工学院) (东北重型机械学院)

(钱伟长推荐, 1988年11月25日收到)

摘 要

本文用弹性理论复变函数方法讨论了在内部任意位置含直线裂纹的有限圆盘在一般载荷作用下的平面问题, 得到了复应力函数和应力强度因子用级数表示的一般表达式, 并对此问题讨论了三种特殊情形, 即裂纹受均布压应力、均布剪应力和圆盘匀速旋转的情形, 其中还给出了计算应力强度因子的近似式。计算结果表明, 对位于圆盘内部且不靠近外边界的中、小裂纹, 这些近似式给出好的或较好的近似。

关键词 平面问题, 含裂纹的圆盘, 应力强度因子, 应力场, 位移场

含裂纹或裂纹系的有限圆盘平面问题的研究有十分重要的意义。文献[1]~[5]用积分变换法分别探讨了对于此问题的中心裂纹、径向裂纹或径向裂纹系在特殊或一般载荷作用下的情形, [6]用奇异积分方程讨论了任意方向的裂纹系在一般载荷作用下的情形。本文用弹性理论复变函数方法讨论了在内部任意位置的直线裂纹在一般载荷作用下的情形, 探讨了求解的一般方法, 并对此问题讨论了三种特殊情形, 即裂纹受均布压应力、均布剪应力和圆盘匀速旋转的情形, 还得到了计算应力强度因子的近似式。

一、复应力函数

考虑一弹性匀质和各向同性的圆盘, 半径为 R , 在其内部任意位置含一直线裂纹 $AB=2a$, 如图1所示。由裂纹形成的内边界记为 L_1 , 圆盘的外边界记为 L_2 , 由 $L_k (k=1, 2)$ 所围成的域记为 S 。在 $L_k (k=1, 2)$ 上作用有任意的外应力 $F_k(t) (k=1, 2)$, 体积力可忽略不计, 圆盘处于平衡状态。

如此选取坐标系, 其原点位于圆盘中心, 轴 x 平行于裂纹 AB , 轴 y 则与之垂直。

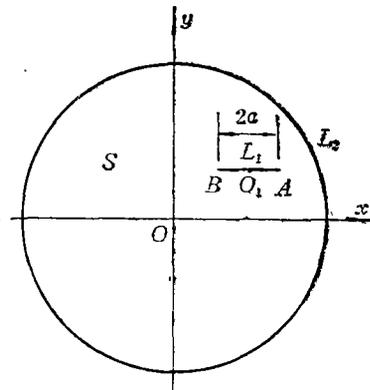


图 1

圆盘内任意一点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和位移分量 u, v 将由两个复应力函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 来确定^[7], 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$2\mu(u+iv) = n\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (1.2)$$

其中 μ 为剪切模量, 对于平面形变 $n=3-4\sigma$, 对于广义平面应力 $n=(3-\sigma)/(1+\sigma)$, σ 为泊松比, $\varphi'(z), \varphi''(z)$ 和 $\psi'(z)$ 分别为 $\varphi(z), \psi(z)$ 对复变量 $z=x+iy$ 的第一阶和第二阶导函数, $\overline{\varphi'(z)}, \overline{\psi(z)}$ 为 $\varphi'(z), \psi(z)$ 的共轭复函数. 这两个复应力函数在我们所研究的情形, 应满足如下的应力边界条件:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = F_k(t) + c_k \quad (\text{在 } L_k \text{ 上}, k=1, 2) \quad (1.3)$$

这里 t 为 $L_k(k=1, 2)$ 上的一点, $\varphi(t), \overline{\psi(t)}$ 是 $\varphi(z), \overline{\psi(z)}$ 在 L_k 上的边界值, 但其中之一可任意选取, $c_k(k=1, 2)$ 为每一 L_k 上不同的常数. 今取 $c_2=0$.

