

任意形状孔口双边裂纹平板的 应力强度因子计算

王元汉

(华中理工大学力学系, 1988年11月10日收到)

摘 要

本文采用Muskhelishvili弹性力学的复变函数和边界配位方法对不同形状孔口双边裂纹问题进行了研究, 计算了圆孔、椭圆孔、矩形孔、菱形孔等不同形状孔口双边裂纹, 以及I型和复合型等不同类型断裂试件的应力强度因子. 本文方法简单方便, 精度较高, 与某些已有计算结果的问题比较, 本文方法所得的结果是令人满意的. 同时, 本方法可以应用于不同几何形状和加载条件下的孔口双边裂纹有限大板的计算, 是解这一类问题的一致有效方法.

一、引 言

在工程实际中, 不同形状孔口双边裂纹是经常遇到的. 计算这类问题的应力强度因子, 可以采用解析方法和数值方法两条途径. 在采用解析方法所研究的问题中, Bowie^[1]曾用保形变换的方法计算了圆孔双边裂纹平板; Nishitani^[2]采用体积力的方法分析了椭圆孔双边裂纹问题; Neal^[3]应用变换配点的方法计算了矩形孔口双边裂纹情形. 在以上分析中, 所讨论的都是无限大板, 并且仅限于研究I型断裂情形. 对于不同形状的孔口裂纹, 采用的方法也不相同. 在采用数值方法计算的例子中, Newman^[4]曾用边界配位方法研究过圆孔或椭圆孔双边裂纹问题的I型情形. 作为最广泛应用的一种数值方法, 有限元法虽然可以用来求解不同的孔边裂纹问题, 但由于几何形状的复杂和应力集中的存在, 计算时在这些区域要划分很细的网格, 从而使准备工作量和计算时间增加, 而计算精度往往并不理想.

本文在Newman工作的基础上, 将边界配位法推广应用于不同形状、不同类型的孔口双边裂纹问题. 本文所提出的应力函数, 计算公式及相应的计算程序可作为解决此类一系列问题的有效方法.

二、计 算 公 式

平面弹性力学的解可用复应力函数 $\phi(z)$ 和 $\omega(z)$ 来表示, 应力与位移分量与它们的关系

* 薛大为推荐.

可用以下公式计算^[6,9]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re}[\Phi(z)] \quad (2.1)$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (2.2)$$

$$2G(u + iv) = \kappa\phi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (2.3)$$

式中

$$\Phi(z) = \phi'(z), \quad \Omega(z) = \omega'(z) \quad (2.4)$$

由这些复应力函数进行应力分析, 平衡方程和相容方程将自动满足, 所需要考虑的只是边界条件, 对多连通物体而言还要考虑以下位移单值条件:

$$\kappa \oint \Phi(z) dz - \oint \Omega(\bar{z}) d\bar{z} = 0 \quad (2.5)$$

力的边界条件可以采用不同方式来表示.

用应力表示的边界条件为

$$\sigma_{xx}l_x + \tau_{xy}l_y = X_n, \quad \tau_{xy}l_x + \sigma_{yy}l_y = Y_n \quad (2.6)$$

式中 l_x, l_y 为边界的方向余弦, X_n, Y_n 为边界上外力的分量, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ 可由式(2.1)和(2.2)确定.

合力边界条件可表示为^[5]

$$\phi(z) + \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} = -f_y + if_x + C_j \quad (2.7)$$

式中 C_j 为每一边界围道上的常数, 合力分量 f_x 和 f_y 由下列积分式确定:

$$f_x + if_y = \int_{z_0j}^z (X_n + iY_n) ds \quad (2.8)$$

式中 z_0j 表示某一围道上的固定点, 积分路径选取区域在边界的左侧为正方向.

可以选取复应力函数为下列形式

$$\phi(z) = G(z)F_1(z) + F_2(z), \quad \omega(z) = G(z)F_1(z) - F_2(z) \quad (2.9)$$

其中

$$G(z) = \sqrt{z^2 - a^2}, \quad F_1(z) = \sum_{K=-N}^M E_K z^{2K-2}, \quad F_2(z) = \sum_{K=-N}^M F_K z^{2K-1} \quad (2.10)$$

式中待定系数 E_K, F_K 在 I 型问题中为实数, 在一般情形为复数, a 为坐标原点到裂纹尖端长度.

