

# 四边简支对称正交层合矩形板的 非线性弯曲问题

刘人怀 何陵辉

(上海工业大学; 上海市应用数学和力学研究所, 1989年11月13日收到)

## 摘 要

本文在von Kármán型板理论的基础上, 采用双重Fourier级数方法, 研究了对称正交层合矩形板在简支边条件下, 承受任意分布横向载荷和面内载荷联合作用的非线性弯曲问题, 得到了满足控制方程和边界条件的解。

**关键词** 层合矩形板 非线性弯曲 控制方程

## 一、引 言

复合材料层合板壳结构元件, 具有轻质高强、可设计性好等许多其它结构元件无法企及的优异性能, 已经在近代工业的许多重要部门得到广泛应用。因此, 对复合材料层合板壳的力学分析便显得十分必要。

关于层合板线性问题的早期研究结果, 在Лехницкий1947年的著作<sup>[1]</sup>中就有过介绍, 但基于von Kármán型板理论基础上的非线性问题的较普遍的理论, 则是到六十年代中后期才由Stavsky<sup>[2]</sup>, Whitney和Leissa<sup>[3]</sup>等人建立起来。此后, 一些研究者对工程上最常用的复合材料层合矩形板的非线性弯曲问题进行了不少有益的研究。Turvey和Wittrick<sup>[4]</sup>采用动力松弛法研究了简支斜交层合板的大挠度和后屈曲问题。Chia和Prabhakara<sup>[5,6]</sup>采用摄动法求解了对称正交或斜交层合板在四边夹紧固定和滑动固定边界条件下, 承受均布载荷时的非线性弯曲问题。Zsghloul和Kennedy<sup>[7]</sup>对对称正交或斜交层合板在四边夹紧固定或简支两种边界条件下的大挠度问题进行了实验研究, 并给出了相应的有限差分解。Chia和Prabhakara<sup>[8~10]</sup>采用广义多重Fourier级数方法, 研究了横向和面内载荷联合作用下的四边简支或四边滑动固定非对称各向异性层合板的非线性弯曲问题, 以及简支非对称正交层合板在横向载荷或均匀边缘弯矩作用下的非线性弯曲问题。Chandra<sup>[11]</sup>使用伽辽金法分析了一个四边固定反对称层合板的非线性弯曲问题。周次青<sup>[12~14]</sup>采用奇异摄动法讨论了多种边界条件下各向异性层合板的非线性弯曲问题, 导出了挠度和力函数的 $N$ 阶一致有效渐近展开式。近年, Chia<sup>[15,16]</sup>又采用广义多重Fourier级数方法研究了非对称斜交层合板在对转动具

\*本文曾在1989年镇江第六届华东固体力学学术讨论会上宣读。

有弹性约束的边界条件下,或在固支和简支混合边界条件下的非线性弯曲问题。

本文研究了工程中常用的四边简支对称正交层合矩形板在任意横向载荷和面内载荷联合作用下的非线性弯曲问题。我们采用双重 Fourier 级数方法,将用挠度和力函数表示的 Kármán 型非线性微分方程组转化为一组非线性代数方程组,这就从理论上给出了一种获得该问题的非常精确的解析解的途径。最后,针对板承受正弦分布载荷和均布载荷的情况进行了具体的分析计算,导出了载荷与板中心挠度关系的近似公式。

## 二、边值问题的建立

在笛卡尔坐标系  $O-xyz$  中,考虑一块在  $x$  轴和  $y$  轴方向长度分别为  $a$  和  $b$ ,  $z$  轴方向厚度为  $h$  的对称正交复合材料层合薄板(图1)。此时板的中面与  $xOy$  坐标面重合。

为了简单起见,本文采用文献[17]的公式和符号。于是,此板的第  $k$  层材料的应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & 0 \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

其中  $C_{ij}^{(k)}$  为第  $k$  层材料的弹性常数。

此板的薄膜力、横向力、弯矩和扭矩分别为

$$[N_x, N_y, N_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}] dz \quad (2.2)$$

$$[Q_x, Q_y] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}] dz \quad (2.3)$$

$$[M_x, M_y, M_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}] z dz \quad (2.4)$$

