应用数学和力学，第11卷第10期（1990年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

拟线性椭圆型方程广义解最大模的先验估计

梁鋈廷　王向东

（中山大学数学系）（许昌师专数学系）

（张石生推荐，1989年4月8日收到）

摘　要

设G为E^n中的有界区域，考虑方程

$$\int_G \{\nabla v\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}dx=0 \qquad \forall v\in\mathring{W}_p^1(G)\cap L_\infty(G)$$

虽然在$\vec{A}$，B满足很一般的结构条件时能证明广义解的有界性，但却得不到解的最大模的先验估计式．对其中一种特殊情形，即$\vec{A}$，B满足如下的结构条件：

$$\vec{A}(x,u(x),\nabla u(x))\in L_{p/(p-1)}(G) \qquad \forall u\in W_p^1(G)$$
$$\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\geqslant\kappa_0|\nabla u|^p \qquad \kappa_0>0,\ p>1$$
$$B(x,u,\nabla u)=B_1(x,u,\nabla u)+\lambda|u|^{\alpha-2}u \qquad \lambda>0$$
$$|B_1(x,u,\nabla u)|\leqslant c(x)|\nabla u|^\gamma+f(x) \qquad p-1\leqslant\gamma\leqslant p$$
$$c(x)\in L_r(G) \qquad f(x)\in L_\infty(G)$$
$$p\leqslant\alpha\leqslant q=\frac{np}{n-p} \quad \text{当}\ 1<p<n,\quad p\leqslant\alpha<+\infty \quad \text{当}\ p\geqslant n$$

本文第一次给出有界解的最大模的先验估计．

关键词　拟线性椭圆型方程，广义解，最大模，先验估计

一、引言及基本假设

设G是n维欧氏空间E^n中的有界区域．$p>1$，$W_p^1(G)$和$\mathring{W}_p^1(G)$是通常的Соболев空间．作为线性椭圆型方程相应结果的推广，如所已知[1,2]，如果$u\in\mathring{W}_p^1(G)$满足方程

$$\int_G\{\nabla v\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}dx=0, \qquad \forall v\in\mathring{W}_p^1(G)\cap L_\infty(G) \tag{1.1}$$

其中$\vec{A}(x,u,\xi)$和$B(x,u,\xi)$分别为在$G\times E^1\times E^n$上定义的Carathéodory函数，即$\vec{A}$和B对固定的x（几乎处处）关于u，ξ为连续，对固定的u，ξ关于x为可测．此外，设下面的结构条件

满足：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\geqslant\kappa_0|\nabla u|^p-d(x)|u|^p-f_0(x)\\&|\vec{A}(x,u,\nabla u)|\leqslant\kappa_1|\nabla u|^{p-1}+b(x)|u|^{p-1}+f_1(x)\\&|B(x,u,\nabla u)|\leqslant c(x)|\nabla u|^{p-1}+d(x)|u|^{p-1}+f_2(x)\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

其中$1<p\leqslant n$；$\kappa_1\geqslant\kappa_0>0$；$b(x),c(x),d(x)$和$f_i(x)(i=0,1,2)$非负并分别满足

$$b(x)\in L_{n/(p-1)}(G)\quad 当\ 1<p<n;\quad b(x)\in L_{n/(n-1-\sigma)}(G)\quad 当\ p=n$$

$$c(x)\in L_{n/(1-\sigma)}(G),\ d(x)\in L_{n/(p-\sigma)}(G)\qquad(0<\sigma<1)$$

$$f_i(x)\in L_{s_i}(G),\ s_0,s_2>n/p,\ s_1>n/(p-1)$$

那么成立如下的先验估计式：

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_\infty(G)}&=\operatorname{vrai}\max_G|u|\\&\leqslant C\{\|u\|_{L_p(G)}+\|f_0\|^{1/p}_{L_{s_0}(G)}+\|f_2\|^{1/(p-1)}_{L_{s_2}(G)}\}\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中的常数$C>0$和u，f_i无关.

当$\vec{A},B$满足下面的结构条件

$$\left.\begin{aligned}&\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\geqslant\kappa_0|\nabla u|^p-d(x)|u|^a-f_0(x)\\&|\vec{A}(x,u,\nabla u)|\leqslant\kappa_1|\nabla u|^{p-1}+b(x)|u|^{a/p'}+f_1(x)\\&|B(x,u,\nabla u)|\leqslant c(x)|\nabla u|^{\gamma}+d(x)|u|^{a-1}+f_2(x)\\&\kappa_1\geqslant\kappa_0>0,1<p\leqslant n,1/p'+1/p=1,p-1\leqslant\gamma<p\\&p\leqslant a\leqslant q=np/(n-p)\quad 当1<p<n和p\leqslant a<\infty\quad 当p=n\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