裂纹中心 O_1 的复坐标为 $z_0 = x_0 + iy_0$, 令 $z = z_0 + z_1, t = z_0 + t_1$, 于是边界条件(1.3)可写为

$$\varphi(t_1) + (z_0 + t_1)\overline{\varphi'(t_1)} + \overline{\psi(t_1)} = F_k(t_1) + c_k \quad (\text{在 } L_k \text{ 上}, k=1, 2) \quad (1.4)$$

其中
在 L_2 上令

$$\varphi(t_1) - (z_0 + t_1)\overline{\varphi'(t_1)} - \overline{\psi(t_1)} = 2P(t_1) \quad (1.5)$$

这里 $P(t_1)$ 是一未知的确定函数, 然后取如下的函数^[8]:

$$\left. \begin{aligned} A(z_1) &= \varphi(z_1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{P(t_1)}{t_1 - z_1} dt_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{F_2(t_1)/2}{t_1 - z_1} dt_1 \\ B(z_1) &= \psi(z_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(z_0 + t_1)P'(t_1) + \overline{P(t_1)}}{t_1 - z_1} dt_1 \\ &\quad + \frac{(1/2)}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(z_0 + t_1)F_2'(t_1) - \overline{F_2(t_1)}}{t_1 - z_1} dt_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

此函数在 $L_k(k=1, 2)$ 所围成的域 S 内解析, 并可解析开拓到 L_2 以外, 在 L_2 外有

$$\left. \begin{aligned} A(z_1) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{P(t_1)}{t_1 - z_1} dt_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{F_2(t_1)/2}{t_1 - z_1} dt_1 \\ B(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(z_0 + t_1)P'(t_1) + \overline{P(t_1)}}{t_1 - z_1} dt_1 \\ &\quad + \frac{(1/2)}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(z_0 + t_1)F_2'(t_1) - \overline{F_2(t_1)}}{t_1 - z_1} dt_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

且当 $z_1 \rightarrow \infty$ 时, $A(z_1) \rightarrow 0$ 和 $B(z_1) \rightarrow 0$.

在(1.6)和(1.7)中的柯西型积分在 L_2 内可展为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{P(t_1)}{t_1 - z_1} dt_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\frac{z_1}{R} \right)^k \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(z_0 + t_1)P'(t_1) + \overline{P(t_1)}}{t_1 - z_1} dt_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left(\frac{z_1}{R} \right)^k \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{F_2(t_1)/2}{t_1 - z_1} dt_1 &= \sum_{k=0}^s f_{2k} \left(\frac{z_1}{R}\right)^k \\ \frac{(1/2)}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(\bar{z}_0 + \bar{t}_1)F_2'(t_1) - \overline{F_2(t_1)}}{t_1 - z_1} dt_1 &= \sum_{k=0}^s g_k \left(\frac{z_1}{R}\right)^k \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

作为近似在上级数中取有限项，项数的多少，将根据所研究的问题所需之近似程度而定。

在(1.4)中令 $k=1$ ，把(1.6)和(1.8)代入，就得到在 L_1 外的解析函数 $A(z_1)$ ， $B(z_1)$ 所满足的边界条件：

$$\begin{aligned} A(t_1) + (z_0 + t_1)\overline{A'(t_1)} + \overline{B(t_1)} &= - \sum_{k=0}^s (p_k + f_{2k}) \left(\frac{t_1}{R}\right)^k \\ &- (z_0 + t_1) \sum_{k=1}^s (\bar{p}_k + \bar{f}_{2k}) \frac{k}{R} \left(\frac{t_1}{R}\right)^{k-1} + \sum_{k=0}^s (\bar{q}_k + \bar{g}_k) \left(\frac{t_1}{R}\right)^k \\ &+ F_1(t_1) + c_1 \quad (\text{在 } L_1 \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中 $A(t_1)$ ， $B(t_1)$ 是 $A(z_1)$ ， $B(z_1)$ 在 L_1 上的边界值。把映射函数

$$z_1 = \omega(\lambda) = \frac{a}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (1.10)$$

代入(1.9)中，其各项乘以因子 $(1/2\pi i)d\xi/(\xi - \lambda)$ (ξ 为 λ 平面内单位圆 $|\lambda|=1$ 上的点)，并沿单位圆 $|\lambda|=1$ 逆时针方向积分后，得到