我们引入力函数  $\psi$ , 使得

$$N_x = \psi_{,yy}, \quad N_y = \psi_{,xx}, \quad N_{xy} = -\psi_{,xy} \quad (2.5a, b, c)$$

则此板在横向载荷  $q(x, y)$  作用下的非线性弯曲问题的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} \\ = q + w_{,xx}\psi_{,yy} + w_{,yy}\psi_{,xx} - 2w_{,xy}\psi_{,xy} \\ A_{12}^* \psi_{,xxxx} + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \psi_{,xxyy} + A_{11}^* \psi_{,yyyy} \\ = w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \end{aligned} \right\} \quad (2.6a, b)$$

其中  $w$  为挠度,  $A_{ij}$  和  $D_{ij}$  分别为板的拉压刚度矩阵和弯曲刚度矩阵的元素,  $A_{ij}^*$  为拉压刚度矩阵的逆矩阵的元素, 且有

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(k)} dz, \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(k)} z^2 dz \quad (2.7)$$

我们考虑航空工程中常用的所谓具有刚性边框的简支板,板的边缘在变形后仍为直线,因此,其边界条件可写成:

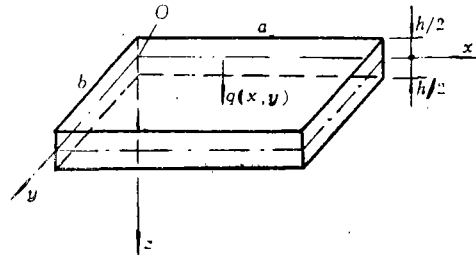


图 1 横向载荷作用下的层合矩形板

$$\left. \begin{aligned} w(0,y) &= w(a,y) = M_x(0,y) = M_x(a,y) = 0 \\ w(x,0) &= w(x,b) = M_y(x,0) = M_y(x,b) = 0 \\ \frac{1}{b} \int_0^b N_x dy &= \bar{N}_x, \quad \frac{1}{a} \int_0^a N_y dx = \bar{N}_y \\ u(a,y) - u(0,y) &= \delta_x, \quad v(x,b) - v(x,0) = \delta_y \end{aligned} \right\} \quad (2.8a, b, c, d)$$

根据式 (2.4) 和 (2.5), 这些条件可由  $w$  和  $\psi$  表示成:

$$\left. \begin{aligned} w(0,y) &= w(a,y) = w_{,zz}(0,y) = w_{,zz}(a,y) = 0 \\ w(x,0) &= w(x,b) = w_{,yy}(x,0) = w_{,yy}(x,b) = 0 \\ \frac{1}{b} \int_0^b \psi_{,yy} dy &= \bar{N}_x, \quad \frac{1}{a} \int_0^a \psi_{,zz} dx = \bar{N}_y \\ \int_0^a \left( A_{11}^* \psi_{,yy} + A_{12}^* \psi_{,zz} - \frac{1}{2} w_{,z}^2 \right) dx &= \delta_x \\ \int_0^b \left( A_{12}^* \psi_{,yy} + A_{22}^* \psi_{,zz} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) dy &= \delta_y \end{aligned} \right\} \quad (2.9a, b, c, d, e)$$

其中  $\bar{N}_x$  和  $\bar{N}_y$  为单位长度板边受到的  $x$  和  $y$  轴方向的平均法向合力,  $\delta_x$  和  $\delta_y$  为板在  $x$  和  $y$  轴方向的伸长。

于是, 本文要讨论的问题就被归结为一组边值问题 (2.6) 和 (2.9). 求解这组边值问题, 得出  $w$  和  $\psi$ , 便可由式 (2.5a, b, c) 算得  $N_x$ ,  $N_y$  和  $N_{xy}$ , 进而由以下关系求出  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  及  $\epsilon_{xy}$ :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_{11} w_{,zz} - D_{12} w_{,yy} \\ M_y &= -D_{12} w_{,zz} - D_{22} w_{,yy} \\ M_{xy} &= -2D_{66} w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.10a, b, c)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= A_{11}^* N_x + A_{12}^* N_y - z w_{,zz} \\ \epsilon_y &= A_{12}^* N_x + A_{22}^* N_y - z w_{,yy} \\ \epsilon_{xy} &= A_{66}^* N_{xy} - 2z w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.11a, b, c)$$