Ладыженская-Уральцева[1]对$1<p<n$，$p\leqslant a<q$，$p-1\leqslant\gamma<p(1-1/q)$的情形和$p=n$，$p\leqslant a<+\infty$，$p-1\leqslant\gamma<p$的情形；梁鋆廷[3]对$1<p<n$的情形比[1]的条件稍为广泛一点的条件下；朱熹平和杨健夫[4]对$1<p<n$，$a=q,\gamma=p(1-1/q)$，$b(x),c(x),d(x)\in L_\infty(G)$的情形和梁鋆廷[5]对$1<p<n$，$a=q$，$p-1<\gamma<p$，$b(x)$，$d(x)\in L_\infty(G)$，$c(x)\in L_r(G)$，$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p\cap L_t(G)$($r,t$的具体条件见下文)的情形，都证明了方程(1.1)的广义解的有界性．下面我们遵循[5]的方法，对结构条件(1.4)的最一般情形证明方程(1.1)的广义解的有界性．但是除非$a=p,\gamma=p-1$，以上结果无法对方程(1.1)的解$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)\cap L_\infty(G)$作出类似(1.3)的先验估计式（出现在(1.3)中的常数C还要依赖于u)．只有对其中一种特殊情形，即$\vec{A},B$满足下面的结构条件(2.12)时，可以作出方程(1.1)的解$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)\cap L_\infty(G)$的最大模的估计，这是本文的主要目的．本文定理2推广了Miranda[6]，于鸣岐和梁鋆廷[7]的有关结果．

我们要求$c(x)\in L_r(G)$，r满足如下的条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}=1-\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{q}\qquad 当\ 1<p<n,\ p-1\leqslant\gamma<p\left(1-\frac{1}{q}\right)=p-1+\frac{p}{n}\\&r=+\infty\qquad 当1<p<n,\gamma=p-1+p/n\end{aligned}\right\}\tag{1.5a}$$

$$r>\frac{n}{p-\gamma}\qquad 当\ 1<p<n,\ p-1+\frac{p}{n}<\gamma<p或p=n,\ p-1\leqslant\gamma<p\tag{1.5b}$$

相应地要求u满足

$$\left.\begin{aligned}&u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)\qquad 当1<p<n,\ p-1\leqslant\gamma\leqslant p-1+p/n或p=n,p-1\leqslant\gamma<p\\&u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)\cap L_t(G)\qquad 当1<p<n,\ p-1+p/n<\gamma<p\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

其中

$$t=\begin{cases}\dfrac{n(\gamma+1-p)}{p-\gamma} & \text{当} r=+\infty\\[2ex] \dfrac{rn(\gamma+1-p)}{r(p-\gamma)-n} & \text{当} \dfrac{n}{p-\gamma}<r<+\infty, 1<p<n\end{cases}\tag{1.7}$$

关于$d(x)$和$b(x)$，分别要求它们满足：

$$d(x)\in L_{r_0}(G)\begin{cases}r_0>n/p, & \text{当}1<p<n, a=p\text{或}p=n, p\leqslant a<+\infty\\ r_0=(q/(q-a)) & \text{当}1<p<n, p<a<q\\ r_0=+\infty & \text{当}1<p\leqslant n, a=q\end{cases}\tag{1.8}$$

$$b(x)\in L_{r_1}(G)\begin{cases}r_1>n/(p-1), & \text{当}1<p<n, a=p\text{或}p=n, p\leqslant a<+\infty\\ r_1=(p/(p-1)(q/(q-a)) & \text{当}1<p<n, p<a<q\\ r_1=+\infty & \text{当}1<p\leqslant n, a=q\end{cases}\tag{1.9}$$

二、主要结果及证明

定理1 设$1<p\leqslant n$，设u满足(1.6)并是方程(1.1)的解.设条件(1.4)、(1.5)、(1.8)、(1.9)满足且

$$f_i(x)\in L_{s_i}(G),\ s_0, s_2>n/p,\ s_1>n/(p-1)$$

如果存在常数M，使

$$(u-M)^+=\max(u(x)-M, 0)\in \mathring{W}^1_p(G)\tag{2.1}$$

那么，$\quad \operatorname*{vrai\,max}_G u<+\infty$

证明 由于(2.1)，对任何$k>M$，$(u-k)^+\in\mathring{W}^1_p(G)$.因此，对任意$h>k>M$，可取

$$v=(u-k)^+-(u-h)^+\in\mathring{W}^1_p(G)\cap L_\infty(G)$$

作试验函数，代入(1.1)并利用结构条件(1.4)，得

$$\int_{A(k)\setminus A(h)}\kappa_0|\nabla(u-k)^+|^p dx\leqslant\int_{A(k)}\{d(x)|u|^a+f_0(x)$$
$$+(u-k)^+(c(x)|\nabla u|^\gamma+d(x)|u|^{a-1}+f_2(x))\}dx$$