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^s e_k \lambda^{-k}, \quad B(\lambda) = \sum_{k=1}^s e'_k \lambda^{-k} \quad (1.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} e_k &= \sum_{j=0,1,\dots} C_{k+2j}^i d_{k+2j} + f_{1k} \quad (k=1,2,\dots,s) \\ e'_k &= \sum_{j=0,1,\dots} C_{k+2j}^i \bar{d}_{k+2j} + f'_{1k} + l_k \quad (k=1,2,\dots,s) \\ d_k &= h^k [-p_k - f_{2k} + \bar{q}_k + \bar{g}_k - k(\bar{p}_k + \bar{f}_{2k}) - (k+1)\beta(\bar{p}_{k+1} + \bar{f}_{2,k+1})] \\ &\quad (k=0,1,\dots,s) \\ h &= a/2R, \quad \beta = z_0/R, \quad B = \beta\bar{\beta}, \quad A = 1/(1-B) \\ l_k &= \begin{cases} e_1 & (k=1) \\ 2e_2 + \bar{\beta}e_1/h & (k=2) \\ 2 \sum_{j=1,3,\dots}^{k-2} je_j + ke_k + \frac{\bar{\beta}}{h} \sum_{j=2,4,\dots}^{k-1} je_j & (k=3,5,\dots) \\ 2 \sum_{j=2,4,\dots}^{k-2} je_j + ke_k + \frac{\bar{\beta}}{h} \sum_{j=1,3,\dots}^{k-1} je_j & (k=4,6,\dots) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{F_1(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi = - \sum_{k=1}^s f_{1k} \lambda^{-k}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{\overline{F_1(\xi)}}{\xi - \lambda} d\xi = - \sum_{k=1}^s f'_{1k} \lambda^{-k} \quad (1.13)$$

这里及以后, 记号 C_j^r 表示从 r 个元素中每次取 j 个元素的所有不同的组合数, 且当 $j > r$, 当 j 为分数、负数时, 都令 $C_j^r = 0$. 还令 $C_0^0 = 1$.

如注意到

$$\lambda^{-k} = \sum_{j=k}^s h_{jk} \left(\frac{R}{z_1}\right)^j \quad (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时, } k=1, 2, \dots, s) \quad (1.14)$$

则容易得到

$$\left. \begin{aligned} A(z_1) &= \sum_{k=1}^s a_k \left(\frac{R}{z_1}\right)^k && (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时}) \\ B(z_1) &= \sum_{k=1}^s b_k \left(\frac{R}{z_1}\right)^k && (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^k h_{kj} e_j, & b_k &= \sum_{j=1}^k h_{kj} e_j' \\ h_{kj} &= \begin{cases} B_{jk} h^j & (j=k, k+2, \dots) \\ 0 & (j=k+1, k+3, \dots) \end{cases} && (k=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$$B_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k=1, 2, \dots) \\ C_j^{(j-1)/2} / j & (k=1; j=3, 5, \dots) \\ B_{j-1, k-1} + B_{j-1, k+1} & (k=2, 3, \dots, s; j=k+2, k+4, \dots) \end{cases} \quad (1.17)$$

于是由(1.6)、(1.8)和(1.15)就得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z_1) &= \sum_{k=1}^s a_k \left(\frac{R}{z_1}\right)^k + \sum_{k=0}^s (p_k + f_{2k}) \left(\frac{z_1}{R}\right)^k && (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时}) \\ \psi(z_1) &= \sum_{k=1}^s b_k \left(\frac{R}{z_1}\right)^k - \sum_{k=0}^s (q_k + g_k) \left(\frac{z_1}{R}\right)^k && (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

把(1.5)和(1.18)代入(1.8)中前两式左端, 积分后比较 z_1/R 的同次方的项, 并分开实、虚部, 不难得到如下形式的线性方程组:

$$W_k = \sum_{j=1}^{4s-1} N_{kj} W_j + N_{k0} \quad (k=1, 2, \dots, 4s-1) \quad (1.19)$$

其中 W_k 分别表示(1.18)中除了 p_0, q_0 和 $\text{Im} p_1$ 以外的所有未知系数 p_k, q_k 的实、虚部; N_{kj}, N_{k0} 是已知的系数和常数项. 应用消去法, 线性方程组(1.19)的解可用公式表示^[9], 且不难求得. 显然 p_0, q_0 和 $\text{Im} p_1$ 仍是任意的, 而且还可令 $q_0 = p_0$. 此任意性不影响圆盘的应力状态, 只关系到圆盘在其自身平面内的刚性位移. 于是由(1.18)求得复应力函数表达式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^s a_k \left(\frac{R}{z-z_0} \right)^k + \sum_{k=0}^s (p_k + f_{2k}) \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^k & (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时}) \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^s b_k \left(\frac{R}{z-z_0} \right)^k - \sum_{k=0}^s (q_k + g_k) \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^k & (\text{在 } |z_1| > a \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

复应力函数还可由(1.6)、(1.8)和(1.11)表示为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^s e_k \lambda^{-k} + \sum_{k=0}^s (p_k + f_{2k}) \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^k \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^s e'_k \lambda^{-k} - \sum_{k=0}^s (q_k + g_k) \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^k \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

把 z 及与之相对应的 λ 的值一同代入(1.21)中,也可求得 $\varphi(z), \psi(z)$ 的值.于是由(1.1)和(1.2)就不难得到圆盘上任意一点的应力分量和位移分量.