对于式(2.9)、(2.10)所给定的应力函数, 满足裂纹面应力为零的条件^[6], 因此对于裂纹面无外力作用的情形, 只需考虑孔边和外边界的边界条件. 如果裂纹面作用有外力, 只需在 $\phi(z)$ 和 $\omega(z)$ 表达式中加一附加项进行处理^[5,7].

由(2.9)、(2.10)两式, 可得

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{K=-N}^M E_K \frac{z^{2K-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[(2K-1) - (2K-2) \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right] \\ & + \sum_{K=-N}^M F_K (2K-1) z^{2K-2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

将函数 $\phi(z)$, $\omega(\bar{z})$ 和 $\Phi(z)$ 的表达式代入(2.7)式, 合力边界条件可写为下列形式:

$$\begin{aligned}
 -f_x + if_z &= \sum_{K=-N}^M E_K \left[\sqrt{z^2 - a^2} z^{2K-2} + \sqrt{\bar{z}^2 - a^2} \bar{z}^{2K-2} \right] \\
 &+ \sum_{K=-N}^M F_K (z^{2K-1} + \bar{z}^{2K-1}) \\
 &+ (z - \bar{z}) \operatorname{conjug} \left\{ \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{K=-N}^M E_K \left[(2K-1) \right. \right. \\
 &\left. \left. - (2K-2) \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right] z^{2K-1} + \sum_{K=-N}^M F(2K-1) z^{2K-2} \right\} - C_j
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

三、圆孔双边裂纹问题

如图1所示, 一含圆孔双边裂纹的有限大板受拉伸载荷作用。由于平板的应力分布具有以裂纹线中点为中心, 角度为 π 的周期性, 所以只需考虑一半平板, 同时位移单值条件也不需考虑^[6]。当角度 $\alpha=0$ 时, 问题简化为I型问题。对于一般复合型情形, 圆孔及外边界上配点如图2所示。

在圆孔边界, 外力合力分量为零。在外边界, 如果

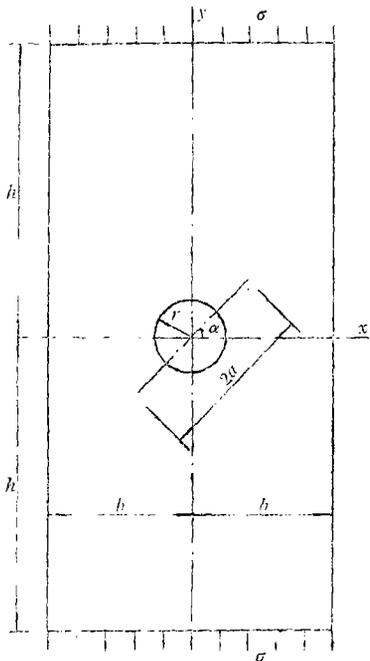


图1 圆孔双边裂纹有限大板

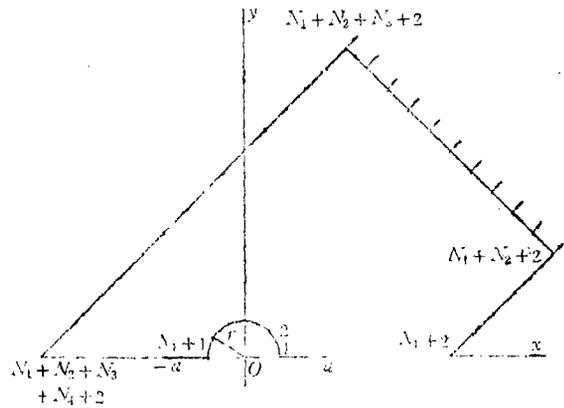


图2 圆孔双边裂纹平板的边界配点

坐标系如图1选取, 则 f_x 等于零, f_y 如图3所示。如果采用图2所示的坐标系, 合力分量 f_x 和 f_y 容易由图3所示的 f_y 分解而得。

由(2.12)式, 每个边界配置点可得两个实系数方程。未知数为 E_K , F_K 和 C_j 。其中 C_j 可由每个边界上的方程对应相减而消去。为了得到更好的效果, 通常在边界上选取较多的点, 使方程的数目大于未知数的数目, 再用最小二乘法求解。