其中$A(k)=G\cap\{u(x)>k\}$. 命$h\to\infty$由上式继续得

$$\int_{A(k)}\kappa_0|\nabla(u-k)^+|^p dx\leqslant\int_{A(k)}\{d(x)|u|^a+f_0(x)$$
$$+(u-k)^+(c(x)|\nabla u|^\gamma+d(x)|u|^{a-1}+f_2(x))\}dx\tag{2.2}$$

借助Hölder不等式和Соболев 嵌入定理分别估计(2.2)式右端各项如下：首先考虑 $1<p<n$ 的情形. 由于$1-1/r_0-a/q>0$当$a=p$，$1-1/r_0-a/q=0$当$p<a\leqslant q$,我们有

$$\int_{A(k)}d|u|^a dx\leqslant\|d\|_{Lr_0(G)}\|u\|^a_{L_q(A(k))}\text{mes}^{1-1/r_0-a/q}A(k)$$

$$\leqslant\|d\|_{Lr_0(G)}2^{a-1}[\|(u-k)^+\|^a_{L_q(G)}+k^a\text{mes}^{a/q}A(k)]\text{mes}^{1-1/r_0-a/q}A(k)$$

$$\leqslant\|d\|_{Lr_0(G)}2^{a-1}\{C(n,p)\int_G|\nabla(u-k)^+|^p dx\|(u-k)^+\|^{a-p}_{L_q(G)}\text{mes}^{1-1/r_0-a/q}A(k)$$
$$+k^a\text{mes}^{1-1/r_0}A(k)\}$$

考虑到

$$\mathrm{mes}A(k)\leqslant\frac{1}{k}\int_G|u|dx\longrightarrow 0\qquad \text{当}k\longrightarrow+\infty$$

和Lebesgue积分的绝对连续性，当$p<a\leqslant q$时，有

$$\|(u-k)^+\|_{L_q(G)}^{a-p}\leqslant\left(\int_{A(k)}|u|^q dx\right)^{\frac{a-p}{q}}\leqslant\varepsilon(k)\longrightarrow 0\qquad \text{当}k\to\infty$$

于是对任何$p\leqslant a\leqslant q$，

$$\int_{A(k)} d|u|^a dx\leqslant C\{\varepsilon(k)\int_{A(k)}|\nabla u|^p dx+k^a\mathrm{mes}^{1-1/r_0}A(k)\}\tag{2.3}$$

其中的常数$C>0$和u，k无关。类似地

$$\int_{A(k)}(u-k)^+d|u|^{a-1}dx\leqslant\|(u-k)^+\|_{L_q(G)}\|d\|_{Gr_0(G)}\|u\|_{L_q(A(k))}^{a-1}\mathrm{mes}^{1-1/r_0-a/q}A(k)$$

$$\leqslant C\{\|(u-k)^+\|_{L_q(G)}^a+[k\mathrm{mes}^{1/q}A(k)]^{p(a-1)/(p-1)}\}\mathrm{mes}^{1-1/r_0-a/q}A(k)$$

$$\leqslant C\{\varepsilon(k)\int_{A(k)}|\nabla u|^p dx+[k\mathrm{mes}^{1/q}A(k)]^{p(a-1)/(p-1)}\mathrm{mes}^{1-1/r_0-a/q}A(k)\}\tag{2.4}$$

$$\int_{A(k)}(u-k)^+c(x)|\nabla u|^\gamma dx$$

$$\leqslant\|(u-k)^+\|_{L_q(A(k))}^{\gamma+1-p}\|c(x)\|_{L_r(A(k))}\mathrm{mes}^{1-1/r-1/q-\gamma/p}A(k)$$

$$\cdot\|(u-k)^+\|_{L_q(G)}^{p-\gamma}\left(\int_{A(k)}|\nabla u|^p dx\right)^{\gamma/p}$$

$$\leqslant\varepsilon(k)\int_{A(k)}|\nabla u|^p dx\qquad(\varepsilon(k)\to 0\quad \text{当}k\to\infty)\tag{2.5}$$

当$u\in M_p^1(G)$，$1<p<n$，$p-1\leqslant\gamma\leqslant p-1+p/n$；

$$\int_{A(k)}(u-k)^+c(x)|\nabla u|^\gamma dx=\int_{A(k)}(u-k)^{\gamma+1-p}c(x)(u-k)^{p-\gamma}|\nabla u|^\gamma dx$$

$$\leqslant\|(u-k)^+\|_{L_t(A(k))}^{\gamma+1-p}\|c(x)\|_{L_r(G)}\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{r}-\frac{p-\gamma}{q}-\frac{\gamma+1-p}{t}}A(k)$$

$$\cdot\|(u-k)^+\|_{L_q(G)}^{p-\gamma}\left(\int_{A(k)}|\nabla u|^p dx\right)^{\gamma/p}$$

$$\leqslant\varepsilon(k)\int_{A(k)}|\nabla u|^p dx\qquad(\varepsilon(k)\to 0\quad \text{当}k\to\infty)\tag{2.6}$$

