

一种高精度的裂纹奇异单元*

王燕群 张敬宇

(天津大学, 1989年8月28日收到)

摘 要

基于广义伽辽金法的多变量有限元算法, 增加了连续体力学有限元模型建立的灵活性。本文利用它, 通过数值试验的对比建立了一种高精度的含奇异性的裂纹单元, 并对多变量奇异元的构成进行了探讨。

关键词 多变量有限元模型, 奇异单元, J 积分

一、引 言

在断裂力学中, 一个重要的问题是准确地计算出裂尖附近的应力应变分布。由于裂尖处应力(和应变)的奇异性, 若用常规有限元(单元函数不含奇异性)来计算, 需用很密的有限元网格, 计算精度不高。因此发展本身含奇异性的裂纹单元非常必要, 并且吸引了不少研究工作者致力于此^[1]。构造奇异元, 可以从不同的有限元模型出发, 而包括混合元和杂交元的多变量有限元模型在这方面有很大优势^[2,3,4]。对于多变量有限元模型, 从精度和工作量两方面考虑如何假设有关的单元变量最为有利, 一直为人们所关心; 并且也发现, 有些已发表的基于多变量有限元的奇异单元并不能有效地反映奇异性。本文利用我们所建立的比较灵活的有限元模型^[5]对此问题进行了探讨, 并得到了一种精度高的裂纹奇异单元。

本文[5]中作者提出了一种基于广义伽辽金法的多变量有限元模型, 其列式过程分为两步: 第一步把单元视为边界位移暂时给定, 用广义虚应力原理去求得与此边界位移相协调的单元域内位移和应变; 第二步由以上求得的单元应变通过物理方程求得应力, 再对整个结构采用虚位移原理使这里求得的应力满足平衡方程和力的边界条件。

以小位移问题为例, 令单元的区域和边界分别为 V^e 和 S^e , 广义虚应力原理的虚功方程为

$$\int_{V^e} \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{S^e} \bar{u}_i n_j \delta \sigma_{ij} dS - \int_{V^e} u_i \delta \sigma_{ij,j} dV \quad (1.1)$$

对右端第二项实行分部积分, 上式也可以写成:

* 赵祖武推荐。

$$\int_{V_0} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{V_0} u_{i,j} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_0} (u_i - \bar{u}_i) n_j \delta \sigma_{ij} dS \quad (1.2)$$

这里, ε_{ij} 和 u_i 为单元的应变和位移, \bar{u}_i 为暂时给定的单元边界位移, n_j 为边界 S_0 外法线方向余弦, $\delta \sigma_{ij}$ 为虚应力。广义虚应力原理应表达为: ε_{ij} 和 u_i 满足几何方程和位移边界条件的充要条件是它们对于任意可微商的虚应力 $\delta \sigma_{ij}$ 均能使虚功方程(1.1)或(1.2)成立。在这里, 各种物理量的假设均不需要满足任何附加方程, 使得在各种特殊情况下建立有限元模型增加了灵活性。

方法第二步中所用虚位移原理的虚功方程和有限元位移法的协调模型所用一样, 不赘述。

二、多变量奇异元的三种方案

为了求解弹塑性断裂问题的需要, 利用我们在文[5]中建立的多变量有限元模型, 构造了三种奇异单元用于裂尖附近。现在, 针对平面问题并采用任意四边形单元, 把各种方案分述于后。

第一种方案 在单元应变中包含奇异项, 取单元位移和单元边界位移一致, 都不含奇异项。把应变和虚应力的单元函数取为:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]^T = [P_1] \{\alpha\} \quad (2.1)$$

$$\{\delta \sigma\} = [\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \delta \tau_{xy}]^T = [P_1] \{\beta\} \quad (2.2)$$

其中,

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x/r^Q & y/r^Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x/r^Q & y/r^Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x/r^Q & y/r^Q \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$\{\alpha\}$ 是15个待定应变参数, $\{\beta\}$ 是15个虚应力参数。

式(2.3)中的 r 为以裂尖为原点的矢径(见图1),

Q 为反映应变奇异性的指数。

选单元和单元边界的位移插值函数同于位移法的四边形等参数元, 为:

$$\{U\} = \{U\} = [F] \{q\} \quad (2.4)$$

其中,

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & F_3 & 0 & F_4 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & F_2 & 0 & F_3 & 0 & F_4 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\{q\} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]^T \quad (2.6)$$

在式(2.5)中,

$$F_i = (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) / 4 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2.7)$$

