应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

多相固体弹塑性本构方程的同类性*

张培源　　汤　羽

（重庆大学，1989年6月5日收到）

摘　要

本文以复合材料为背景，讨论多相固体即混合物的等效弹塑性本构方程．按照所提出的等效本构方程的定义，文章证明，由服从广义正交法则的多种均匀的弹塑性介质组成的混合物具有与它的组分介质同类的、也服从广义正交法则的等效本构方程．

关键词　多相固体，等效均匀介质，本构同类性，广义正交法则，等效弹塑性本构方程

一、引　言

本文讨论由一个封闭曲面∂V_m围成的多相弹塑性固体V_m，它的内部被按片光滑的曲面S分割为m个子区域；每一个子区域都是均匀的连续介质，且约定地称之为V_m的一个相$V^{(i)}(i=1, 2, \cdots, m)$，图1．我们的问题是如何从各组分的本构方程和几何性质预报多相体的等效本构方程或多相体的等效均匀体的本构方程．

对于类似的多相固体本构等效问题，30年来吸引了不少知名的力学和材料科学工作者．近10多年来，由于复合材料的发展，这一课题更得到特殊的重视．

文[1，2，3]和著作[4]对本构等效的一系列基本原理和方法作了连续介质理论的奠基性工作，对等效弹性常数得到了相应的预报公式．近年来，这类工作又拓广到非弹性行为[5]，并计入了相间结合状态的影响[6,7]．尽管如此，涉及非弹性行为的研究，特别是等效弹塑性本构方程的组分预报工作为数甚少．

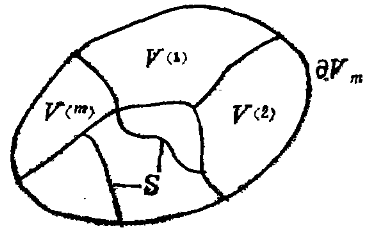

图1　多相体V_m和它的相$V^{(i)}$，$i=1, 2, \cdots, m$.

对于经典弹塑性模型，一些文章讨论了初始屈服条件．涉及经典弹塑性模型的其他概念，如加载函数、流动法则等是否能推广到多相介质；是否具有概念拓广的逻辑合理性；如何由组分介质的性质作出多相固体等效弹塑性性质的预报．这些问题都是多相固体弹塑性理论需要妥当处理的关键问题．本文试将多相体本构等效理论系统化，以定义多相体的等效本构方程或定义多相体的等效均匀体，由此出发讨论由若干种均匀弹塑性介质组成多相体的若干基本的本构性质．文中引

*张汝清推荐．

入了关于组分介质和等效均匀介质本构方程的同类性概念；据此证明了由服从广义正交法则的数种均匀弹塑性介质组成的混合物体具有与它的组分介质同类的、也服从广义正交法则的等效本构方程。

二、增量型等效本构方程

1. 增量型本构方程

我们讨论的介质模型存在一个用以表示加载的函数$F(\varepsilon,\alpha)$；当$F(\varepsilon,\alpha)=0$和$(\partial F/\partial\varepsilon_{ij})\cdot\dot{\varepsilon}_{ij}\geqslant 0$表示塑性加载，即时时刻$t$的应力率和应变率满足关系

$$\dot{\sigma}_{ij}=G_{ijkl}[\varepsilon(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t;\ \alpha,\mathbf{e}]\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{2.1}$$

当$F(\varepsilon,\alpha)=0$和$(\partial F/\partial\varepsilon_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}<0$表示塑性卸载，当$F(c,\alpha)<0$表示弹性状态，两种情况下应力率和应变率满足关系

$$\dot{\sigma}_{ij}=D_{ijkl}(\alpha)\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{2.2}$$

这里，α表示内变量，其分量为α_i ($i=1, 2, \cdots, r$)；$\mathbf{e}$表示分量为$\dot{\varepsilon}_{kl}$的应变率张量$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$的单位张量，

$$\mathbf{e}\equiv\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}/(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2}$$