当$u\in W_p^1(G)\cap L_t(G)$，$p-1+p/n<\gamma<p$，$1<p<n$。

$$\int_{A(k)}f_0(x)dx\leqslant\|f_0\|_{Ls_0(G)}\mathrm{mes}^{1-1/s_0}A(k)\tag{2.7}$$

$$\int_{A(k)}(u-k)^+f_2(x)dx\leqslant\|(u-k)^+\|_{L_q(G)}\|f_2\|_{Ls_2(G)}\mathrm{mes}^{1-1/q-1/s_2}A(k)$$

$$\leqslant\varepsilon\int_{A(k)}|\nabla u|^pdx+C_\varepsilon\|f_2\|^{p/(p-1)}_{Ls_2(G)}\ \mathrm{mes}^{\frac{p}{p-1}\left(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\right)}A(k) \tag{2.8}$$

($\varepsilon>0$可以取任何实数，C_ε是常数，只依赖于n,p和ε)。联合(2.2)～(2.8) 并取定 $\varepsilon>0$ 足够小，$k_0>\max(M,0)$足够大，使$k\geqslant k_0$时，$\mathrm{mes}A(k)\leqslant1$，且$\varepsilon(k)$足够小，我们即得

$$当a=p时，\left(\int_{A(k)}|\nabla u|^pdx\right)^{1/p}\leqslant C(F+k)\mathrm{mes}^{1/q+\tau}A(k) \tag{2.9}$$

$$\tau=\min\left\{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{r_0}-\frac{a}{q}\right),\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{s_0}-\frac{p}{q}\right),\ \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\right)-\frac{1}{q}\right\}$$

$$=\min\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{pr_0},\ \frac{1}{n}-\frac{1}{ps_0},\ \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{n}-\frac{1}{s_2}\right)\right\}>0$$

当 $p<a\leqslant q$ 时，由于 $k\mathrm{mes}^{1/q}A(k)\leqslant\left(\int_G|u|^qdx\right)^{1/q}$

$$\left(\int_{A(k)}|\nabla u|^pdx\right)^{1/p}\leqslant C\left[F+k^{1+q\tau}\left(\|u\|^{\frac{a-p}{p}-q\tau}_{L_q(G)}+\|u\|^{\frac{a-p}{p-1}-q\tau}_{L_q(G)}\right)\right]\mathrm{mes}^{1/q+\tau}A(k)$$

$$\tau=\min\left\{\frac{a-p}{pq},\ \frac{1}{n}-\frac{1}{ps_0},\ \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{n}-\frac{1}{s_2}\right)\right\}>0 \tag{2.10}$$

其中

$$F=\|f_0\|^{1/p}_{Ls_0(G)}+\|f_2\|^{1/(p-1)}_{Ls_2(G)} \tag{2.11}$$

(2.9),(2.10)中的常数C和k_0 有关 (因而和u有关)但和k无关．不失一般性，不妨设 $k_0\geqslant1$，那么$(F+k)$可以用$k(F+1)$来代，对(2.10)中方括弧内的项也这么处理，然后根据[1]中第二章引理5.3，由(2.9)、(2.10)分别得到$\underset{G}{\mathrm{vrai\,max}}\,u<+\infty$。

$p=n$的情形证明完全类似．不同的是用l取代q的地位．取l足够大使推导 (2.3)～(2.8) 用到的Hölder不等式能够使用，再取$p'\in(1,n)$使

$$1/l=1/p'-1/n$$

利用

$$\left(\int_{A(k)}|(u-k)^+|^ldx\right)^{1/l}=\left(\int_G|(u-k)^+|^ldx\right)^{1/l}$$

$$\leqslant C(n,l)\left(\int_{A(k)}|\nabla u|^{p'}dx\right)^{1/p'}\leqslant C(n,l)\mathrm{mes}^{1/p'-1/p}A(k)\left(\int_{A(k)}|\nabla u|^pdx\right)^{1/p}$$

我们可以推出类似(2.9)、(2.10)的式子，并由它们分别再一次得到$\underset{G}{\mathrm{vrai\,max}}\,u<+\infty$．定理1于是获证。