当系数 E_K , F_K 确定以后, 应力函数 $\phi(z)$, $\omega(z)$ 及 $\Phi(z)$ 可由(2.9)~(2.11)~式确定,

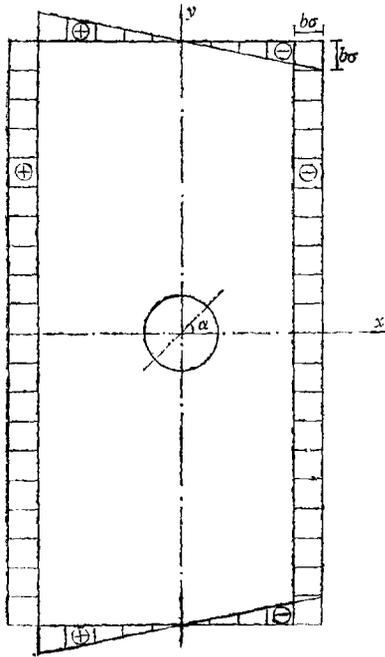


图3 对应图1坐标系的合应力分量 f

进一步考虑复合型情形, 令图1中的 α 从 0° 变化到 90° , 其他计算数据同I型情形. 计算结果用图4和图5表示.

由计算结果可知, 当 $\alpha=0^\circ$ 时, K_I 值最大. 随着角度 α 的增加, K_I 逐渐减小. 当 $\alpha=45^\circ$ 时, K_I 取最大值. 对应于角度 α 和 $(90^\circ-\alpha)$ 的情形, 所计算的 K_I 值基本一致, 只是当 a/b 比值较大时, 它们之间才有一定的差别.

应力强度因子可由下式进行计算^[8]

$$K_I - iK_{II} = \lim_{z \rightarrow a} 2\sqrt{2\pi(z-a)} \Phi(z) \quad (3.1)$$

令 $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$, 则由(2.11)、(3.1)式, 有

$$\frac{K_I}{K_0} - i\frac{K_{II}}{K_0} = \sum_{k=-N}^M 2E_k a^{2k-2} / \sigma \quad (3.2)$$

为了和已有的计算结果进行对比, 首先考察I型断裂问题, 在图1中令 $\alpha=0^\circ$, 有关计算数据为:

平板半长: $h=2$, 平板半宽: $b=1$, 圆孔半径: $r=0.25$, 正幂次级数项数: $M=18$, 负幂次级数项数: $N=10$, 圆孔边界配点数: $N_1=36$, 外边界配点数: $N_2=N_3=N_4=20$.

对于不同的有效裂纹尺寸与平板宽度之比 a/b , 由(3.2)式计算所得的应力强度因子 K_I/K_0 之值与Bowie及Newman的计算结果进行对比并列于表1 (在这I型问题中, $K_{II} \equiv 0$). 由表可见, 用本文方法所得结果与已有解答符合得很好, 说明采用本文方法进行计算具有良好的精度.

表1

圆孔双边裂纹I型问题的计算结果

a/b	0.27	0.3	0.35	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
本文方法	0.857	1.078	1.179	1.216	1.285	1.396	1.574	1.892	2.498
Bowie ^[1]	0.85	1.08	1.18	1.22	1.28	1.40	1.57	1.89	2.58
Newman ^[4]	0.851	1.078	1.178	1.216	1.285	1.397	1.580	1.904	2.625

四、椭圆孔双边裂纹问题

如图6所示, 一矩形平板含有两条椭圆孔边裂纹. 椭圆的两条轴长分别为 $2d$ 和 $2c$, 裂纹的长度为 a , 裂纹线与水平坐标轴成角度 α . 当 $\alpha=0^\circ$ 时, 简化为I型问题.