$\dot{\sigma}_{ij}$为应力率张量$\dot{\sigma}$的分量；$G_{ijkl}[\varepsilon(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t;\ \alpha,\mathbf{e}]$表示$\varepsilon(\tau)$的泛函，$\alpha,\mathbf{e}$为此泛函的参变量。

可以证明，如果介质服从 Ильюшин 假设[8]，即对应变的任意循环上，应力功非负，那末式(2.1)等价于如下广义正交法则[9]

$$\dot{\sigma}_{ij}=D_{ijkl}(\alpha)\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\Lambda}\partial F(\varepsilon,\alpha)/\partial\varepsilon_{ij} \tag{2.1$'$}$$

2. 应力率、应变率和位移率的场方程、相界面条件和边界条件

在时刻τ，如果多相体V_m的应力场、应变场和位移场分别为σ，ε和$\mathbf{u}$，同一时刻的应力率、应变率和位移率分别为$\dot{\sigma}$，$\dot{\varepsilon}$和$\dot{\mathbf{u}}$. 这些变率须满足如下条件:

在V_m-S上满足场方程

平衡方程 $\dot{\sigma}_{ij,j}=0$ (2.3)

Cauchy 方程 $\dot{\varepsilon}_{ij}=(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})/2$ (2.4)

本构方程式(2.1)(或(2.1)′)和(2.2)

在S上满足相界面条件

$$(\dot{\sigma}_{ij}N_j)_+=(\dot{\sigma}_{ik}N_k)_- \tag{2.5}$$

$$(\dot{\sigma}_{ij}N_j)_+=\lambda_i[(\dot{u}_i)_+-(\dot{u}_i)_-]\qquad \text{对}i\text{不求和} \tag{2.6}$$

式中λ_i为相间结合状态参数，其值取零和趋无穷大分别表示相间完全脱离接触和相间结合完好；N_i为S的法线单位矢或∂V_m的外法线单位矢。

在∂V_m上，边界条件取如下两者之一:

应力边值条件 $\dot{\sigma}_{ij}N_j=\hat{\sigma}_i$ (2.7)

或 位移边值条件 $\dot{u}_i=\hat{u}_i$ (2.8)

3. 我们定义多相体V_m的等效应力、等效应力率、等效应变和等效应变率分别为

$$\bar{\sigma}_{ij}\equiv\frac{1}{V}\int_{\partial V_m}\hat{\sigma}_i x_j dA,\quad \bar{\dot{\sigma}}_{ij}\equiv\frac{1}{V}\int_{\partial V_m}\hat{\sigma}_i x_j dA \tag{2.9}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{V}\int_{\partial V_m}\frac{1}{2}(\hat{u}_i N_j+\hat{u}_j N_i)dA,\quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}=\frac{1}{V}\int_{\partial V_m}\frac{1}{2}(\dot{\hat{u}}_i N_j+\dot{\hat{u}}_j N_i)dA \tag{2.10}$$

式中V为V_m的体积，$\hat{\sigma}_i$和$\hat{u}_i$则为表面力和位移的边值。根据这些定义可以证明

（1） $\dot{\bar{\sigma}}=\bar{\dot{\sigma}}$，$\dot{\bar{\varepsilon}}=\bar{\dot{\varepsilon}}$

（2） $\dot{\bar{\sigma}}$为$\dot{\sigma}$在V_m的体积均值

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\frac{1}{V}\int_{V_m}\dot{\sigma}_{ij}dV \tag{2.11}$$

如果σ也满足与式（2.3）和（2.7）类似的方程，即

$$\sigma_{ij,j}=0 \qquad x\in V_m-S$$

$$(\sigma_{ij}N_j)_+=(\sigma_{ik}N_k)_- \qquad x\in S$$

则$\bar{\sigma}$也为σ在V_m的体积均值：

$$\bar{\sigma}_{ij}=\frac{1}{V}\int_{V_m}\sigma_{ij}dV \tag{2.11$'$}$$

（3） 如果相间结合完好，即式（2.6）中$\lambda_i\to\infty$，则$\dot{\bar{\varepsilon}}$为$\dot{\varepsilon}$在V_m的体积均值；如果

$$(u_i)_+=(u_i)_- \qquad x\in S$$

则$\bar{\varepsilon}$为ε在V_m的体积均值：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}=\frac{1}{V}\int_{V_m}\dot{\varepsilon}_{ij}dV,\quad \bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{V}\int_{V_m}\varepsilon_{ij}dV \tag{2.12}$$