今后我们只考虑有界解的情形．

定理2 设$p>1$，$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)\cap L_\infty(G)$满足方程(1.1)，且$\vec{A},B$满足如下的结构条件：

$$\left.\begin{array}{ll}\vec{A}(x,u(x),\nabla u(x))\in L_{p/(p-1)}(G) & \forall u\in W_p^1(G)\\ \nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\geqslant\kappa_0|\nabla u|^p, & \kappa_0>1\\ B(x,u,\nabla u)=B_1(x,u,\nabla u)+\lambda|u|^{a-2}u & \lambda>0\\ |B_1(x,u,\nabla u)|c(x)|\nabla u|^\gamma+f(x) & p-1\leqslant\gamma\leqslant p\\ c(x)\in L_r(G) & f(x)\in L_\infty(G)\\ p\leqslant a\leqslant q=np/(n-p) & \text{当}1<p<n;\ p\leqslant a<+\infty\quad\text{当}p\geqslant n\\ r=n/(p-\gamma) & \text{当}1<p<n,\ p-1\leqslant\gamma<p\\ r>n/(p-\gamma) & \text{当}p=n,\ p-1\leqslant\gamma<p\\ r=p/(p-\gamma) & \text{当}p>n,\ p-1\leqslant\gamma<p\\ r=+\infty & \text{当}p>1,\ \gamma=p\end{array}\right\}\tag{2.12}$$

那么，成立

$$\|u\|_{L_\infty(G)}^{a-1}\leqslant\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\tag{2.13}$$

证明 由于设$u\in\mathring{W}_p^1(G)\cap L_\infty(G)$，对任意$\nu\geqslant0$，

$$v=|u|^\nu u\text{和}U=|u|^{\nu/p}u\in\mathring{W}_p^1(G)\cap L_\infty(G)$$

并且

$$\nabla v=(\nu+1)|u|^\nu\nabla u,\quad\nabla U=(\nu/p+1)|u|^{\nu/p}\nabla u$$

取$v=|u|^\nu u$作试验函数，代入(1.1)并利用定理的条件，即得

$$\begin{aligned}0&=\int_G\{(\nu+1)|u|^\nu\nabla u\cdot\vec{A}+|u|^\nu uB_1+\lambda|u|^{\nu+a}\}dx\\&\geqslant\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^p\int_G|\nabla U|^pdx+\lambda\int_G|u|^{\nu+a}dx\\&\quad-\int_G|u|^{\nu+1}(c(x)|\nabla u|^\gamma+f(x))dx\end{aligned}\tag{2.14}$$

下面分几种情况来考虑．首先考虑

（i） $1<p<n$，$p-1<\gamma<p$的情形．

由于$1<p<n$，利用$\mathring{W}_p^1(G)$中的嵌入定理和Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_Gc(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^\gamma dx&=\int_Gc(x)|u|^{\nu(\gamma/p)}|\nabla u|^\gamma|u|^{\nu(1-\gamma/p)}|u|^{p-\gamma}|u|^{\gamma-1+p}dx\\&\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^\gamma\int_Gc(x)|\nabla U|^\gamma|U|^{p-\gamma}|u|^{\gamma+1-p}dx\\&\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^\gamma\|c(x)\|_{L_r(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}\left(\int_G|\nabla U|^pdx\right)^{\gamma/p}\left(\int_G|U|^qdx\right)^{\frac{p-\gamma}{q}}\\&\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^\gamma\|c(x)\|_{L_r(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}C(u,p,\gamma)\int_G|\nabla U|^pdx\end{aligned}\tag{2.15}$$

由于$\gamma>p-1$，可取$\nu_0>0$这样大，使

$$\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\|c(x)\|_{L_r(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}C(n,\ p,\gamma)\leqslant\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\qquad \nu\geqslant\nu_0$$

那么

$$\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\int_G|\nabla U|^p dx-\int_G c(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^{\gamma}dx\geqslant 0\qquad \nu\geqslant\nu_0\qquad (2.16)$$

(ii) $p=n$, $p-1<\gamma<p$的情形.

由于假定(2.12)，我们有$r>n/(p-\gamma)$. 取$l>n/(n-1)$足够大，使

$$\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{p}+\frac{p-\gamma}{l}=\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}+\frac{n-\gamma}{l}<1$$

再取$p'\in(1,n)$，使$1/l=1/p'-1/n$. 据Соболев定理，成立

$$\left(\int_G|U|^l dx\right)^{1/l}\leqslant C(n,l)\left(\int_G|\nabla U|^{p'}dx\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant C(n,l)\text{mes}^{1/p'-1/p}G\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{1/p}$$

$$=C(n,l)\text{mes}^{1/l-1/p+1/n}G\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{1/p}$$

于是,

$$\int_G c(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^{\gamma}dx\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\int_G c(x)|\nabla U|^{\gamma}|U|^{p-\gamma}|u|^{\gamma+1-p}dx$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\|c(x)\|_{L_r(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}\ \text{mes}^{1-\frac{1}{r}-\frac{\gamma}{p}-\frac{p-\gamma}{l}}G$$

$$\cdot\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{\gamma/p}\left(\int_G|U|^l dx\right)^{\frac{p-\gamma}{l}}$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\|c(x)\|_{L_r(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}\ \text{mes}^{\frac{p-\gamma}{n}-\frac{1}{r}}GC(n,p,l,\gamma)\int_G|\nabla U|^p dx\qquad (2.15)'$$

用(2.15)′取代(2.15)，重复(i)中的证明，即见(2.16)成立.