计算椭圆孔双边裂纹问题所采用的应力函数与计算方法与前节圆孔双边裂纹分析完全相同. 首先考虑I型情形. Nishitani^[2]曾用体积力的方法计算了无限大板含椭圆孔双边裂纹I型问题, 后来Newman^[4]用边界配位法进行了计算. 为了与他们的结果进行比较, 计算中取平板的几何尺寸远大于孔和裂纹的几何尺寸. 具体计算数据如下:

平板半长和半宽: $h=b=1$; 椭圆的水平轴半长: $d=0.01$; 椭圆的垂直轴半长:

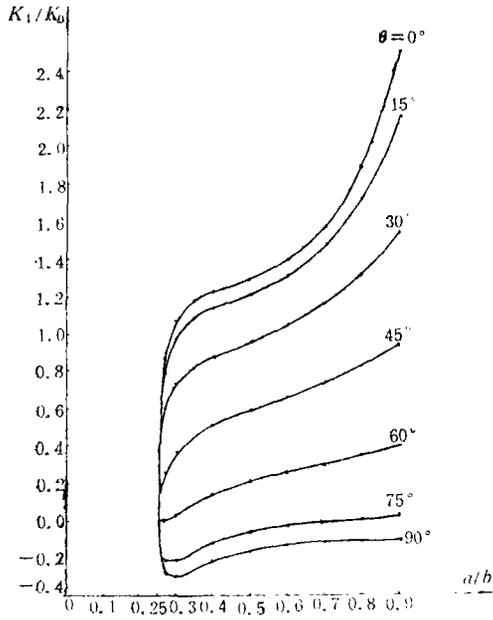


图4 圆孔双边裂纹复合型平板的 K_I 值

$$s = a / (a + d)$$

将应力强度因子 K_I 表示为

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F_I(s, c/d) \tag{4.2}$$

对应不同的裂纹长度和椭圆两轴的比值，按照边界配位法计算得到应力函数系数 E_K ， F_K 以后，应力强度因子可按(3.1)或(3.2)式进行计算。所得的应力强度因子系数 F_I 作为 s 和 c/d 的函数示于图7。

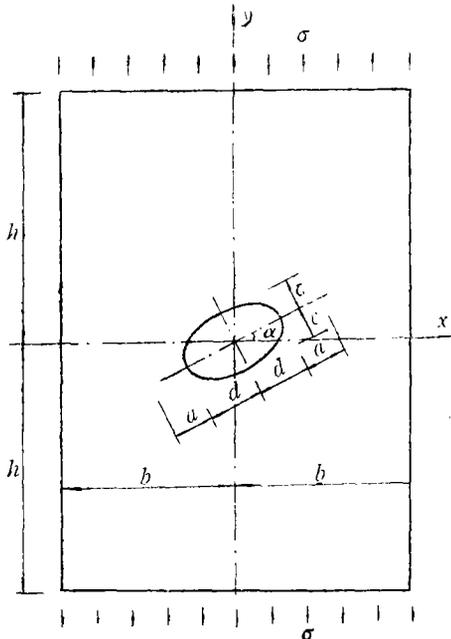


图6 椭圆孔双边裂纹有限大板

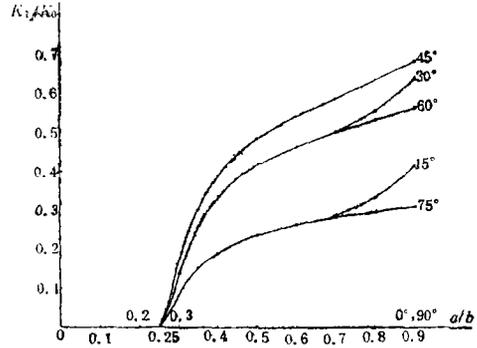


图5 椭圆孔双边裂纹复合型平板的 K_I 值

$c=0.0025, 0.005, 0.01, 0.02$; 椭圆孔边界的配点数: $N_1=59$; 平板外边界的配点数: $N_2=N_3=N_4=30$; 正幂次级数项数: $M=10$; 负幂次级数项数: $N=8$ 。

为了与文献[9]中根据 Nishitani 和 Newman 结果所绘图形进行对比，引入参数 s (4.1)