复应力函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 的求得,与常量 c_1 的确定毫无关系,但因 c_1 应满足边界条件,所以由(1.9)~(1.11),不难得到

$$c_1 = -d_0 - F_1(\xi) \text{ 的常数项} \quad (1.22)$$

二、复应力强度因子

裂纹尖端 A, B 的复应力强度因子可写为

$$\left. \begin{aligned} K_A &= K_{IA} - iK_{IIA} = 2\sqrt{2} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sqrt{\omega(\lambda) - \omega(1)} \varphi'(\lambda) / \omega'(\lambda) \\ K_B &= K_{IB} - iK_{IIB} = -i2\sqrt{2} \lim_{\lambda \rightarrow -1} \sqrt{\omega(\lambda) - \omega(-1)} \varphi'(\lambda) / \omega'(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

把(1.21)和(1.10)代入(2.1)中就看到

$$K_A = K_{IA} - iK_{IIA} = \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^s (-k e_k), \quad K_B = K_{IB} - iK_{IIB} = \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^s (-1)^k k e_k \quad (2.2)$$

其中

$$e_k = \sum_{r=1}^s \left[C_r^{\frac{r-k}{2}} h^r (\bar{q}_r + \bar{q}_r - p_r - f_{2r}) - r \left(C_{r-1}^{\frac{r-k-1}{2}} \beta h^{r-1} + C_r^{\frac{r-k}{2}} h^r \right) (\bar{p}_r + \bar{f}_{2r}) \right] + f_{1k} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (2.3)$$

三、几种特殊情形

情形1 在裂纹上、下岸作用着均布法向压应力 N 而在外边界没有载荷作用的情形.

对于这种情形, $F_1(t) = -(t-z_0)N, F_2(t) = 0$. 从而有

$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= \bar{f}'_{11} = -hRN, \quad f_{1k} = \bar{f}'_{1k} = 0 & (k=2, 3, \dots, s) \\ f_{2k} &= g_k = 0 & (k=0, 1, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

把(3.1)和 h, β 的值一同代入上面的公式, 并求解方程组(1.19), 则不难求得复应力函数、应力分量、位移分量和应力强度因子。

因为 $A \geq 1$, 所以 Ah 小将保证 h 小。若 Ah 小, 则 $(Ah)^2$ 甚小。又考虑到在(2.3)、(2.2)右边各项分别含有 $(Ah)^2, (Ah)^3$ 以上因子, 因而对于圆盘含中、小裂纹的许多情形, 在求和时只需取前面少数几项。现让我们在(2.2)中略去 $(Ah)^4$ 及其以上各项, 就得到如下的应力强度因子的近似式:

$$\left. \begin{aligned} K_{IA} &= (2h)^{1/2} [1 + A^2 h^2 (H_0 + H_2 \cos 2\theta) + A^3 h^3 (H_1 \cos \theta + H_3 \cos 3\theta)] R^{1/2} N \\ K_{IA} &= (2h)^{1/2} [A^2 h^2 G_2 \sin 2\theta + A^3 h^3 (G_1 \sin \theta + G_3 \sin 3\theta)] R^{1/2} N \\ K_{IB} &= (2h)^{1/2} [1 + A^2 h^2 (H_0 + H_2 \cos 2\theta) - A^3 h^3 (H_1 \cos \theta + H_3 \cos 3\theta)] R^{1/2} N \\ K_{IB} &= (2h)^{1/2} [A^2 h^2 G_2 \sin 2\theta - A^3 h^3 (G_1 \sin \theta + G_3 \sin 3\theta)] R^{1/2} N \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中 θ 为过裂纹中心之半径与轴 x 所成之角, 且

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 2(4-3B) + 6(2-2B-A)AB + 6(2-B)A^2B^2 - 2(1+AB)^{-2} \\ H_1 &= 12|\beta| [(3-2B-2A) + 2(3-2B-A)AB + 2(2-B)A^2B^2] \\ H_2 &= -B[9-8A+6AB+A^2(3+2AB)(1+AB)^{-2}] \\ H_3 &= -G_3 = -4|\beta|B(4-3A+3AB) \\ G_1 &= 4|\beta| [(6B-5) + 6(-2+2B+A)AB + 6(B-2)A^2B^2] \\ G_2 &= 2B(3-2A+2AB) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