(iii) $p>n,p-1<\gamma<p$的情形.

在这种情形，$r=p/(p-\gamma)$.

根据Соболев嵌入定理，成立

$$\|U\|_{L_\infty(G)}\leqslant C(n,p)\text{mes}^{1-n/p}G\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{1/p}$$

于是,

$$\int_G c(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^{\gamma}dx\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\int_G c(x)|\nabla U|^{\gamma}|U|^{p-\gamma}|u|^{\gamma+1-p}dx$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\|c(x)\|_{L_r(G)}\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{\gamma/p}\|U\|_{L_\infty(G)}^{p-\gamma}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\|c(x)\|_{L_r(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}^{\gamma+1-p}\operatorname{mes}^{(p-\gamma)(1-n/p)}G\,C(n,p,\gamma)\int_G|\nabla U|^p dx$$

由此再一次推导出(2.16)。

(iv)　$p>1,\gamma=p$的情形。

在这样的情形，$r=+\infty$。

$$\int_G c(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^{\gamma}dx\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma}\int_G c(x)|\nabla U|^p|u|dx$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p}\|c(x)\|_{L_\infty(G)}\|u\|_{L_\infty(G)}\int_G|\nabla U|^p dx$$

由此再一次推导出(2.16)。

(v)　$1<p<n,\gamma=p-1$的情形。

这时$r=n$。由于当$N\to\infty$时，

$$\operatorname{mes}(G\cap\{c(x)>N\})\leqslant\frac{1}{N}\int_G c(x)dx\to 0$$

据Lebesgue积分的绝对连续性，成立

$$\left(\int_{G\cap\{c(x)>N\}}|c(x)|^n dx\right)^{1/n}\leqslant\varepsilon(N)\to 0\qquad(\text{当}N\to\infty)$$

表示（注意$\gamma=p-1$）

$$\int_G c(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^{\gamma}dx=\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_G c(x)|\nabla U|^{p-1}|U|dx$$

$$=\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\left(\int_{G\cap\{c(x)>N\}}+\int_{G\cap\{c(x)\leqslant N\}}\right)c(x)|\nabla U|^{p-1}|U|dx\equiv I_1+I_2 \tag{2.17}$$

那么，

$$I_1\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\varepsilon(N)\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_G|U|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\varepsilon(N)C(n,p)\int_G|\nabla U|^p dx \tag{2.18}$$

$$I_2\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}N\int_G|\nabla U|^{p-1}|U|dx$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\left\{\varepsilon\int_G|\nabla U|^p dx+C(\varepsilon,N)\int_G|U|^p dx\right\} \tag{2.19}$$

取定$\varepsilon>0$，使

$$2\varepsilon=\kappa_0<\kappa_0\left(\frac{\nu+1}{\nu+p}\right)p\qquad\forall\nu>0 \tag{2.20}$$

然后再取$N>0$足够大，使出现在(2.18)右端的系数

$$\varepsilon(N)C(n,p)\leqslant\varepsilon \tag{2.21}$$

联合(2.14)、(2.17)～(2.21)给出

$$\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^p\int_G|\nabla U|^p dx-\int_G c(x)|u|^{\nu+1}|\nabla u|^\gamma dx$$

$$\geqslant\left[\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)-2\varepsilon\right]\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_G|\nabla U|^p dx$$

$$-C(\varepsilon,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_G|u|^{\nu+p}dx$$

$$\geqslant-C(\varepsilon,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_G|u|^{\nu+p}dx \tag{2.22}$$

(vi) $p=n,\gamma=p-1$的情形。

在这种情形，根据(2.12)，$r>n$，取$l>n/(n-1)$足够大，使

$$\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{p}+\frac{1}{l}=\frac{1}{r}+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{l}<1$$

于是

$$I_1=\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_{G\cap\{c(x)>N\}}c(x)|\nabla U|^{p-1}|U|dx$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\|c(x)\|_{L_r(G\cap\{c(x)>N\})}\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_G|U|^l dx\right)^{1/l}$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\varepsilon(N)C(n,p,l)\operatorname{mes}^{\frac{1}{l}-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}G\int_G|\nabla U|^p dx \tag{2.18$'$}$$