将图7与文献[9]中对应的图形进行比较，不同的计算途径所得的结果基本一致。同

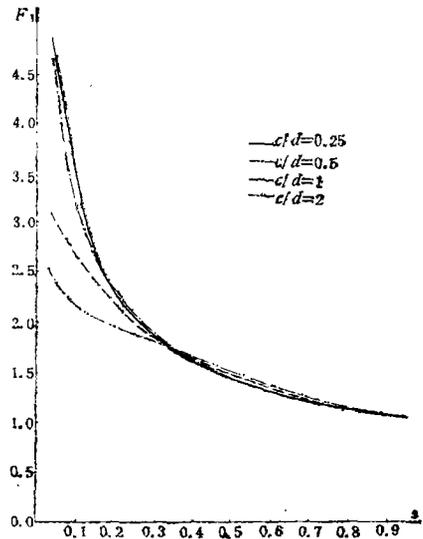


图7 椭圆孔双边裂纹 I 型问题的 F_I 值

时, 随着 s 的增加, 即裂纹长度相对椭圆几何尺寸较大时, 不同大小的椭圆两轴之比的计算结果落在一条狭窄的分散带内, 说明这时椭圆的形状对裂纹尖端的特征量——应力强度因子的数值影响甚小, 因而也可按中心裂纹板计算公式进行近似计算. 特别应该指出的是, 当 $s \rightarrow 1$, 即当 d 与 a 相比可以忽略不计时, 不同 c/d 值对应的 F_I 曲线趋于 1, 这正是无限大板中心裂纹的结果.

图 8 和图 9 还画出复合型情形的计算结果. 具体计算数据同 I 型情形, 椭圆两轴之比为: $c/d=0.25$, 角度 α 分别取 15° , 30° , 45° , 60° 和 75° . 应力强度因子系数 $F_I(s, c/d, \alpha)$ 和 $F_{II}(s, c/d, \alpha)$ 由下式确定:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F_I(s, c/d, \alpha), \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} F_{II}(s, c/d, \alpha) \quad (4.3)$$

由图 8 可见, F_I 随着 α 的增加而减小. 图 9 表明 F_I 在 $\alpha=45^\circ$ 时取最大值, 对应 $\alpha=30^\circ$ 和 60° 或 15° 和 75° 两种情形的曲线互相重合, 还可进一步表明, 对应 α , $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$ 和 $180^\circ - \alpha$ 的 F_I 曲线也将相互重合. 这个结论与圆孔双边裂纹平板的计算结果一致.

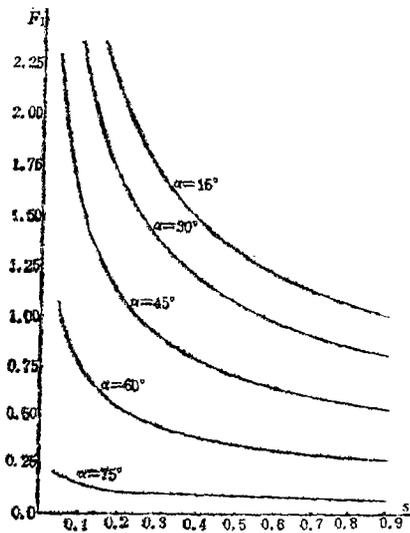


图 8 椭圆孔双边裂纹复合型问题的 F_I 值

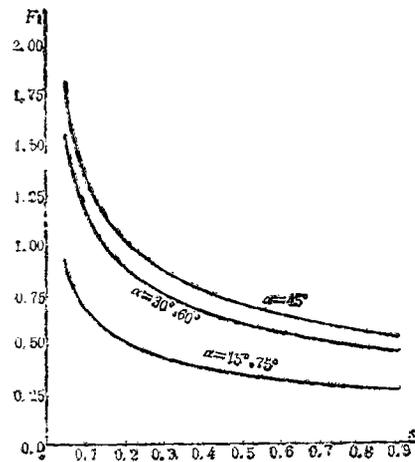


图 9 椭圆孔双边裂纹复合型问题的 F_I 值

五、矩形孔双边裂纹问题

如图 10 所示, 受拉伸的矩形平板含有两条矩形孔双边裂纹. 矩形孔边和外边界的配点分布如图 11 所示.

当 $\alpha=0^\circ$ 时, 问题简化为 I 型情形. 对于无限大板含矩形孔双边裂纹问题, Neal^[3] 曾经用变换配位法计算了应力强度因子. 但如 Tada^[9] 所指出的, 当裂纹较短 ($s < 0.25$) 时, Neal 所给出的结果太大. 为了得到较为符合实际的结果, Tada 给出了 $s < 0.25$ 时的应力强度因子的估计值.