情形2 在裂纹上、下岸作用着均布剪应力 T 而在外边界没有载荷作用的情形。

假设作用在裂纹上、下岸的剪应力分别指向轴 x 的正方向和负方向。对于这种情形, $F_1(t) = i(t-z_0)T, F_2(t) = 0$ 。从而有

$$\left. \begin{aligned} f_{1k} &= \bar{f}'_{1k} = ihRT, \quad f_{1k} = \bar{f}'_{1k} = 0 \quad (k=2, 3, \dots, s) \\ f_{2k} &= g_k = 0 \quad (k=0, 1, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

把(3.4)和 h, β 的值一同代入上面的公式中, 同样可求得此种情形的复应力函数、应力分量、位移分量和应力强度因子。

在(2.2)中略去 $(Ah)^4$ 及其以上各项, 就得到如下的应力强度因子的近似式:

$$\left. \begin{aligned} K_{IA} &= (2h)^{1/2} [A^2 h^2 G_2 \sin 2\theta + A^3 h^3 G_1 \sin \theta] R^{1/2} T \\ K_{IA} &= (2h)^{1/2} [1 + A^2 h^2 H_0 + A^3 h^3 H_1 \cos \theta] R^{1/2} T \\ K_{IB} &= (2h)^{1/2} [A^2 h^2 G_2 \sin 2\theta - A^3 h^3 G_1 \sin \theta] R^{1/2} T \\ K_{IB} &= (2h)^{1/2} [1 + A^2 h^2 H_0 - A^3 h^3 H_1 \cos \theta] R^{1/2} T \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= 12|\beta| [(1-2B+A) + (3-4B-2A)AB + 2(2-B)A^2B^2] \\ G_2 &= B[3-4A+2AB+A^2(3+2AB)(1+AB)^{-2}] \\ H_0 &= 2(2-3B) + 6(2-2B-A)AB + 6(2-B)A^2B^2 \\ H_1 &= 4|\beta| [(5-6B-3A) + 3(5-4B-2A)AB + 6(2-B)A^2B^2] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

情形3 圆盘匀速旋转的情形。

考虑一圆盘, 半径为 R , 密度为 ρ , 在其内部任意位置含直线裂纹 $AB=2a$ (图1), 且以常角速度 ω 绕垂直于圆盘并通过其中心之轴旋转, 在边界 L_1, L_2 上没有载荷作用, 重力可略去, 则圆盘内任意一点的旋转应力分量 $\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \tau_{r\theta}^*$, 和旋转位移分量 u^*, v^* 对于平面形变情形可

取为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x - \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)} \rho\omega^2 x^2 - \frac{1+2\sigma}{8(1-\sigma)} \rho\omega^2 (x^2+y^2) \\ \sigma_y^* &= \sigma_y - \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)} \rho\omega^2 y^2 - \frac{1+2\sigma}{8(1-\sigma)} \rho\omega^2 (x^2+y^2) \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} - \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)} \rho\omega^2 xy \\ u^* &= u - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} \rho\omega^2 (x^2+y^2)x \\ v^* &= v - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} \rho\omega^2 (x^2+y^2)y \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

而对于广义平面应力情形可取为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x - \frac{1-\sigma}{4} \rho\omega^2 x^2 - \frac{1+3\sigma}{8} \rho\omega^2 (x^2+y^2) \\ \sigma_y^* &= \sigma_y - \frac{1-\sigma}{4} \rho\omega^2 y^2 - \frac{1+3\sigma}{8} \rho\omega^2 (x^2+y^2) \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} - \frac{1-\sigma}{4} \rho\omega^2 xy \\ u^* &= u - \frac{1-\sigma^2}{8E} \rho\omega^2 (x^2+y^2)x \\ v^* &= v - \frac{1-\sigma^2}{8E} \rho\omega^2 (x^2+y^2)y \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