还可由式 (2.11) 求出各点应力。

### 三、边值问题的求解

为求解边值问题 (2.6) 和 (2.9), 将  $w$ ,  $\psi$  和  $q$  都展开成为双重 Fourier 级数形式

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \psi &= \frac{\bar{N}_x}{2} y^2 + \frac{\bar{N}_y}{2} x^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ q &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b, c)$$

其中

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.2)$$

显然, 式 (3.1a, b) 已满足边界条件 (2.9a, b, c). 将其代入方程 (2.6b), 同时方程两边同乘以  $\cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b}$  并对  $x$  从 0 到  $a$ ,  $y$  从 0 到  $b$  积分, 得到

$$\psi_{ij} = a_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{ij} e^{klrs} w_{kl} w_{rs} \quad (3.3)$$

其中  $i, j$  不同时为零, 且

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{4a^2b^2} \left[ i^4 \frac{A_{12}^*}{a^4} + i^2 j^2 \frac{(2A_{12}^* + A_{66}^*)}{a^2 b^2} + j^4 \frac{A_{11}^*}{b^4} \right]^{-1} \\ e^{ij} e^{klrs} &= klrs [\delta_{i, (k+r)} + \delta_{i, |k-r|}] [\delta_{j, (l+s)} + \delta_{j, |l-s|}] \\ &\quad - \frac{1}{2} (k^2 s^2 + l^2 r^2) [\delta_{i, (k+r)} - \delta_{i, |k-r|}] [\delta_{j, (l+s)} - \delta_{j, |l-s|}] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$\delta_{i, j}$  为 Kronecker 记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=j \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j \text{ 时}) \end{cases} \quad (3.5)$$

再将式 (3.1a, b) 代入式 (2.9d, e), 利用式 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\left. \begin{aligned} aA_{11}^* N_x + aA_{12}^* N_y - \frac{\pi^2}{8a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 w_{mn}^2 &= \delta_x \\ bA_{12}^* N_x + bA_{22}^* N_y - \frac{\pi^2}{8b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 w_{mn}^2 &= \delta_y \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

或

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{1}{A_{12}^* - A_{11}^* A_{22}^*} \left[ A_{12}^* \frac{\delta_y}{b} - A_{22}^* \frac{\delta_x}{a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^2}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{22}^* \frac{m^2}{a^2} - A_{12}^* \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn}^2 \right] \\ N_y &= \frac{1}{A_{12}^* - A_{11}^* A_{22}^*} \left[ A_{12}^* \frac{\delta_x}{a} - A_{11}^* \frac{\delta_y}{b} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{12}^* \frac{m^2}{a^2} - A_{11}^* \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn}^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

最后, 将 (3.1a), (3.1b) 和 (3.1c) 代入方程 (2.6a), 同时两边同乘以  $\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ , 并对  $x, y$  分别从 0 到  $a$  和从 0 到  $b$  积分, 可得

$$b_{ij} w_{ij} + \pi^2 \left( i^2 \frac{N_x}{a^2} + j^2 \frac{N_y}{b^2} \right) w_{ij}$$

$$+ \frac{\pi^4}{2a^2b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f_{klrs}^{ij} w_{klrs} \psi_{rs} = q_{ij} \quad (3.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= \pi^4 \left[ i^4 \frac{D_{11}}{a^4} + 2i^2j^2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{a^2b^2} + j^4 \frac{D_{22}}{b^4} \right] \\ f_{klrs}^{ij} &= klrs [\delta_{i, (k+r)} + \delta_{i, (r-k)} - \delta_{i, (k-r)}] \\ &\quad \cdot [\delta_{j, (l+s)} + \delta_{j, (s-l)} - \delta_{j, (l-s)}] - \frac{1}{2} (k^2s^2 + l^2r^2) \\ &\quad \cdot [\delta_{i, (k+r)} + \delta_{i, (k-r)} - \delta_{i, (r-k)}] \\ &\quad \cdot [\delta_{j, (l+s)} + \delta_{j, (l-s)} - \delta_{j, (s-l)}] \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