为了改进矩形孔双边裂纹问题的精度, 特别是给出 s 较小时的计算结果, 并且讨论有限大板几何尺寸对应力强度因子的影响, 采用前述公式和方法对此问题进行了试算. 为了与无限大板 I 型问题的计算结果进行对比, 取平板几何尺寸远大于孔口和裂纹的几何尺寸. 具体计算数据如下:

平板半长和半宽: $h=b=1$; 矩形孔口宽度: $d=0.01$; 孔口高与宽度之比: $c/d=1/8$,

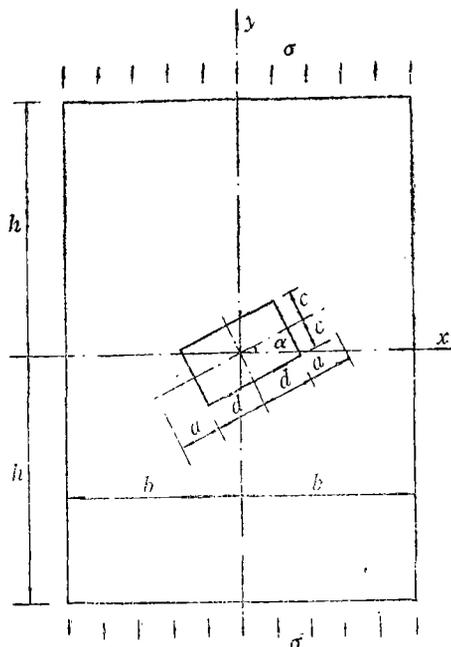


图10 矩形孔双边裂纹有限大板

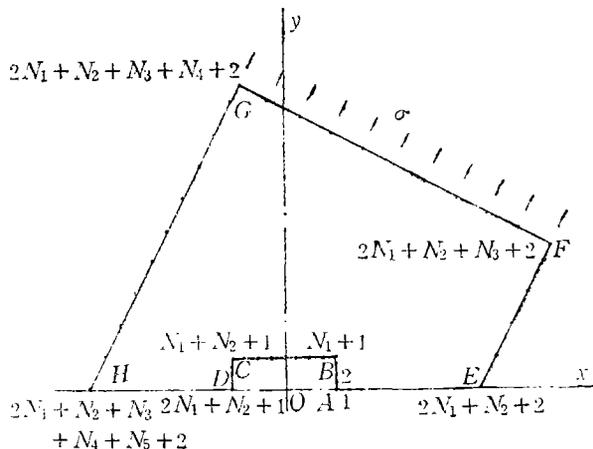


图11 矩形孔双边裂纹平板的边界配点

1/2, 1; 矩形孔口每边配点数: $N_1=N_2=30$; 平板外边界的配点数: $N_3=N_4=N_5=30$; 正幂次级数项数: $M=10$; 负幂次级数项数: $N=8$ 。

取(4.1)、(4.2)式所表示的 s 和 F_I 形式, 对应不同的裂纹长度和孔口形状, 所得的计算结果与Neal的结果一并列于图12。由图可见, 当 $s \geq 0.25$ 时, 两种方法所得的结果基本相符。当 $s < 0.25$ 时, 采用本文方法计算的结果远小于Neal的结果, 而与Tada的估计值接近。

由图12还可看出, 当 s 和 c/d 值都很小时, F_I 的变化不稳定。这是由于每边的裂纹尖端与矩形孔口的两个角点十分接近, 对于一个很小的区域来说存在三个应力集中点, 所以这一区域的应力变化十分复杂, 产生 F_I 的不稳定变化现象也就不奇怪了。

图13和图14表示复合型计算结果, 有关数据如 I 型情形, 孔口高、宽之比为 $c/d=1$, 即正方形孔口。随着角度 α 的变化, 应力强度因子系数 F_I 和 F_{II} 的变化规律同其他孔口双边裂纹问题一致。

六、菱形孔双边裂纹问题

由于孔口角点附近的应力集中, 裂纹往往首先在这些区域产生和发展, 因此研究孔口角点产生的裂纹问题有实际的意义。由于数学上的困难, 这类问题还没有精确解或有效的数值解。采用本文方法可以同样研究方形或菱形孔双边裂纹问题。

如图15所示, 当 $\alpha=0^\circ$ 时, 问题简化为 I 型情形, 当 $\beta=45^\circ$ 时, 这是正方形孔口。这里仅讨论 $\beta=45^\circ$ 和 22.5° 两种情形。其他计算数据与上节矩形孔口双边裂纹问题相同。