此处 ξ_i, η_i 是局部坐标, 参看图1。

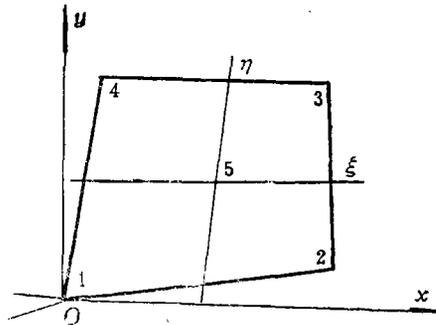


图1 任意四边形单元

列式的第一步, 将式(2.1)、(2.2)和(2.4)的函数代入广义虚功方程(1.2), 应用虚应力原理, 可得到单元应变参数 $\{\alpha\}$ 与节点位移 $\{q\}$ 间关系, 写成矩阵表达式为

$$\{\alpha\} = [B]\{q\} \quad (2.8)$$

这里 $[B]$ 是已知矩阵(详式从略)。将式(2.8)代入式(2.1), 得单元应变与节点位移的关系为

$$\{\epsilon\} = [P_1][B]\{q\} \quad (2.9)$$

进而, 利用本构方程可得单元应力与节点位移的关系为

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][P_1][B]\{q\} \quad (2.10)$$

$[D]$ 是弹性矩阵或弹塑性矩阵。

列式的第二步, 对结构整体应用虚位移原理, 以便使式(2.10)表达的应力近似地满足平衡方程和力的边界条件, 据此得到求解全部节点位移的代数方程。应用虚位移原理时, 为方便, 虚应变和虚位移分别按式(2.1)和(2.4)的模式选取。

求得节点位移后, 可由式(2.10)求得单元应力。

第二种方案 令单元的应变和位移中均包含反映应变奇异性的奇异项, 单元边界位移仍不含奇异项。与第一种单元一样, 单元的应变由式(2.1)和式(2.3)给出, 虚应力由式(2.2)和式(2.3)给出, 单元边界位移由式(2.4)、(2.5)、(2.6)和(2.7)给出。而单元域内位移分为非奇异部分 $\{U_q\}$ 和奇异部分 $\{U_\lambda\}$, 亦即

$$\{U\} = \{U_q\} + \{U_\lambda\}; \quad u_i = u_{qi} + u_{\lambda i} \quad (2.11)$$

其中

$$\{U_q\} = [F]\{q\} \quad (2.12)$$

$[F]$ 和 $\{q\}$ 由式(2.5)、(2.6)和(2.7)给出。另取

$$\{U_\lambda\} = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^p & 0 \\ 0 & r^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = [M]\{\lambda\} \quad (2.13)$$

这里 λ_1, λ_2 为奇异部分的位移参数。 r 为以裂尖为原点的矢径, P 为能反映应变奇异性的指数。为便于相邻单元的协调, 边界位移仍统一取式(2.4), 即取

$$\{U_q\} = \{\bar{U}\}; \quad u_{qi} = \bar{u}_i \quad (2.14)$$

这意味着单元域内位移的奇异部分 $\{U_\lambda\}$ 在单元边界上将在虚应力原理的意义下被消去。

将式(2.11)代入方程(1.2), 并考虑到式(2.13), 得到

$$\int_{V'} e_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{V'} u_{qi,j} \delta \sigma_{ij} dV + \int_{V'} u_{\lambda i,j} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S'} u_{\lambda i} n_j \delta \sigma_{ij} dS \quad (2.15)$$

对上式最后一项使用格林公式, 得

$$\int_{V'} e_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{V'} u_{qi,j} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{V'} u_{\lambda i} \delta \sigma_{ij,j} dV \quad (2.16)$$

将式(2.1)、(2.2)、(2.12)和(2.13)给定的函数代入式(2.16), 利用虚应力原理, 可得应变参数 $\{\alpha\}$ 与节点位移 $\{q\}$ 和位移参数 $\{\lambda\}$ 间关系, 写成矩阵形式为