至此, 我们已将一组边值问题 (2.6), (2.8) 及 (2.9) 转化为一组非线性代数方程 (3.3), (3.7) 和 (3.8)。对于给定的  $q(x, y)$ , 截取 (3.1a, b) 中级数的前有限项, 并将与之相应的式 (3.3) 和 (3.7) 代入方程 (3.8), 便得到关于  $w_{ij}$  的三次方程组, 方程的个数与未知数  $w_{ij}$  的个数相等。求得这些方程的数值解, 即能由式 (3.3) 算出系数  $\psi_{ij}$ , 进而得到所有与板的应力和应变有关的数据。所得解的精确性, 可通过引入计算的系数  $w_{ij}$  数目逐步增加时所得数值结果的变化情况来判断。

#### 四、算 例

例1 正弦分布载荷作用下边缘载荷为零的正交层合矩形板的大挠度特征

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.1)$$

取式 (3.1a) 级数的首项, 则由式 (3.2), (3.3) 和 (3.8), 可得  $q_0$  与板中心挠度  $w_m$  近似关系为

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{D_{11}b^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})a^2b^2 + D_{22}a^4}{a^4b^4} \pi^4 w_m \\ &\quad + \frac{a^4 A_{11}^* + b^4 A_{22}^*}{16a^4b^4 A_{11}^* A_{22}^*} \pi^4 w_m^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

以玻璃纤维/环氧复合材料层合正方形板为例, 设其特征常数为:

$$\begin{aligned} a &= b = 15.24 \text{ cm}, \quad h = 0.2438 \text{ cm} \\ A_{11} &= A_{22} = 3.321 \times 10^4 \text{ kgf/cm} \quad (32.55 \times 10^9 \text{ N/m}) \\ A_{12} &= 0.8036 \times 10^4 \text{ kgf/cm} \quad (7.875 \times 10^9 \text{ N/m}) \\ A_{66} &= 0.5357 \times 10^4 \text{ kgf/cm} \quad (5.25 \times 10^9 \text{ N/m}) \\ D_{11} &= D_{22} = 1.630 \times 10^2 \text{ kgf-cm} \quad (15.98 \text{ N-m}) \\ D_{12} &= 0.3908 \times 10^2 \text{ kgf-cm} \quad (3.830 \text{ N-m}) \\ D_{66} &= 0.2594 \times 10^2 \text{ kgf-cm} \quad (2.542 \text{ N-m}) \end{aligned}$$

则由式 (4.2) 可以给出板的无量纲载荷-中心挠度关系曲线, 如图2所示。

例2 均布载荷作用下, 相对位移  $\delta_x$  和  $\delta_y$  为零的层合矩形板的大挠度特征

仍取级数(3.1a)的首项,由式(3.3), (3.7)和(3.8),即得板的载荷-中心挠度关系为

$$q = \frac{D_{11}b^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})a^2b^2 + D_{12}a^4}{16a^4b^4} \pi^8 w_m + \frac{4a^2b^2 A_{11}^* A_{12}^* A_{22}^* + (a^4 A_{11}^* + b^4 A_{22}^*)(A_{12}^* - 3A_{11}^* A_{22}^*)}{256a^4b^4 A_{11}^* A_{22}^* (A_{12}^* - A_{11}^* A_{22}^*)} \pi^8 w_m^3 \quad (4.3)$$

我们考虑碳纤维/环氧复合材料层合板,其弹性常数为:

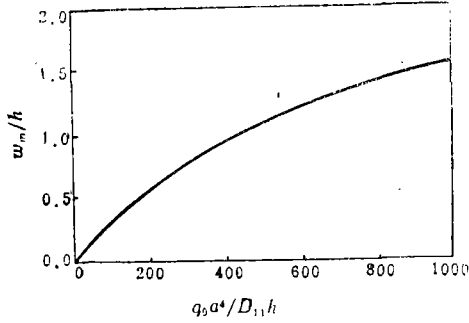


图2 正弦载荷作用下简支层合正方形板的载荷与中心挠度关系曲线

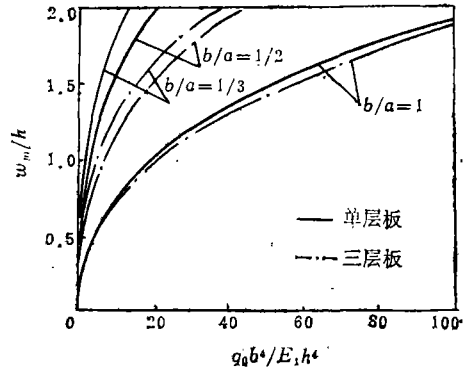


图3 均布载荷作用下简支层合矩形板的载荷与中心挠度关系曲线

$$E_1 = 14.08 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (138.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2)$$

$$E_2 = E_3 = 1.479 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (14.49 \times 10^9 \text{ N/m}^2)$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{31} = 0.5985 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (5.865 \times 10^9 \text{ N/m}^2)$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.21$$