取应力和应变的体积均值作为等效应力和等效应变，正是[1，2，3]的方法。但是，当位移在相界面S上具有第一类间断，表现为表面位移宏观效应的等效应变只能按式（2.10）定义。

4．多相体的增量型等效本构方程

对于给定的均匀对称二阶张量$\varepsilon^\circ_{ij}(\tau)$，$0\leqslant\tau\leqslant t$，我们取式(2.8)中$\dot{\hat{u}}_i$为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\hat{u}}_i&=\dot{\varepsilon}^\circ_{ij}(\tau)x_j \qquad x\in\partial V_m\\ \text{和}\quad \hat{u}_i&=\varepsilon^\circ_{ij}(\tau)x_j \qquad x\in\partial V_m\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

可以证明，$\bar{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon^\circ_{ij}$，$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}=\dot{\varepsilon}^\circ_{ij}$．把方程(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5)、(2.6)和(2.8)结合起来，总可以求出应力率、应变率和位移率的场分布。根据这些分布，总可以按定义（2.9）计算等效应力率，并把结果表示为

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}(t)=\bar{G}_{ijkl}[\varepsilon^\circ(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant t;\ \bar{\alpha},\dot{\mathbf{e}}]\dot{\varepsilon}^\circ_{kl}(t)$$

或

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}(t)=\bar{G}_{ijkl}[\bar{\varepsilon}(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant t;\ \bar{\alpha},\dot{\mathbf{e}}]\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}(t) \tag{2.14}$$

这里$\bar{G}_{ijkl}$为自变函数$\bar{\varepsilon}(\tau)$，$0\leqslant\tau<t$的泛函。这泛函含参变量$\bar{\alpha}$和

$$\dot{\mathbf{e}}=\dot{\bar{\varepsilon}}/(\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij})^{1/2}$$

另一方面，总存在着$\dot{\bar{\varepsilon}}(t)$的特定方向，使介质单元体都处于塑性卸载或弹性状态。这时本构方程（1.2）有效，上述应力率场分布导致关系式

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl} \tag{2.15}$$

这里，张量$\bar{D}_{ijkl}$和$\bar{G}_{ijkl}$可能与一组内变量$\bar{\alpha}$有关。我们用$\bar{\alpha}_i$ ($i=1,2,\cdots,R$)表示$\bar{\alpha}$的分量，并把式 (2.6) 中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$作为它的一部分。

我们称方程 (2.14) 和 (2.15) 为多相体的增量型等效本构方程，或者称它们为多相体的等效均匀体增的量型本构方程。

三、本构同类性质

1. 引例·本构同类性质

代替方程 (2.1) 和(2.2)，我们引入介质单元体的如下本构方程

$$\dot{\sigma}_{ij}=D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{3.1}$$

式中D^e_{ijkl}为均匀常张量。对于给定时刻，应力率、应变率和位移率的边值问题就是通常的多相均匀线弹性介质的线性弹性力学问题。由此得到的等效本构方程必然具有与式 (3.1) 相似的形式[2,3]

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\bar{D}^e_{ijkl}\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl} \tag{3.2}$$

由此可见，多相固体和它的组分介质都可以用同一类型的本构方程描写。我们称多相体的这种性质为本构同类性质。

可以证明，如果式 (3.1) 中D^e_{ijkl}与应变的即时值有关，

$$D^e_{ijkl}=D^e_{ijkl}(\varepsilon)$$

相应的多相体也具有本构同类性。

一般而言，由 Hooke 介质组成的多相固体并不总具有本构同类性。因填充物几何形状的不同，混合物可以表现宏观各向异性。

按照等效本构方程的上述含义，以简单物质为组分的多相固体，其等效均匀体也是简单物质。因而在简单物质范围内，多相固体具有本构同类性。

本构同类性是说明本构模型逻辑合理性的一个方面。我们将证明，由服从广义正交法则的弹塑性物质组成的多相固体具有本构同类性。

2. 多相弹塑性体的 Ильюшин 原理

我们证明，如果组分介质服从 Ильюшин 假设，那末等效均匀介质也服从 Ильюшин 假设。

事实上，对于式 (2.13) 中等效应变$\varepsilon^{\circ}_{ij}(\tau)$在时间间隔$0\leqslant\tau\leqslant T$内的一个循环，多相体上应力功为

$$V\int_0^T\bar{\sigma}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\tau$$