$$\{\alpha\} = [B_1]\{q\} + [B_2]\{\lambda\} \quad (2.17)$$

其中矩阵 $[B_1]$ 和 $[B_2]$ 可以求得(详式从略)。

式(2.17)代入式(2.1)后得到用 $\{q\}$ 和 $\{\lambda\}$ 表达的应变

$$\{\epsilon\} = [P_1][B_1]\{q\} + [P_1][B_2]\{\lambda\} \quad (2.18)$$

进而, 利用本构方程可得用 $\{q\}$ 和 $\{\lambda\}$ 表达的应力

$$\{\sigma\}=[D][P_1][B_1]\{q\}+[D][P_1][B_2]\{\lambda\} \quad (2.19)$$

在列式的第二步中用虚位移原理建立求解位移参数 $\{q\}$ 和 $\{\lambda\}$ 的方程。但由于位移参数 $\{\lambda\}$ 与边界协调无关因而在各单元中独立, 可以采用式(2.13)表示的虚位移, 分别对单元使用虚位移原理先把它们解出, 即把 $\{\lambda\}$ 表为 $\{q\}$ 的函数。最后, 对结构使用虚位移原理建立起全部节点位移的代数方程。

第三种方案 让单元应变、位移和边界位移中均包含反映应变奇异性的奇异项。单元应变仍由式(2.1)和(2.3)给出, 虚应力仍由式(2.2)和(2.3)给出。至于单元域内位移 $\{U\}$ 和边界位移 $\{U\}$, 以 x 方向位移 u 为例, 取为

$$u=\bar{u}=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+\lambda r^P \quad (2.20)$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 和 λ 为位移参数, P 仍为反映应变奇异性的指数。今取四边形的角点和形心为节点(图1), 以节点位移 $u_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 取代式(2.20)中的位移参数 $a_i(i=1, 2, 3, 4)$ 和 λ , 则有

$$u=[1 \ x \ y \ xy \ r^P][T]^{-1}[u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5]^T \quad (2.21)$$

这里

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & r_1^P \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & r_2^P \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & r_3^P \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & r_4^P \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5y_5 & r_5^P \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

同理, y 方向以节点位移写出的位移 v 表达式为:

$$v=[1 \ x \ y \ xy \ r^P][T]^{-1}[v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]^T \quad (2.23)$$

接下去的推导和第一种单元类似, 不再重复。

三、算 例

通过算例对上述三种方案的计算精度进行了考察。为了比较, 还取了一种非奇异元(或叫常规元)的方案, 就是在第一种方案中去掉式(2.1)和(2.3)给出的单元应变中的奇异项。

今取二个算例, 一是含有中心裂纹的板, 一是三点弯曲的板。用上述各方案的单元算它们在线弹性情况下的 J 积分, 这时应取奇异项之指数 $Q=1.5, P=0.5$ 。板的材料是铝合金, 其弹性模量 $E=61900\text{kgf/mm}^2(606620\text{N/mm}^2)$, 泊桑比 $\mu=0.3$, 板的尺寸见图2, $W=60\text{mm}, L=150\text{mm}$, 板厚 $t=5\text{mm}$ 。取二种裂纹长度, 分别为 $a=17\text{mm}$ 和 $a=28\text{mm}$ 。含中心裂纹板的远方应力为 $\sigma=64.09\text{kgf/mm}^2(628.08\text{N/mm}^2)$, 三点弯曲板的集中力 $P=2000\text{kgf}(19600\text{N})$ 。

利用对称性, 对两种板分别取 $1/4$ 和 $1/2$ 进行计算。其网格划分见图3, 计算结果见表1和表2。

表1

含中心裂纹板计算结果

注: $1\text{kgf}=9.8\text{N}$

		理论解	非奇异单元	方案一	方案二	方案三
$a=17\text{mm}$	$J(\text{kgf}/\text{mm})$	3.9445	3.6843	3.6845	3.6839	3.9321
	相对误差	0	-6.60%	-6.59%	-6.61%	-0.32%
$a=28\text{mm}$	$J(\text{kgf}/\text{mm})$	7.7267	5.9059	5.9066	5.9417	7.1168
	相对误差	0	-23.57%	-23.56%	-23.10%	-7.89%

表2

三点弯曲板计算结果

注: $1\text{kgf}=9.8\text{N}$

		理论解	非奇异单元	方案一	方案二	方案三
$a=17\text{mm}$	$J(\text{kgf}/\text{mm})$	2.2790	2.1332	2.1338	2.1337	2.2663
	相对误差	0	-6.40%	-6.37%	-6.37%	-0.56%
$a=28\text{mm}$	$J(\text{kgf}/\text{mm})$	6.3461	4.4772	4.4780	4.5323	5.8975
	相对误差	0	-29.45%	-29.44%	-28.58%	-7.19%

