

# 用分区函数加权残数法求解带有 边梁的薄板问题\*

孙宗光

(大连工学院, 1986年6月20日收到)

## 摘 要

本文根据文献[1]提出的加权残数法中的分区函数的概念, 将其应用于求解带有边梁的薄板问题, 并将同一问题采用了有限单元方法<sup>[2]</sup>进行了计算. 比较两者结果表明, 在加权残数法中应用分区函数法是有较强的实用性和有效性.

## 一、方法概述

分区函数法在加权残数法中的应用, 可详见文献[1]. 这里仅简要说明如下:

设某一固体力学问题, 其控制方程及边界条件如下:

$$T(\phi) - f = 0 \quad (x \in V), \quad G(\phi) - g = 0 \quad (x \in B)$$

其中  $T, G$  是某种算子.  $\phi$  是向量  $x$  的未知函数.  $f, g$  为不含  $\phi$  的已知函数.  $V$  是问题的区域,  $B$  为  $V$  的边界.

欲用加权残数法求解这类问题, 要在  $V$  内设出试函数, 但是由于求解区域的性质一般说来是较复杂的, 要对整个区域设出较合适的试函数, 往往是很难的. 为此可以将区域  $V$  根据不同部分的特点, 划分为  $n$  个子区域, 即:  $V_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$ ;

同时边界  $B$  也相应地被划分为  $m$  个子边界:  $B_j \quad (j=1, 2, \dots, m)$ ;

分别在各子区域内设出试函数:  $\bar{\phi}_i = \omega_i(c, x) \quad (x \in V_i, i=1, 2, \dots, n)$

则所有的试函数应该满足下列条件: 相应子域上的控制方程, 相邻子域之间的交线  $s_k$  上各力学量的连续方程, 以及各子边界上的边界条件方程. 将  $\bar{\phi}_i = \omega_i(c, x)$  分别代入上述相应方程中, 得到下列三组残数:

$$R_{i1}(c, x) = T(\omega_i) - f, \quad (x \in V_i, i=1, \dots, n)$$

$$R_{Bj}(c, x) = G(\omega_j) - g, \quad (x \in B_j, j=1, \dots, m)$$

$$R_{s_k}(c, x) = F_r(\omega_r) - F_{r+1}(\omega_{r+1}) \quad (x \in s_k, k=1, \dots, l)$$

其中  $l$  是各子区域之间的交线上要求连续的力学量的总个数.

对这样一组残数方程, 可以应用各种方法消除余量. 由此求出试函数中的待定常数, 于是便求得了问题的一个近似解.

区域的划分, 往往是根据其几何形状, 物理性质, 外力作用方式等因素进行, 以便有针对性地设出较合理的试函. 这些因素不同, 有时会导致各区域上的控制方程都不相同, 在这种情况下, 用加权残数法求解这类问题时, 采用分区函数法的概念, 具有鲜明的优越性.

\* 钱伟长推荐. 本文写作过程中, 得到钱国桢工程师的指导, 谨致谢意.

本文所求解的实例是一个带有边梁的薄板，分成两个区，分别设试函数为一元和二元多项式，忽略梁的扭转变形。采用最小二乘配点法。采用的方法和步骤并不限于具体问题。

## 二、应用实例

如图所示，一个三边简支，一边带有边梁的矩形薄板，板上作用均布面载荷 $q_0(\text{tf/m}^2)$ 梁上作用均布线载荷 $q_0(\text{tf/m})$ ，板厚 $t$ ，宽 $b$ ，长 $a$ ，梁截面 $B \times H$ ，二者弹性常数相同， $E$ ， $\mu$ 。分成两个区，考虑到对称性，设 I 区（梁）和 II 区（板）的试函数分别为：

$$W_{\text{I}} = c_1 + c_2 \cdot y^2 + c_3 y^4 + c_4 y^6$$

$$W_{\text{II}} = c_5 + c_6 x^2 + c_7 \cdot y^2 + c_8 x^2 y^2 + c_9 x^4 + c_{10} y^4 + c_{11} x^4 y^4 + c_{12} x^6 + c_{13} y^6$$

这里取 $c_1, \dots, c_{13}$  13个待定常数。

对于所划分的区域，有

(1) 控制方程：

$$\text{I 区: } EJ \frac{d^4 W_{\text{I}}}{dy^4} - q_0 = 0$$

$$\text{II 区: } D \nabla^4 W_{\text{II}} - q_0 = 0$$

(2) 交线上位移连续条件

$$W_{\text{I}} - W_{\text{II}} = 0$$

(3) 上、下边的位移边界条件：

$$W_{\text{I}} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad W_{\text{II}} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0$$