将式(2.9)代入，考虑到$\bar{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^{\circ}$，得到

$$V\int_0^T\bar{\sigma}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\tau=\int_0^T\int_{V_m}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij}\,dV\,d\tau$$

因为σ_{ij}在V_m是静力可能的，$\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij}$是几何相容的（相应于相间结合参数$\lambda_i\to\infty$的情况），如下虚功方程成立

$$\int_{V_m}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij}\,dV=\int_{\partial V_m}\sigma_{ij}N_j\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ik}x_k dA$$

另一方面，注意到边界条件(2.13)，相应的应变率场 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 也是几何相容的，又有如下虚功方程

$$\int_{\partial V_m}\sigma_{ij}N_j\varepsilon^{\circ}_{ik}x_k dA=\int_{V_m}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV$$

于是可以得到

$$V\int_0^T\bar{\sigma}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\tau=\int_0^T\int_{V_m}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV\,d\tau \tag{3.3}$$

一般而言，右端被积函数中ε_{ij}不再在$0\leqslant\tau\leqslant T$内完成一个整循环．但是，我们总可以把$\varepsilon_{ij}$分为两个部分$\varepsilon'_{ij}$和$\varepsilon''_{ij}$，前者表示满足条件(2.13)，且在 $0\leqslant\tau\leqslant T$ 中实现一个整循环，后者则满足齐次位移边界条件，即相应的表面位移为零，与$\dot{\varepsilon}''_{ij}$ 相应的表面位移率也为零，因而

$$\int_{V_m}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}''_{ij}dV=0$$

这样一来，式 (3.3) 成为

$$V\int_0^T\bar{\sigma}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\tau=\int_{V_m}\int_0^T\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij}d\tau dV$$

按 Ильюшин 假设，在端体积分的被积函数非负，故命题得证

$$\int_0^T\bar{\sigma}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\tau\geqslant 0 \tag{3.4}$$

3．到此为至，我们已经说明，服从 Ильюшин 准则、本构方程为 (2.1) 和 (2.2) 的弹塑性介质组成的多相固体也服从 Ильюшин 准则，且有与方程 (2.1) 和 (2.2) 相似的本构方程 (2.14) 和(2.15)。

利用 Ильюшин 准则，我们可以证明式 (2.14) 和 (2.15) 中泛函$\bar{G}_{ijkl}$和函数$\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})$满足条件

$$\delta\bar{\varepsilon}^{u}_{ij}\{\bar{G}_{ijkl}[\bar{\varepsilon}(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t;\ \bar{\alpha},\dot{\bar{\varepsilon}}]-\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})\}\delta\bar{\varepsilon}^{L}_{kl}\geqslant 0 \tag{3.5}$$

这里无限小应变增量$\delta\bar{\varepsilon}^{L}_{ij}$和$\delta\bar{\varepsilon}^{u}_{ij}$相应的应力增量$\delta\bar{\sigma}_{ij}$分别由式 (2.14) 和 (2.15) 决定:

$$\delta\bar{\sigma}_{ij}=\begin{cases}\bar{G}_{ijkl}\delta\bar{\varepsilon}_{kl} & \delta\bar{\varepsilon}_{kl}=\delta\bar{\varepsilon}^{L}_{kl}\\ \bar{D}_{ijkl}\delta\bar{\varepsilon}_{kl} & \delta\bar{\varepsilon}_{kl}=\delta\bar{\varepsilon}^{u}_{kl}\end{cases}$$