当 $\beta=0^\circ$ 时, 孔口和双边裂纹成为一条中心裂纹, 这是一种极限情形。按本文方法所计算的两种菱形孔双边裂纹问题与中心裂纹问题的计算结果一并示于图16。由图可见, 角度 β 的大小对 F_I 值的影响不大, 原因在于孔口两边角点不再形成应力集中, 对裂纹尖端附近的应力分布没有大的影响。因而在 I 型问题中, 可以将菱形孔看作一段裂纹, 按中心裂纹结果

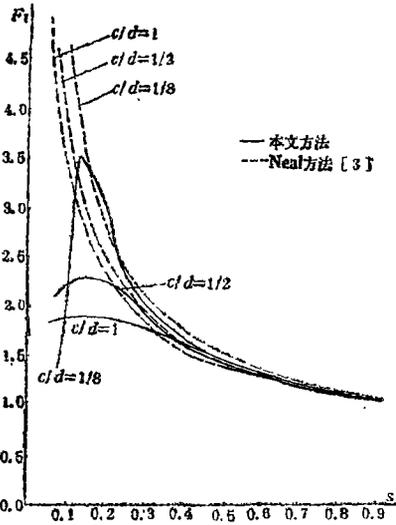


图12 矩形孔双边裂纹 I 型问题的 F_I 值

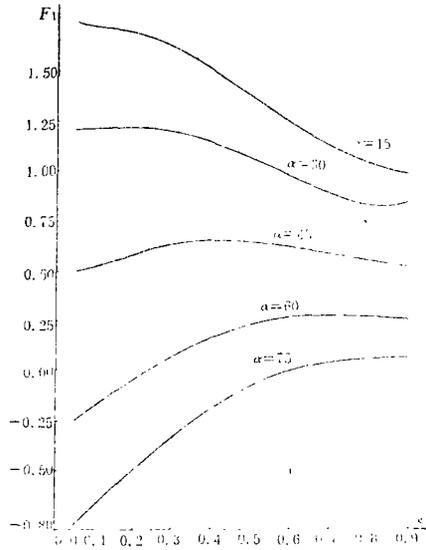


图13 矩形孔双边裂纹复合型问题的 F_I 值

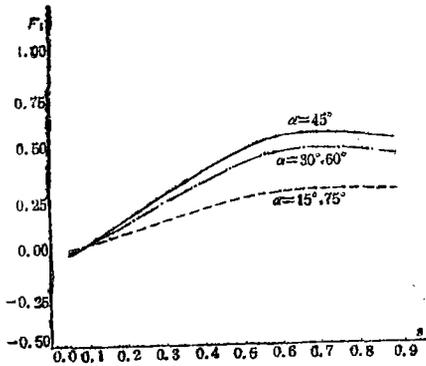


图14 矩形孔双边裂纹复合型问题的 F_I 值

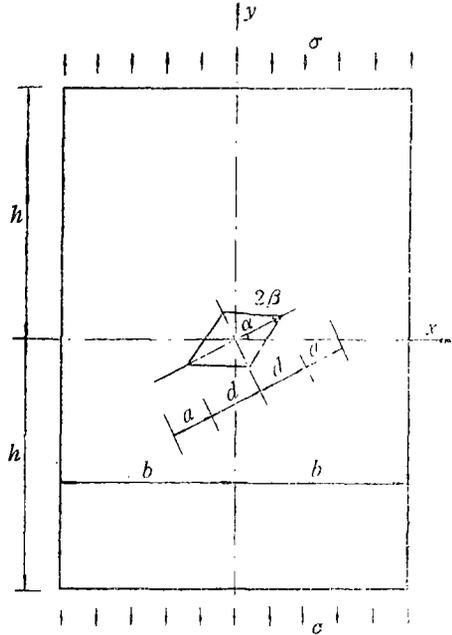


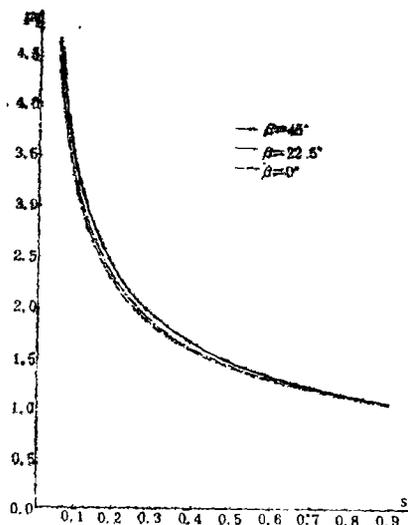
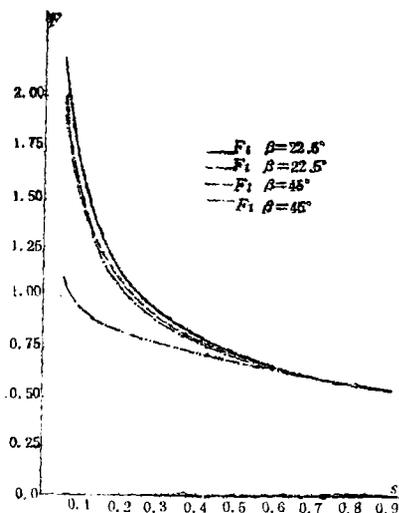
图15 菱形孔双边裂纹有限大板

处理这类问题。

图17所示为 $\alpha=45^\circ$ 时的复合型计算结果。由图可见，仅当 s 较大时，不同 β 值的计算结果基本一致，这与其他形状孔口计算结果所得结论一致。但当 s 较小时，不同 β 值的应力强度因子系数有较大的区别，特别是 F_I ，相差较大。因此，在复合型情形，不能简单地将菱形孔作为一段裂纹进行处理。

七、结 论

本文采用平面弹性力学的复变函数理论，导出了用边界配位法计算各种孔口双边裂纹问

图16 菱形孔双边裂纹 I 型问题的 F_I 值图17 菱形孔双边裂纹混合型问题的 F_I 、 F_{II} 值

题的应力函数和计算公式，给出了圆孔、椭圆孔、矩形孔、菱形孔双边裂纹 I 型和复合型的计算结果，绘制了相应的力强度因子系数的图表，对工程实际有一定的参考价值。本文方法简单实用，计算结果具有较好的精度，可用以计算更为复杂的几何形状和加载条件的孔口双边裂纹问题。

本文是作者在香港大学学习期间完成的，张佑敦教授、胡振威博士给予了具体指导和帮助，特此致谢！

参 考 文 献

- [1] Bowie, O. L., Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an infinite circular hole, *Journal of Mathematics and Physics*, 35 (1956), 60—71.
- [2] Nishitani, M. and M. Isida, Stress intensity factor for the tension of an infinite plate containing an elliptical hole with two symmetrical edge cracks, *Transactions of the Japanese Society for Mechanical Engineers*, 212 (1969).
- [3] Neal, D. M., Stress intensity factors, for cracks emanating from rectangular cutouts, *International Journal of Fracture Mechanics*, 6 (1970), 393—400.