(4) 右边边界条件： $W_{\text{II}} \Big|_{x=a} = 0$

(5) 上、下边及右边的力的边界条件：

$$\frac{d^2 W_{\text{I}}}{dy^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{\text{II}}}{\partial x^2} \Big|_{x=a} + \mu \frac{\partial^2 W_{\text{II}}}{\partial y^2} \Big|_{x=a} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_{\text{II}}}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} + \mu \cdot \frac{\partial^2 W_{\text{II}}}{\partial x^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0$$

将所设的 $W_{\text{I}}$ ， $W_{\text{II}}$ 代入上述条件，由于近似性，于是得到下列九个残数方程：

$$R_1 = 24c_3 + 360c_4 y^2 - q_0/EJ$$

$$R_2 = 24 \cdot c_6 + 24 \cdot c_{10} + (24x^4 + 24y^4 + 288x^2 y^2)c_{11} + 360x^2 c_{12} + 360y^2 \cdot c_{13} - q_0/D$$

$$R_3 = -c_1 - y^2 c_2 - y^4 \cdot c_3 - y^6 c_4 + c_5 + x^2 \cdot c_6 + y^2 \cdot c_7 + x^2 y^2 c_8 + x^4 c_9 + y^4 c_{10} + y^4 \cdot x^4 c_{11} + x^6 c_{12} + y^6 c_{13}$$

$$R_4 = c_1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 c_2 + \left(\frac{b}{2}\right)^4 c_3 + \left(\frac{b}{2}\right)^6 \cdot c_4$$

$$R_5 = c_5 + x^2 c_6 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 c_7 + x^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 c_8 + x^4 c_9 + \left(\frac{b}{2}\right)^4 \cdot c_{10}$$

$$+ \left(\frac{b}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot c_{11} + x^6 c_{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^6 \cdot c_{13}$$

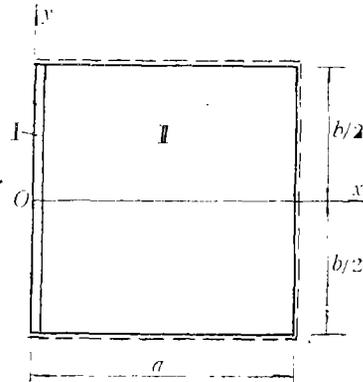


图 1

$$R_6 = c_6 + c_6 a^2 + y^2 \cdot c_7 + a^2 y^2 c_8 + a^4 c_9 + y^4 c_{10} + a^4 y^4 \cdot c_{11} + a^5 c_{12} + y^5 c_{13}$$

$$R_7 = 2c_2 + 12 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot c_3 + 30 \left(\frac{b}{2}\right)^4 \cdot c_4$$

$$R_8 = 2 \cdot c_7 + 2 \cdot x^2 c_8 + 12 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 c_{10} + 12 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot x^4 \cdot c_{11}$$

$$+ 30 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^4 c_{13} + \mu \left( 2 \cdot c_6 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot c_8 + 12 x^2 c_9 \right)$$

$$+ 12 c_{11} \left(\frac{b}{2}\right)^4 \cdot x^2 + 30 x^4 c_{12}$$

$$R_9 = 2c_6 + 2c_8 y^2 + 12a^2 \cdot c_9 + 12a^2 y^4 c_{11} + 30a^4 c_{12} + \mu(2 \cdot c_7 + 2a^2 c_8 + 12y^2 c_{10} + 12a^2 y^2 c_{11} + 30c_{13} y^4)$$

设  $t=0.15\text{m}$ ,  $E=3 \times 10^9 \text{tf/m}^2$ ,  $\mu=0.1667$ ,  $a=b=3.0\text{m}$ ,  $q_b=100\text{tf/m}$ ,  
 $q_0=100\text{tf/m}^2$ ,  $B=0.2\text{m}$ ,  $H=0.3\text{m}$

则  $EJ=1.35 \times 10^8 \text{tf/m}^2$ ,  $D=867.67\text{tf/m}^2$  ( $1\text{tf}=9.8\text{kN}$ )

采用最小二乘配点法, 取100个配点, 于是可以得到下列形式的100个方程:

$$\{R\}_{100 \times 1} = [A]_{100 \times 13} \cdot \{C\}_{13 \times 1} - \{F_1\}_{13 \times 1}$$

其中  $[A]$  是待定常数向量  $\{C\}$  的系数矩阵,  $\{F_1\}$  是常数列向量。

由最小二乘法, 记  $I = \{R\}^T \{R\}$

令  $\partial I / \partial C_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, 13$ )