用(2.18)′取代(2.18)，重复(v)中作过的证明，即见(2.22)成立。

(vii) $p>n,\gamma=p-1$的情形。

在这种情形，$r=p$，我们有

$$I_1=\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_{G\cap\{c(x)>N\}}c(x)|\nabla U|^{p-1}|U|dx$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\|c(x)\|_{L_r(G\cap\{c(x)>N\})}\|U\|_{L_\infty(G)}\left(\int_G|\nabla U|^p dx\right)^{1-1/p}$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\varepsilon(N)C(n,p)\operatorname{mes}^{1-n/p}G\int_G|\nabla U|^p dx$$

由此再一次导得(2.22)。

当(2.16)成立时，由(2.14)给出

$$\lambda\int_G|u|^{\nu+\alpha}dx\leqslant\int_G|u|^{\nu+1}f(x)dx$$

$$\leqslant\left(\int_G|u|^{\nu+\alpha}dx\right)^{\frac{\nu+1}{\nu+\alpha}}\left(\int_G|f(x)|^{\frac{\nu+\alpha}{\alpha-1}}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\nu+\alpha}}\qquad \nu\geqslant\nu_0 \tag{2.23}$$

即 $$\lambda\left(\int_G |u|^{\nu+\alpha}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\nu+\alpha}} \leqslant \left(\int_G |f(x)|^{\frac{\nu+\alpha}{\alpha-1}}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\nu+\alpha}} \qquad \nu \geqslant \nu_0$$

命$\nu\to\infty$由上式继续得

$$\lambda\|u\|^{\alpha-1}_{L_\infty(G)} \leqslant \|f\|_{L_\infty(G)} \tag{2.24}$$

而当(2.22)成立时，由(2.14)给出

$$\lambda\int_G |u|^{\nu+\alpha}dx \leqslant \int_G |u|^{\nu+1}f(x)dx + C(\varepsilon,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\int_G |u|^{\nu+p}dx$$

$$\leqslant \left(\int_G |u|^{\nu+\alpha}dx\right)^{\frac{\nu+1}{\nu+\alpha}}\left(\int_G |f(x)|^{\frac{\nu+\alpha}{\alpha-1}}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\nu+\alpha}}$$

$$+C(\varepsilon,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\left(\int_G |u|^{\nu+\alpha}dx\right)^{\frac{\nu+p}{\nu+\alpha}} \mathrm{mes}^{\frac{\alpha-p}{\nu+\alpha}}G \tag{2.25}$$

即 $$\lambda\left(\int_G |u|^{\nu+\alpha}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\nu+\alpha}} \leqslant \left(\int_G |f(x)|^{\frac{\nu+\alpha}{\alpha-1}}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\nu+\alpha}}$$

$$+C(\varepsilon,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\left(\int_G |u|^{\nu+\alpha}dx\right)^{\frac{p-1}{\nu+\alpha}} \mathrm{mes}^{\frac{\alpha-p}{\nu+\alpha}}G$$

由于常数$C(\varepsilon,N)$和ν无关，命$\nu\to\infty$由上式再一次得到(2.24)。定理2于是完全获证。

定理3 设$p>1$，$u\in W^1_p(G)\cap L_\infty(G)$满足方程(1.1)，设$\vec{A}$,$B$满足(2.12)。如果存在常数$M>0$，使$(u-M)^+\in \mathring{W}^1_p(G)$，那么，成立

$$\mathrm{vrai}\max_G u^+ \leqslant M + \left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{2.26}$$

证明 在定理3的假设下，对任何$\nu\geqslant 0$，

$v=[(u-M)^+]^{\nu+1}$和$U=[(u-M)^+]^{\nu/p+1}\in \mathring{W}^1_p(G)\cap L_\infty(G)$

取这样的v作试验函数，代入(1.1)给出

$$0\geqslant \kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^p\int_G |\nabla U|^p dx + \lambda\int_G [(u-M)^+]^{\nu+1}|u|^{\alpha-1}dx$$

$$-\int_G [(u-M)^+]^{\nu+1}(c(x)|\nabla u|^\gamma + f(x))dx \tag{2.27}$$

内于包含有$(u-M)^+$的因子，上式中积分的有效域只是$G\cap\{u>M\}$。重复证明定理2作过的推导，只要$\nu>0$,$N>0$足够大，即有

$$\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^p\int_G |\nabla U|^p dx - \int_G c(x)[(u-M)^+]^{\nu+1}|\nabla u|^\gamma dx$$

$$=\kappa_0(\nu+1)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^p\int_G |\nabla U|^p dx - \int_G c(x)[(u-M)^+]^{\nu+1}|\nabla(u-M)^+|^\gamma dx$$

$$\geqslant\begin{cases} -C(\varepsilon,N)\left(\dfrac{p}{\nu+p}\right)^{p-1}\displaystyle\int_G [(u-M)^+]^{\nu+p}dx & \text{当}\gamma=p-1 \\ 0 & \text{当}p-1<\gamma\leqslant p \end{cases} \tag{2.28}$$