不难推知在(3.7)、(3.8)中的 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和 u, v 将满足在没有体积力情况下二维弹性理论基本方程。因此它们能由(1.1)和(1.2)来表示, 即由两个复应力函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 来表示, 且后者应满足边界条件(1.3)。于是对于平面形变我们有

$$F_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{192(1-\sigma)} [-(11-14\sigma)t^3 + 3(3+2\sigma)t^2\bar{t} + 3(5-2\sigma)t\bar{t}^2 \\ \quad - (5-2\sigma)\bar{t}^3] \rho\omega^2 & (k=1) \\ \frac{3-2\sigma}{8(1-\sigma)} \rho\omega^2 R^2 t & (k=2) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{11} = \bar{f}'_{11} &= \frac{h}{4(1-\sigma)} \left[B + \frac{1+2\sigma}{2} h^2 - \frac{1-2\sigma}{2} \beta^2 \right] \rho\omega^2 R^3 \\ f_{12} = \bar{f}'_{12} &= \frac{h^2}{4(1-\sigma)} \left[\sigma(\beta + \bar{\beta}) + \frac{1-2\sigma}{2} \bar{\beta} \right] \rho\omega^2 R^3 \\ f_{13} = \bar{f}'_{13} &= \frac{(1+2\sigma)h^3}{24(1-\sigma)} \rho\omega^2 R^3 \\ f_{1k} = \bar{f}'_{1k} &= 0 \quad (k=4, 5, \dots, s) \\ f_{20} &= \frac{3-2\sigma}{16(1-\sigma)} \beta \rho\omega^2 R^3, \quad f_{21} = \frac{3-2\sigma}{16(1-\sigma)} \rho\omega^2 R^3 \\ f_{2k} &= 0 \quad (k=2, 3, \dots, s) \\ g_k &= 0 \quad (k=0, 1, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

而对于广义平面应力有

$$F_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{192} [-(11-3\sigma)t^3 + 3(3+5\sigma)t^2\bar{t} + 3(5+3\sigma)t\bar{t}^2 \\ \quad - (5+3\sigma)\bar{t}^3] \rho \omega^2 & (k=1) \\ \frac{3+\sigma}{8} \rho \omega^2 R^2 t & (k=2) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{11} = f'_{11} &= h[2(1+\sigma)B + (1+3\sigma)h^2 - (1-\sigma)\beta^2] \rho \omega^2 R^3 / 8 \\ f_{12} = f'_{12} &= h^2[2\sigma(\beta + \bar{\beta}) + (1-\sigma)\bar{\beta}] \rho \omega^2 R^3 / 8 \\ f_{13} = f'_{13} &= (1+3\sigma)h^3 \rho \omega^2 R^3 / 24 \\ f_{1k} = f'_{1k} &= 0 \quad (k=4, 5, \dots, s) \\ f_{20} &= \frac{3+\sigma}{16} \beta \rho \omega^2 R^3, \quad f_{21} = \frac{3+\sigma}{16} \rho \omega^2 R^3, \quad f_{2k} = 0 \quad (k=2, 3, \dots, s) \\ g_k &= 0 \quad (k=0, 1, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

把(3.10)、(3.12)和 h, β, A, B 之值分别代入上面的公式中, 同样不难求得平面形变和广义平面应力两种情形的复应力函数、旋转应力分量、旋转位移分量和应力强度因子。

若在(2.2)中略去 $(Ah)^4$ 及其以上各项, 就得到在平面形变和广义平面应力条件下应力强度因子的近似式:

$$\left. \begin{aligned} K_{IA} &= \delta_0[\delta_1 - \delta_2 + A^2 h^2 M_1 + A^3 h^3 M_2] \rho \omega^2 R^{\frac{3}{2}} \\ K_{IA} &= \delta_0[\delta_3(B \sin 2\theta / 2 + h|\beta| \sin \theta) + A^2 h^2 M_3 + A^3 h^3 M_4] \rho \omega^2 R^{\frac{3}{2}} \\ K_{IB} &= \delta_0[\delta_1 + \delta_2 + A^2 h^2 M_1 - A^3 h^3 M_2] \rho \omega^2 R^{\frac{3}{2}} \\ K_{IB} &= \delta_0[\delta_3(B \sin 2\theta / 2 - h|\beta| \sin \theta) + A^2 h^2 M_3 - A^3 h^3 M_4] \rho \omega^2 R^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \alpha_1 \delta_4 + \alpha_2 \delta_3 B^2 + (\alpha_5 \delta_4 - \alpha_6 \delta_3) B \cos 2\theta + (3/2 \\ &\quad - A + AB) \delta_3 B^2 \cos 4\theta \\ M_2 &= (\alpha_3 \delta_4 + \alpha_4 \delta_3 B) |\beta| \cos \theta + (2\delta_4 \delta_5 - \alpha_7 \delta_3) B |\beta| \cos 3\theta \\ &\quad - \delta_3 \delta_5 B^2 |\beta| \cos 5\theta \\ M_3 &= P_2 \sin 2\theta + (A - AB - 3/2) \delta_3 B^2 \sin 4\theta \\ M_4 &= P_1 \sin \theta - (2\delta_4 \delta_5 - \alpha_7 \delta_3 + 2\delta_3) B |\beta| \sin 3\theta + \delta_3 \delta_5 B^2 |\beta| \sin 5\theta \\ \alpha_1 &= (4 - 3B) + 3(2 - 2B - A) AB + 3(2 - B) A^2 B^2 - (1 + AB)^{-2} \\ \alpha_2 &= (3 - 3A + 2AB) + A^2(3 + 2AB)(1 + AB)^{-2} \\ \alpha_3 &= 6(3 - 2B - 2A) + 12(3 - 2B - A) AB + 12(2 - B) A^2 B^2 \\ \alpha_4 &= 2(2B - 3) + 3A(1 - B)(3 - B) \\ \alpha_5 &= (4A - 9/2 - 3AB) - A^2(3 + 2AB)(1 + AB)^{-2} \\ \alpha_6 &= (4 - 3B) + 3(2 - 2B - A) AB + 3(2 - B) A^2 B^2 - (1 + AB)^{-2} \\ \alpha_7 &= 3(4 - 4B - A) + 3(9 - 8B - 4A) AB + 12(2 - B) A^2 B^2 \\ P_1 &= [4(2 - 3A + 3AB) - \alpha_3] \delta_4 |\beta| - [6(1 - A + AB) + \alpha_4] \delta_3 B |\beta| \\ P_2 &= (3 - 2A + 2AB) \delta_4 B + [\alpha_1 - 2 + (1 + AB)^{-2}] \delta_3 B \\ \delta_5 &= 3A - 4 - 3AB \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

而且对于平面形变

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \sqrt{2h}/4(1-\sigma), \quad \delta_1 = \delta_4/2 - \delta_3 B \cos 2\theta/2 - (1+2\sigma)h^2 \\ \delta_2 &= (1+2\sigma)h|\beta| \cos \theta, \quad \delta_3 = -(1-2\sigma), \quad \delta_4 = 3-2\sigma-2B \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

对于广义平面应力

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \sqrt{h/8}, \quad \delta_1 = \delta_4/2 - \delta_3 B \cos 2\theta/2 - (1+3\sigma)h^2 \\ \delta_2 &= (1+3\sigma)h|\beta| \cos \theta, \quad \delta_3 = -(1-\sigma), \quad \delta_4 = 3+\sigma-2B-2\sigma B \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

关于计算结果, 对于情形 1, 让我们考虑径向裂纹的情形. 由 (2.2) 计算的几个比值 $K_{IA}/R^{1/2}N$ 列于表 1, 其中为了比较还给出了由 [3] 中之表 2 计算的相应结果, 并由此看出, 这两组结果相差甚小. 对于情形 2 和 3, 在第一象限内考虑一裂纹, $h=0.05$, $|\beta|=0.5$, 并取

表 1

	比 值	β	文 献	h			
				0.05	0.1	0.15	0.2
情形 1	$\frac{K_{IA}}{R^{1/2}N}$	0	本文	0.320971	0.474068	0.621967	0.786227
			[3]	0.320971	0.474046	0.622213	0.786142
		0.4	本文	0.323232	0.489621	0.676307	0.941299
			[3]	0.323185	0.489699	0.676437	0.941094

表 2

	比 值	公 式	θ					
			0°	15°	30°	45°	60°	75°
情形 2	$\frac{K_{IA}}{R^{1/2}T}$	(2.2)	0	0.000700	0.001253	0.001564	0.001608	0.001420
		(3.5)	0	0.000642	0.001171	0.001498	0.001582	0.001437
	$\frac{K_{IA}}{R^{1/2}T}$	(2.2)	0.322277	0.322248	0.322167	0.322049	0.321916	0.321788
		(3.5)	0.322224	0.322212	0.322174	0.322115	0.322037	0.321947
情形 3	$\frac{K_{IA}}{\rho\omega^2 R^{5/2}}$	(2.2)	0.111111	0.110545	0.109022	0.107028	0.105233	0.104301
		(3.13)	0.111102	0.110538	0.109022	0.107043	0.105266	0.104348
	$\frac{K_{IA}}{\rho\omega^2 R^{5/2}}$	(2.2)	0	-0.003127	-0.005494	-0.006537	-0.006031	-0.004152
		(3.13)	0	-0.003119	-0.005482	-0.006526	-0.006025	-0.004155