条件 (3.5) 成立的一个充分条件是存在一个过$\bar{\varepsilon}$的曲面，使$\delta\bar{\varepsilon}^{L}$和$\delta\bar{\varepsilon}^{u}$分别在此曲面的两侧。如果此曲面用含参数$\bar{\alpha}$的如下方程表示

$$\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})=0$$

那末，式 (3.5) 必然导致

$$\{\bar{G}_{ijkl}[\bar{\varepsilon}(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t;\bar{\alpha},\dot{\bar{\varepsilon}}]-\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})\}\dot{\bar{\varepsilon}}^{L}_{kl}=-\dot{\Lambda}\frac{\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}$$

$$\text{当}\quad \bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})=0,\ \frac{\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\delta\bar{\varepsilon}^{L}_{ij}\geqslant 0 \tag{3.6}$$

式中$\dot{\Lambda}$为标量因子。

利用这个结果，方程（2.14）和（2.15）可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}-\dot{\Lambda}\frac{\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\quad\left(\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})=0,\ \frac{\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}\geqslant0\right)\\&\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}\quad\left(\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})=0,\frac{\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}<0;\ \bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})<0\right)\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

由此可见，组分介质满足广义正交法则的多相体，其等效本构方程也符合广义正交法则。换言之，满足广义正交法则的弹塑性介质组成了具有本构同类性的多相固体。

一般而言，标量因子$\dot{\Lambda}$可以表示为

$$\dot{\Lambda}=\eta_{kl}\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}\tag{3.8}$$

因而式（3.6）成为

$$\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})-\bar{G}_{ijkl}[\bar{\varepsilon}(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t;\ \bar{\alpha},\dot{\bar{\varepsilon}}]=-\frac{\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\alpha})}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\eta_{kl}\tag{3.9}$$

此式说明，$\bar{D}_{ijkl}-\bar{G}_{ijkl}$可以表示为两个二阶张量的并。

四、加载函数的预报

如何由组分条件预报多相固体增量型等效本构方程的加载函数是应用上述结论的关键问题。

1．用应力表示加载函数

我们把塑性应变$\bar{\varepsilon}^p$作为内变量，用$\bar{\alpha}$表示其余的内变量，并把应力和应变全量的关系写为如下函数形式

$$\bar{\sigma}_{ij}=\Sigma_{ij}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})\tag{4.1}$$

相应的加载函数则表示为$\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})$。如果用$\bar{D}^{-1}_{ijkl}(\bar{\alpha})$表示$\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})$之逆，

$$\bar{D}_{ijkl}\bar{D}^{-1}_{klmn}=\delta_{im}\delta_{jn},\quad \bar{D}^{-1}_{ijkl}\bar{D}_{klmn}=\delta_{im}\delta_{jn}$$

并引入记号$\bar{D}^L_{ijkl}$

$$\bar{D}^L_{ijkl}\equiv\partial\Sigma_{ij}/\partial\bar{\varepsilon}_{kl}\tag{4.2}$$

和应力表示的加载函数$\bar{f}(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})$，使

$$\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})\equiv\bar{f}(\Sigma(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha}),\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})\tag{4.3}$$

那末方程（3.7）第一式又可以写作

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}-\dot{\Lambda}\partial\bar{F}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})/\partial\bar{\varepsilon}_{ij}\tag{4.4}$$

或改写为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}=\bar{D}^{-1}_{ijkl}(\bar{\alpha})\,\dot{\bar{\sigma}}_{kl}+\dot{\Lambda}\bar{D}^{-1}_{ijkl}\bar{D}^L_{klmn}\partial\bar{f}(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})/\partial\bar{\sigma}_{mn}\tag{4.5}$$

由此可见，当$\bar{D}_{ijkl}$与$\bar{D}^L_{ijkl}$相等，此式便成为通常的正交法则[10]。

为了确定因子$\dot{\Lambda}$，在加载条件下，我们对$\bar{F}$作全导数，得到

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ij}}\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{ij}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\alpha}_i}\dot{\bar{\alpha}}_i=0\tag{4.6}$$

假设$\dot{\bar{\alpha}}_i$由如下演化方程与塑性应变率相联系

$$\dot{\bar{\alpha}}_i=M_{ikl}\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{kl} \tag{4.7}$$