这是一个线性方程组, 整理后得:

$$[A]^T [A] \{C\} - [A]^T \{F_1\} = 0$$

记  $[K] = [A]^T [A]$ ,  $\{F\} = [A]^T \{F_1\}$ ,

则  $[K]$  是一正定对称阵。解方程组  $[K] \{C\} - \{F\} = 0$

得:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} -9.051578 \times 10^{-2} \\ 4.682090 \times 10^{-2} \\ -3.222401 \times 10^{-3} \\ 3.3171911 \times 10^{-6} \\ -9.342080 \times 10^{-2} \\ 8.1102190 \times 10^{-3} \\ 4.957390 \times 10^{-2} \\ -5.238784 \times 10^{-3} \\ 4.755822 \times 10^{-4} \\ -2.872623 \times 10^{-3} \\ 4.082073 \times 10^{-5} \\ -2.748574 \times 10^{-5} \\ -7.765380 \times 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

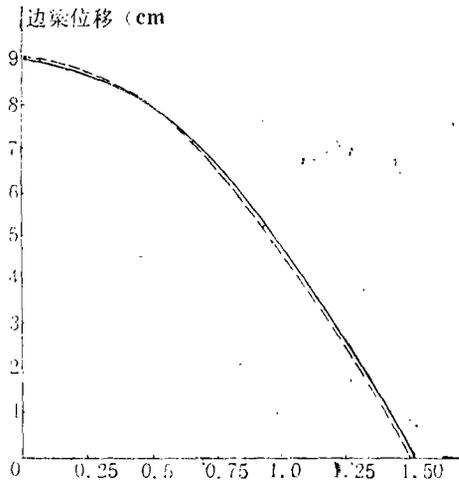
表1 梁上弯矩与有限元结果比较

$x$	本文解	有限元解	相对误差
0.0	128.42	128.76	1.5%
0.25	123.154	125.1	1.7%
0.50	113.374	115.5	1.7%
0.75	97.09	96.5	0.7%
1.00	74.34	71.4	4%

表2 板中弯矩  $M_x (y=0.08\text{m})$

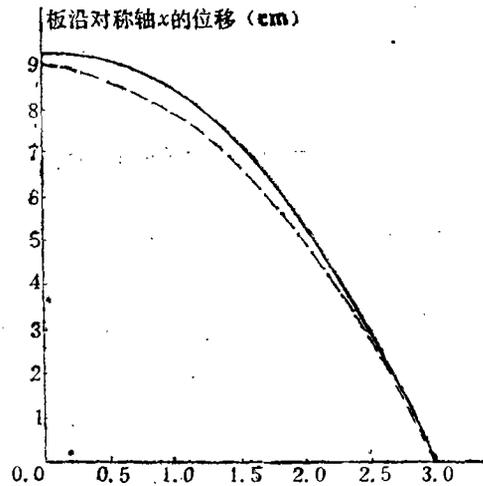
$x$	本文解	有限元解	相对误差
0.0	88.12	82.38	6.6%
0.58	85.38	80.02	6.2%
1.08	78.37	74.00	5.1%
1.58	66.81	64.00	4.2%
2.08	50.23	47.70	5.0%
2.58	27.9	24.5	12.8%

由此求得的梁中位移及板  $x$  轴上的位移与相应的有限元结果示于图2和图3中。梁中弯矩及板沿  $y=0.08$  直线上弯矩值及相应有限元结果分别列于表1, 表2。



虚线——有限元结果, 实线——本文结果

图2 上半部分梁的位移



虚线——有限元结果, 实线——本文结果

图3 板对称轴上的位移

本文已将各余量间的调整系数(见文[1])均取为1, 这样存在着各余量之间量级的差异。尤其是边界上的位移。计算过程表明, 计算结果对边界上所配点数不敏感, 所以在边界上位移存在着稍大一些的误差, 这是板中位移较有限元结果偏大的主要原因。因此如果对位移边界条件余量加以适当的调整因数, 其计算结果将会得到进一步改善。在给定精度下, 配点数可以相对减少。

### 参 考 文 献

- [1] 钱国桢, 分区函数法在加权残数法中的应用, 应用数学和力学, 7, 2 (1986).
- [2] 徐文焕、陈虬, 《加权余量法在结构分析中的应用》, 中国铁道出版社。
- [3] 大连工学院工程力学所, DDJ-W 多单元多工况结构分析程序及其使用说明。

## Application of Subregion Function Method for Solving Beam-Board Structure

Sun Zong-guang

(Dalian Institute of Technology, Dalian)

### Abstract

In this paper, the solution to the structure consisting of a beam and a board is given as a result of the application of the subregion function method which was suggested in ref. [1]. The same problem is also computed with finite element method. The comparison between the two results shows that the application of the subregion function in the method of weighted residuals is practical and effective, especially for solving compound structures.