$\sigma=0.3$. 由 (2.2) 和 (3.5)、(3.13) 计算之比值 $K_{IA}/R^{1/2}T$, $K_{IA}/R^{1/2}T$, $K_{IA}/\rho\omega^2 R^{5/2}$, $K_{IA}/\rho\omega^2 R^{5/2}$ 分别列于表 2.

对于上述三种特殊情形, 由 (2.2) 和 (3.2)、(3.5)、(3.13) 大量地计算了应力强度因子之值, 对位于圆盘内部且不靠近外边界的中、小裂纹, 计算结果给出:

1) 对于情形 1 和 3, 与 K_I 相比, K_{IA} 小或甚小, 因而对于工程应用可略去不计. 同样, 对于情形 2, 与 K_I 相比, K_{IA} 小或甚小, 可以略去.

2) 由近似式 (3.2)、(3.5)、(3.13) 和由精确式 (2.2) 计算的应力强度因子之值相差小或甚小, 例如, 对于情形 1、3 由 (3.2)、(3.13) 计算之 K_{IA} 和对于情形 2 由 (3.5) 计算之 K_{IA} , 其相对误差的绝对值远小于或小于 1%. 因而近似式 (3.2)、(3.5)、(3.13) 给出好的或较好的近似, 可用于实际工程计算.

3) 当 h = 常量和 $|\beta|$ = 常量时, 情形 1、3 之 K_I 和情形 2 之 K_I 随 θ 而变化, 且当 $\theta=0$ 或 π 时, 有极值 (极大或极小值).

4) 当位于某一象限内的裂纹, 在 h = 常量、 θ = 常量的条件下, 在此象限内变动其位置

时, 情形 1 的 K_I 和情形 2 的 K_I 将随 $|\beta|$ 的减少而减少, 而情形 3 的 K_I 则随 $|\beta|$ 的减少而增大。

参 考 文 献

- [1] Tada, H., P. C. Paris and G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania (1973).
- [2] Bowie, O. L. and D. M. Neal, A modified mapping-collocation technique for accurate calculation of stress intensity factors, *Int. J. Fract. Mech.*, 6 (1970), 199—206.
- [3] Tweed, J., S. C. Das and D. P. Rooke, The stress intensity factors of a radial crack in a finite elastic disc, *Int. J. Engng. Sci.*, 10 (1972), 323—335.
- [4] Rooke, D. P. and J. Tweed, The stress intensity factors of a radial crack in a finite rotating elastic disc, *Int. J. Engng. Sci.*, 10 (1972), 709—714.
- [5] 汤任基、蒋柱中, 有限圆板上的径向裂纹系分析, 固体力学学报, 4 (1981), 445—458.
- [6] Panasyuk, V. V., M. P. Savruk and A. P. Datsyshyn, A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of cracks, *Engng. Fract. Mech.*, 9 (1977), 481—497.
- [7] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff (1968).
- [8] 尹昌言, 有穿透裂纹的圆柱体扭转应力及应力强度因子, 固体力学学报, 3 (1982), 393—405.
- [9] 尹昌言、祖承德, 含裂纹的圆柱体的弯曲, 应用数学和力学, 8, 11 (1987), 1015—1026.

Plane Problems of a Finite Disc Containing an Internal Crack

Yin Chang-yan

(Luoyang Institute of Technology, Luoyang)

Zu Cheng-de

(The Northeast Heavy Machinery Institute, Qiqihaer)

Abstract

Using complex variable methods in elasticity, this paper deals with the plane problems of a finite disc containing an internal linear crack at any position under general loads, obtains the general forms of complex stress functions and stress-intensity factors, expressed in terms of series, and to these problems discusses three special cases, i. e. the cases of the crack under a uniform pressure, a uniform shear stress and the case of the disc rotating uniformly. In these cases the approximate formulas calculating the stress-intensity factors are also presented. The calculated results show that for the middle and small cracks situated inside the disc and not near the external boundary, these approximate formulas give good or better approximation.

Key words plane problem, disc containing a crack, stress-intensity factor, stress field, displacement field