引入记号$\bar{A}_{ijkl}$

$$\bar{A}_{ijkl}=\frac{\partial\Sigma_{ij}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{kl}}+\frac{\partial\Sigma_{ij}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mkl} \tag{4.8}$$

则式 (4.1) 的全导数可以表示为

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}=\bar{D}^L_{ijkl}\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}+{}_{ij}\bar{A}_{kl}\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{kl} \tag{4.9}$$

比较式 (4.4) 和(4.9)，我们得到

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{ij}=\bar{A}^{-1}_{ijmn}[(\bar{D}_{mnkl}-\bar{D}^L_{mnkl})\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}-\dot{\bar{\lambda}}\partial\bar{F}/\partial\bar{\varepsilon}_{mn}] \tag{4.10}$$

将此式和式 (4.7) 代入式(4.6)，注意到式(3.8)，我们得到

$$\eta_{kl}=\frac{\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{kl}}+\left(\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ij}}+\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mij}\right)\bar{A}^{-1}_{ijpq}(\bar{D}_{pqkl}-\bar{D}^L_{pqkl})}{\left(\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ij}}+\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mij}\right)\bar{A}^{-1}_{ijpq}\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{pq}}} \tag{4.11}$$

2. 如果已知$\bar{G}_{ijkl}$，$\bar{D}_{ijkl}$，Σ_{ij}和M_{mij}，那末由式(3.7) 可以得到适用于加载的每一步的$\bar{F}$ 的数值条件:

$$\frac{\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{kl}}+\left(\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ij}}+\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mij}\right)\bar{A}^{-1}_{ijpq}(\bar{D}_{pqkl}-\bar{D}^L_{pqkl})}{\left(\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ij}}+\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mij}\right)\bar{A}^{-1}_{ijpq}\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{pq}}}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{st}}=\bar{D}_{klst}(\bar{\alpha})-\bar{G}_{klst} \tag{4.12}$$

在较简单的近似方法中，取$\bar{D}^L_{ijkl}\equiv\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})$，即假设

$$\Sigma_{ij}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})=\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})(\bar{\varepsilon}_{kl}-\bar{\varepsilon}^p_{kl})$$

这时

$$\bar{A}_{ijkl}=-\left[\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})-\frac{\partial\bar{D}_{ijab}}{\partial\bar{\alpha}_m}\bar{D}^{-1}_{abst}\bar{\sigma}_{st}M_{mkl}\right].$$

式 (4.12) 成为:

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{ij}}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{kl}}\bigg/\left[\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ab}}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mab}\right)\bar{A}^{-1}_{abpq}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{\varepsilon}_{pq}}\right]=\bar{D}_{ijkl}(\bar{\alpha})-\bar{G}_{ijkl} \tag{4.13}$$

用应力表示的加载函数$\bar{f}(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})$，此式又可写作

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{pq}}\cdot\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{st}}\bar{D}_{pqij}\bar{D}_{stkl}/\bar{B}=\bar{D}_{ijkl}-\bar{G}_{ijkl} \tag{4.14}$$

式中

$$\bar{B}=\left\{\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{cd}}\left[-\bar{D}_{cdab}+\frac{\partial\bar{D}_{cduv}}{\partial\bar{\alpha}_m}\bar{D}^{-1}_{uvij}\bar{\sigma}_{ij}M_{mab}\right]+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ab}}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mab}\right\}\bar{A}^{-1}_{abef}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{gh}}\bar{D}_{ghef}$$

或者

$$\bar{B}=\bar{D}_{abcd}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{ab}}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{cd}}+\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ab}}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mab}\right)\bar{A}^{-1}_{abef}\bar{D}_{efgh}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\sigma}_{gh}} \tag{4.15}$$

3. 如果用等效应力表示多相体V_m中介质单元开始出现塑性状态的条件为

$$\bar{f}_0(\bar{\sigma},\bar{\alpha})=0$$

我们把它称为V_m的等效初始屈服条件，并总可以由V_m的线性弹性分析得到．为了作加载函数的近似预报，我们取

$$\bar{f}(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})\equiv\bar{f}_0(\bar{\sigma},\bar{\alpha})-K(\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha}) \tag{4.16}$$