- [4] Newman, J. C., An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries, NASA TN D-6376 (1971).
- [5] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Second English ed., Noordhoff (1975).
- [6] Chen Yi-zhou and Chen Yi-heng, A mixed boundary problem for a finite internally cracked plate, *Engineering Fracture Mechanics*, 14 (1981), 741—751.
- [7] Wilson, W. K., Numerical method for determining stress intensity factors of an interior crack in a finite plate, *ASME Journal of Basic Engineering*, 93 (1971), 685—690.
- [8] Kanninen, M. F. and C. H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford (1985).

- [9] Tada, H., P. C. Paris and G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, Pennsylvania (1973).

Stress Intensity Factors of a Plate with Two Cracks Emanating from an Arbitrary Hole

Wang Yuan-han

*(Department of Mechanics, Huazhong University of
Science and Technology, Wuhan)*

Abstract

In this paper, Muskhelishvili complex function theory and boundary collocation method are used to calculate the stress intensity factors (SIF) of a plate with two cracks emanating from an arbitrary hole. The calculated examples include a circular, elliptical, rectangular, or rhombic hole in a plate. The principle and procedure by the method is not only rather simple, but also has good accuracy. The SIF values calculated compare very favorably with the existing solutions. At the same time, the method can be used for different finite plate with two cracks emanating from a hole with more complex geometrical and loading conditions. It is an effective unified approach for this kind of fracture problems.