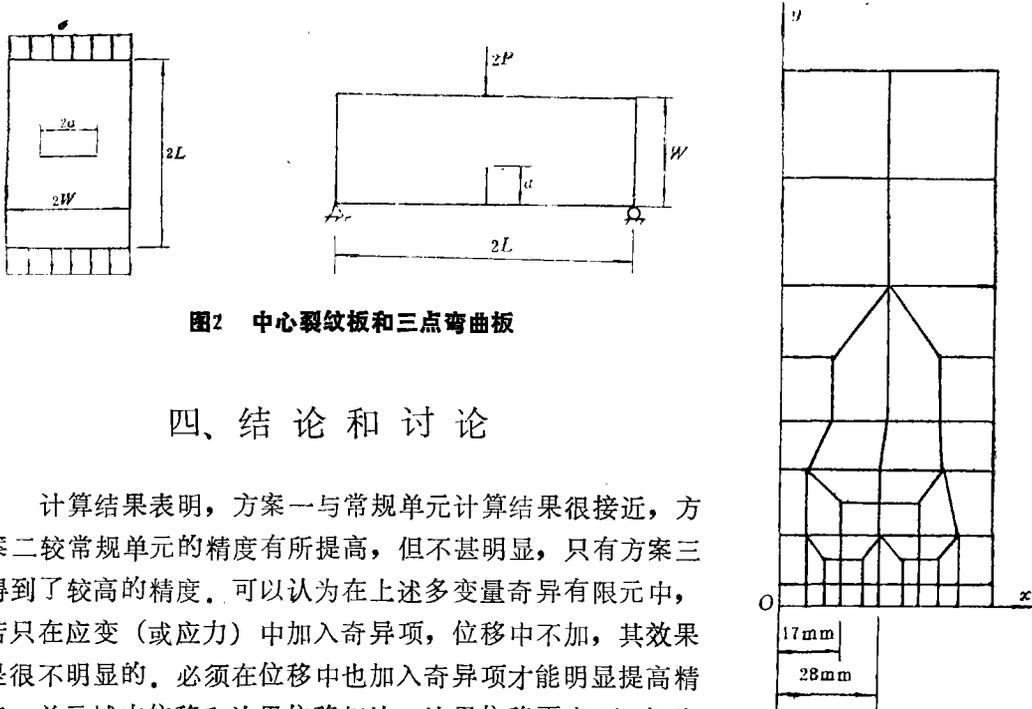


图2 中心裂纹板和三点弯曲板

四、结论和讨论

计算结果表明, 方案一与常规单元计算结果很接近, 方案二较常规单元的精度有所提高, 但不甚明显, 只有方案三得到了较高的精度. 可以认为在上述多变量奇异有限元中, 若只在应变 (或应力) 中加入奇异项, 位移中不加, 其效果是很不明显的. 必须在位移中也加入奇异项才能明显提高精度. 单元域内位移和边界位移相比, 边界位移更起决定作用.

应注意, 由于在方案三中采用了整体坐标, 又引入域内节点, 故在单元交界处位移是不协调的, 它是一种不协调元. 我们也曾在相邻单元间又单独设出包含奇异项的公共边界位移, 单元域内位移与边界位移的协调性通过虚应力原理近似得到满足. 这种方案与上述不协调元的结果很接近, 可是方案三的不协调元的列式比较简单, 故它在实践中是可取的.

图3 网格剖分图

参 考 文 献

- [1] 卞学骞, 裂纹单元, 《有限元法论文选》, 国防工业出版社 (1980).
- [2] 卞学骞, K. Moriya, 用假定应力杂交法进行三维断裂分析, 《有限元法论文选》, 国防工业出版社 (1980).

- [3] Chen, W. H. and C. W. Wu, On elastodynamic fracture mechanics analysis of bi-material structures using finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, 15, 1-2 (1981), 155—168.
- [4] Nishioka, T. and S. N. Atluri, Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies by moving singular elements, *J. of Applied Mechanics*, 47 (1980), 570—576.
- [5] 张敬宇、杨海元, 建立杂交有限元模型的一种简明格式, 天津大学学报, 增2 (1984), 1—8.

A Precise Singular Finite Element for Crack Analysis

Wang Yan-qun Zhang Jing-yu

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

The multi-variable finite element algorithm based on the generalized Galerkin's method is more flexible to establish a finite element model in the continuum mechanics. By using this algorithm and numerical tests a new singular finite element for elasto-plastic fracture analysis has been formulated. The results of numerical tests show that the new element possesses high accuracy and good performance. Some rules for formulating a multi-variable singular finite element are also discussed in this paper.

Key words multi-variable finite element model, singular finite element, J -integral