式中K为与$\bar{\varepsilon}^p$和$\bar{\alpha}$有关的、表示强化的函数．决定加载函数的关键问题便成为求$K(\bar{\varepsilon}^p,\bar{\alpha})$．这时可以首先由条件（4.14）拟合$\bar{B}$，然后由式（4.15）得到．

$$-\frac{\partial K}{\partial\bar{\varepsilon}^p_{ij}}-\frac{\partial K}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mij}=-\frac{\partial f_0}{\partial\bar{\alpha}_m}M_{mij}+\left(\bar{B}-\bar{D}_{abcd}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ab}}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{cd}}\right)\frac{(\partial\bar{f}_0/\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{pq})\bar{D}^{-1}_{pqkl}\bar{A}_{klij}}{(\partial\bar{f}/\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ab})(\partial\bar{f}/\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ab})} \tag{4.17}$$

五、空心微珠复合材料的等效弹塑性本构方程及单向变幅应力试验

对于空心微珠填充复合材料，等效均匀体是各向同性介质，其代表性体积如图2所示．文[11]讨论了它的等效弹性模量：

$$\bar{E}=E_0(1+AB\phi_m\alpha^3)/(1-B\psi_m\phi_m\alpha^3) \tag{5.1}$$

式中，$A=(7-5\nu_0)/(8-10\nu_0)$，$\phi_m=0.74$，$\alpha=a/c$，$\psi_m=1+(1-\phi_m)\alpha^3/\phi_m$，$B=(\alpha-\gamma\alpha/F-0.52\lambda)/(\alpha+A\gamma\alpha/F+0.52\lambda A)$，$\gamma=G_0/G_1$，$\beta=b/a$，$A_1=(7-5\nu_1)/(8-10\nu_1)$，$F=(A_1-\beta^3)/(A_1+\beta^3/A_1)$，$G_0$，$\nu_0$和$G_1$，$\nu_1$分别为基体和微珠壳的剪切模数和 Poisson 比，E_0为基体的杨氏模数．文[12]给出了初始屈服函数

$$\bar{f}_0(\bar{\boldsymbol{\sigma}})=\sqrt{\left[1-\frac{1}{9}\left(\frac{\sigma^*_s}{p^*_s}\right)^2\right]\frac{3}{2}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}\delta_{ij})(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}\delta_{ij})+\left(\frac{\sigma^*_s}{p^*_s}\right)^2\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2}-\sigma^*_s \tag{5.2}$$

式中$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ii}/3$，$p^*_s$为均匀压缩的初始屈服压力，文中给出了解析表达式，$\sigma^*_s$则为单向拉伸初始屈服应力．

我们取（4.16）中K为各向同性函数

$$K=K\left(\int d\bar{\varepsilon}^p_e,\ \lambda\right) \tag{5.3}$$

这里，$d\bar{\varepsilon}^p_e=\sqrt{2d\bar{\varepsilon}^p_{ij}d\bar{\varepsilon}^p_{ij}/3}$，$\lambda$则为式(5.1)中表示相间结合状态的参数，即为式（4.16）中的α．并设

$$K\left(\int d\bar{\varepsilon}^p_e,\ \lambda\right)=K_1\left(\int d\bar{\varepsilon}^p_e\right)+K_2(\lambda)$$