(e,N的意义同前面(v)). 联合(2.27)、(2.28)即得

$$\lambda\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+1}|u|^{\alpha-1}dx\leqslant\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+1}f(x)dx$$

$$+C(e,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma-1}\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+\nu}dx \qquad \text{当}\gamma=p-1 \qquad (2.29a)$$

$$\lambda\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+1}|u|^{\alpha-1}dx\leqslant\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+1}f(x)dx \qquad \text{当}p-1<\gamma\leqslant p \qquad (2.29b)$$

在积分的有效域$G\cap\{u>M\}$上，显然有

$$u(x)=M+u(x)-M\geqslant u(x)-M=(u-M)^+$$

所以，由(2.29a)、(2.29b)分别得到

$$\lambda\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+\alpha}dx\leqslant\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+1}f(x)dx$$

$$+C(e,N)\left(\frac{p}{\nu+p}\right)^{\gamma+1}\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+\nu}dx \qquad \text{当}\gamma=p-1 \qquad (2.30a)$$

$$\lambda\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+\alpha}dx\leqslant\int_G[(u-M)^+]^{\gamma+1}f(x)dx \qquad \text{当}p-1<\gamma\leqslant p \qquad (2.30b)$$

用$(u-M)^+$取代$|u|$，重复前面定理2中的推导，由(2.30a)，(2.30b)分别都可得到

$$\lambda[\operatorname{vrai}\max_G(u-M)^+]^{\alpha-1}\leqslant\|f\|_{L_\infty(G)} \qquad (2.31)$$

从而

$$\operatorname{vrai}\max_G u^+\leqslant M+\operatorname{vrai}\max_G(u-M)^+\leqslant M+\left[\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad (2.32)$$

从而定理3全部获证。

参 考 文 献

[1] Ладыженская О. А. и Н. Н. Уральцева, 《线性和拟线性椭圆型方程》，吉林大学数学系译，科学出版社，北京 (1987).

[2] Gilbarg, G. and N. S. Trudinger, 《二阶椭圆型偏微分方程》，上海科学技术出版社 (1981).

[3] 梁鋆廷，一类椭圆型方程的广义解，工程数学学报，3，1 (1986)，19—28.

[4] 朱熹平、杨健夫，临界增长拟线性椭圆型方程的正则性，系统科学与数学，9，1 (1989)，47—52.

[5] 梁鋆廷，拟线性椭圆型方程广义解的有界性，阴山学刊，1 (1989)，1—14.

[6] Miranda, C., Alcune osservazioni Sulla maggiorazione in L^r delle soluzioni deboli delle equationi ellittiche del secondo ordine, *Ann. Mat. Pura. e Appl.*, 61, 3 (1963), 151—169.

[7] 于鸣岐、梁鋆廷，二阶椭圆型和抛物型方程广义解最大模的估计，山西大学学报(自然科学版)，2 (1985)，3—16.

A Priori Estimate for Maximum Modulus of Generalized Solutions of Quasi-Linear Elliptic Equations

Liang Xi-ting

(*Zhongshan University, Guangzhou*)

Wang Xiang-dong

(*Xuchang Teachers College, Xuchang, He'nan*)

Abstract

Let G be a bounded domain in E^n. Consider the following quasi-linear elliptic equation

$$\int_G \{\nabla v \vec{A}(x, u, \nabla u) + vB(x, u, \nabla u)\}\, dx = 0, \ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G) \cap L_\infty(G)$$

Although the boundedness of generalized solutions of the equation is proved for very general structural conditions, it does not supply a priori estimate for maximum modulus of solutions. In this paper an estimate to the maximum modulus is made firstly for a special case of quasi-linear elliptic equations, i.e. the $\vec{A}$ and B satisfy the following structural conditions:

$$\vec{A}(x, u(x), \nabla u(x)) \in L_{p/(p-1)}(G), \qquad \forall u \in W_p^1(G)$$

$$\nabla u \cdot \vec{A}(x, u, \Delta u) \geqslant \kappa_0 |\nabla u|^p, \qquad \kappa_0 > 0, p > 1$$

$$B(x, u, \nabla u) = B_1(x, u, \nabla u) + \lambda |u|^{\alpha-2} u, \qquad \lambda > 0$$

$$|B_1(x, u, \nabla u)| \leqslant c(x) |\nabla u|^\gamma + f(x), \qquad p-1 \leqslant \gamma \leqslant p$$

$$c(x) \in L_r(G), \qquad f(x) \in L_\infty(G)$$

$$p \leqslant \alpha \leqslant q = np/(n-p) \text{ as } 1 < p < n, \ p \leqslant \alpha < +\infty \text{ as } p \geqslant n$$

Key words quasi-linear elliptic equations, generalized solutions, maximum modulus, a priori estimate