对照式(2.1)确定 $C_{ij}^{(2)}$ 后,通过数值计算,我们得到单层和三层 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 层合板的无量纲载荷-中心挠度曲线(图3)。虽然只取了 $w$ 展开式的首项,但本文结果几乎与文献[12]完全一样,而且本文公式更为简单。

### 参 考 文 献

- [1] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат, Москва (1947). 中译本,列赫尼茨基,《各向异性板》,科学出版社,北京(1963)。
- [2] Stavsky, Y., On the general theory of heterogeneous aeolotropic plates, *Aeronaut. Q.*, 15 (1964), 29.
- [3] Whitney, J. M. and A. W. Leissa, Analysis of heterogeneous anisotropic plates, *ASME J. Appl. Mech.*, 36 (1969), 261.
- [4] Turvey, G. J. and W. H. Wittrick, The large deflection and postbuckling behaviour of some laminated plates, *Aeronaut. Q.*, 24 (1973), 77.
- [5] Chia, C. Y., Large deflections of heterogeneous anisotropic rectangular plates, *Int. J. Solids Struct.*, 10 (1974), 965.
- [6] Chia, C. Y. and M. K. Prabhakara, Large deflection of unsymmetric cross-ply and angle-ply plates, *J. Mech. Eng. Sci.*, 18 (1976), 179.
- [7] Zaghoul, S. A. and J. B. Kennedy, Nonlinear behaviour of symmetrically laminated plates, *ASME J. Appl. Mech.*, 42 (1975), 234.
- [8] Prabhakara, M. K. and C. Y. Chia, Finite deflections of unsymmetrically lay-

- ered anisotropic rectangular plates subjected to the combined action of transverse and inplane loads, *ASME J. Appl. Mech.*, **42** (1975), 517.
- [9] Prabhakara, M. K. and C. Y. Chia, Nonlinear analysis of laminated cross-ply plates, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, 103EM4 (1977), 749.
- [10] Prabhakara, M. K., Finite deflections of unsymmetric angle-ply anisotropic rectangular plates under edge moments, *ASME J. Appl. Mech.*, **44** (1977), 171.
- [11] Chandra, R., Nonlinear bending of antisymmetric angle-ply laminated plates, *Fib. Sci. and Tech.*, **10** (1977), 123.
- [12] 周次青, 对称正交铺设矩形叠层板的非线性弯曲, 应用数学和力学, **6**, 9 (1985), 819.
- [13] 周次青, 不对称的各向异性叠层矩形板的非线性弯曲 (I), 应用数学和力学, **7**, 11 (1986), 1003.
- [14] 周次青, 对称铺设各向异性叠层矩形板的非线性弯曲, 应用数学和力学, **9**, 3 (1988), 267.
- [15] Chia, C. Y., Nonlinear bending of unsymmetric angle-ply plates with edges elastically restrained against rotation, *Acta Mech.*, **53** (1984), 201.
- [16] Chia, C. Y., Large deflection of unsymmetric laminates with mixed boundary conditions, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **20** (1985), 273.
- [17] Chia, C. Y., *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill, New York (1980).

## Nonlinear Bending of Simply Supported Symmetric Laminated Cross-Ply Rectangular Plates

Liu Ren-huai                      He Ling-hui

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

### Abstract

Based on the von Kármán-type theory of plates, nonlinear bending problems of simply supported symmetric laminated cross-ply rectangular plates under the combined action of pressure and inplane load are investigated in this paper. The solution which satisfies the governing equations and boundary conditions is obtained by using the double Fourier series method.

**Key words** laminated rectangular plate, nonlinear bending, governing equation