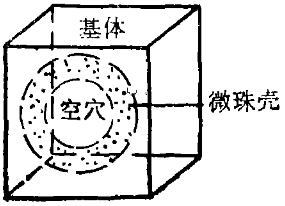

图2　代表性体积

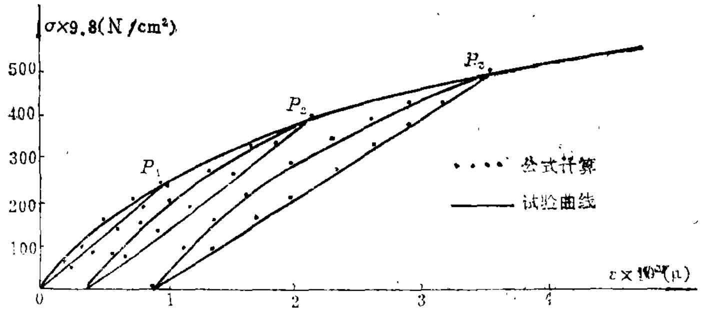

图3　单向加卸载循环曲线

在单向应力（$\bar{\sigma}_{11}\neq 0$，其余$\bar{\sigma}_{ij}=0$）条件下，式（5.1）和（5.2）分别成为

$$f_0=\bar{\sigma}_{11}-\sigma_s^*,\quad K_1=K_1(\bar{\varepsilon}_{11}^p),\quad K_2=K_2(\lambda)$$

本构方程（4.4）在单调加载时便具有如下形式

$$d\bar{\varepsilon}_{11}=\left(\frac{1}{E}+\frac{1-(\partial K_2/\partial\lambda)(d\lambda/d\bar{\sigma}_{11})}{\partial K_1/\partial\bar{\varepsilon}_{11}^p}\right)d\bar{\sigma}_{11}$$

式中取$\lambda=(\xi/\eta)\exp[\eta\bar{\sigma}_{11}]+\zeta$，常量$\xi$，$\eta$，$\zeta$和$\sigma_s^*$由静态单向拉伸试验确定；$\lambda$的函数$\partial K_2/\partial\lambda$由同一试验曲线拟合，$\partial K_1/\partial\bar{\varepsilon}_{11}^p$则由边值问题的数值解确定。把所得结果用于变幅单向应力试验，得到图3所示应力应变曲线。同一图上也给出了我们的实验结果。由此可见，理论与实验结果十分吻合，且都与文[14]的实验结果类同。

参 考 文 献

[1] Hill, R., A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 13 (1965), 213—215.

[2] Hashion, Z., Theory of mechanical behavior of heterogeneous media, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 29 (1962), 143—147.

[3] Poul, B., Prediction of elastic constants of multiphase materials, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 36 (1963), 219—222.

[4] Christensen, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & Sons, New York (1979).

[5] Исупов Л. П., *Механика Твёрдого Тела*, 21, 3 (1986), 98.

[6] Lene, F., Damage constitutive relations for composite materials, *Eng. Fract. Mech.*, 25 (1986), 713—715.

[7] Aboudi, J., Damage in composites——modeling of imperfect bonding, *Composites Sci. Tech.*, 28 (1987), 103.

[8] 曲圣年、殷有泉，塑性力学的 Drucker 公设和 Ilyushin 公设，力学学报，5 (1981).

[9] 殷有泉、曲圣年，弹塑性耦合与广义正交法则，力学学报，1 (1982), 63.

[10] 卡恰诺夫，L. M.，《塑性理论基础》，人民教育出版社 (1982).

[11] 严波，空心微珠、复合材料的弹性、蠕变及相界面的损伤，重庆大学硕士论文 (1988).

[12] 汤羽、张培源、严波，空心微珠填充复合材料的宏观初始屈服曲面，第二次全国塑性力学学术讨论会 (1988).

[13] 汤羽，多相固体的等效弹塑性本构方程，重庆大学硕士论文 (1989).

[14] Browning, R. V., M. E. Gurtin and W. O. Willams, A one-dimensional viscoplastic constitutive theory for filled polymers, *Inter. J. Solids Structures*, 20 (1984), 921—934.

The Constitutive Equation Resemblance of Elastic–Plastic Multiphase Solid

Zhang Pei-yuan Tang Yu

(*Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing*)

Abstract

Based on composite materials, the equivalent elastic-plastic constitutive equations of multiphase solid are researched. According to the suggested definition of constitutive equivalence it is demonstrated that the multiphase solid, composed of several kinds of homogeneous elastic-plastic media that conform to the generalized normality rule, has the same type of constitutive equations as its constituents have that also conform to the generalized normality rule.

Key words multiphase solid, equivalent homogeneous medium, constitutive resemblance, general normality rule, equivalent elastoplastic constitutive equation