应用数学和力学，第11卷第8期（1990年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

离散大系统非线性比较方程的稳定性*

舒 煌

（西南交通大学，1989年6月3日收到）

摘 要

用矢量李雅普诺夫函数解决大系统的稳定性问题必须要判断矢量比较方程的稳定性．对离散系统，过去只研究过线性驻定比较方程的稳定性．本文全面建立了离散非线性驻定比较方程的各种稳定性判别准则，其中渐近稳定的准则既是充分也是必要的，并由此推得了一个用于C_1类函数的准则，两者均可用来判断离散非线性（驻定或非驻定）系统的非指数稳定以至全局非指数稳定．所有准则均具有简单的代数形式，便于应用．

一、引 言

用李雅普诺夫函数求解稳定性问题有两种方法，一种称为标量李雅普诺夫函数方法，一种称为矢量李雅普诺夫函数方法．一般说来，构造矢量形式的李雅普诺夫函数（即构造矢量比较方程）比构造标量形式的容易得多，对大系统尤其如此；但前者最后要判定矢量比较方程的稳定性．

矢量李雅普诺夫函数是 Матросов 和 Bellman 同时提出的．Bailey[1] 首先用它得出了大系统指数稳定判据．以后的工作多是研究指数稳定问题．舒仲周在解可以不满足唯一性的条件下，首先得到了时间连续的非线性比较方程渐近稳定的充要性准则[2]，并将[1]的结论发展为非指数稳定[3]．

离散比较原理和连续比较原理相对应，是冯恩波[4]建立的．但迄今只研究过线性比较方程的稳定性判据，对非线性系统一般只能得到小范围指数稳定的结论．本文从[2]的构想出发，得到了离散非线性驻定比较方程各种稳定性判别准则，其中渐近稳定准则可以判断原系统的非指数稳定以至全局非指数稳定．离散模型的研究具有很大价值，它不仅能用于连续系统，特别是能用于不连续系统．此外，因为离散模型是一个迭代方程，故其研究方法和连续模型有所不同[4~6]．

二、离散驻定比较方程的性质

记 J_+：所有非负整数集．R^m：m维实空间．$\underline{m}=\{1, \cdots, m\}$．$\Omega$：开集，原点$O\in\Omega\subset R^m$．

* 李骊推荐．
国家自然科学基金资助项目，1880359．

ω: 开集，$O\in\omega\subset\Omega$。$R_+^m=\{u\in R^m\mid u_i>0,\quad i\in\underline{m}\}$。$\Omega_+=\Omega\cap R_+^m$。$\omega_+=\omega\cap\Omega_+$。坐标面 $\Pi_i=\{u\in\partial\Omega_+\mid u_i=0\}$。$\Pi=\bigcup_{i=1}^m\Pi_i$。$\pi_i=\Pi_i\cap\partial\omega_+$。$\pi=\bigcup_{i=1}^m\pi_i$。

离散驻定比较方程的一般形式是

$$u'=Tu \quad 或 \quad u_i'=T_iu, \qquad i\in\underline{m} \tag{2.1}$$

上式表示 $u(n+1)=T(u(n))$，$\forall n\in J_+$。(2.1) 的$T(\cdot)$满足(i) $T\in C[\overline{\Omega}_+,\ R^m]$；(ii)$T(0)=0$；(iii) $T(\cdot)$是单调非减的，即

$$u\geqslant v\Rightarrow T_iu\geqslant T_iv, \qquad i\in\underline{m},\ u,v\in\overline{\Omega}_+ \tag{2.2}$$

记 $\dot{u}=u'-u$ 或 $\dot{u}_i=u_i'-u_i$，$i\in\underline{m}$，由(2.1)可得：

引理 1 设$u\in\Pi_i$，则$\dot{u}_i\geqslant 0$；$\overline{R}_+^m$是正不变集。

证明 由Π_i的定义及(2.2)

$$\dot{u}_i=u_i'-u_i=u_i'\geqslant T(0)=0$$

任取$u\in\overline{R}_+^m$，$u\geqslant 0$；由(2.2)$Tu\geqslant T(0)=0$，$Tu\in\overline{R}_+^m$。

定义 1 设$v\in\overline{\omega}_+$，则(i) 称 $B_v(A_v)=\{u\in\omega_+(u\in\overline{\omega}_+)\mid u<v(u>v)\}$ 为以 v 为顶点的箱体（反箱体）；(ii) 称$f_v^i(s_v^i)=\{u\in\partial B_v(\partial A_v)\mid u_i=v_i,\ u\leqslant v(u\geqslant v)\}$ 为箱面（反箱面），$f_v\triangleq\bigcup_{i=1}^m f_v^i$，$s_v\triangleq\bigcup_{i=1}^m s_v^i$。

引理 2 箱面（反箱面）的性质：如果$\dot{v}<0(\leqslant 0)[\dot{v}>0(\geqslant 0)]$，则

$$\forall u\in f_v^i[s_v^i],\ \dot{u}_i<0(\leqslant 0)[\dot{u}_i>0(\geqslant 0)], \qquad i\in\underline{m} \tag{2.3}$$

证明 只证第一个不等式.由(2.2)知$u\leqslant v$，$u_i'\leqslant v_i'$，故 $\forall u\in f_v^i$，$\dot{u}_i=u_i'-u_i=(u_i'-v_i')+(v_i'-u_i)=(u_i'-v_i')+(v_i'-v_i)=(u_i'-v_i')+\dot{v}_i\leqslant 0$。

定义 2 (i) 设曲线$C\subset\overline{\Omega}_+$，$C$的参数方程

$$v=\psi(r), \qquad r\in\overline{R}_+为参数 \tag{2.4}$$

如果$\psi(r)$是单调增（单调非减）的，即$\forall v\in C$，$\Delta v/\Delta r>0(\geqslant 0)$，则称$C$是单调升（单调非降）的；(ii) 设序列$S$：$\{v^{(n)}\}_{n=1}^\infty\subset\overline{\Omega}_+$，$S$的参数方程

$$v^{(n)}=\psi(r^{(n)}), \qquad 参数r^{(n)}\in R_+严格单调，n\in J_+ \tag{2.5}$$

如果$\psi(r^{(n)})$是单调非减的，即$\forall v^{(n)}\in S$，$i>j$，$[v^{(i)}-v^{(j)}]/[r^{(i)}-r^{(j)}]\geqslant 0$，则称$S$是单调非降的。

定义 3 负区θ_-(正区θ_+)$=\{u\in\overline{\Omega}_+\mid\dot{u}<0(>0)\}$。

引理 3 连通的负区（正区）有以下性质：设$\exists\, b\in\theta_-(\theta_+)$，使$B_b$是$\omega_+$内最大箱体，$\exists\, z\in B_b$使$\theta_-(\theta_+)\subset A_z$，且$\forall i\in\underline{m}$，$s_z^i$上有$\partial\theta_-(\partial\theta_+)$的点（由定义3和定义1，这样的$b$和$z$显然存在）。令$M_{zb}=\overline{A}_z\cap B_b-z$，则(i)从任一点$u^\circ\in\theta_-(\theta_+)\cap M_{zb}$出发的解$S^+\subset\overline{\theta}_-(\overline{\theta}_+)$，且是单调非降的，$z$是$S^+$唯一公共的正（负）极限点（平衡点）；(ii) 存在一条单调非降的曲线$C^+\subset\overline{\theta}_-(\overline{\theta}_+)$，$C^+$依次连接$S^+$的所有点；(iii) 在$C^+$近旁存在一条单调升曲线$C\subset\theta_-(\theta_+)$，$\overline{C}$由$z$出发延续到$u^\circ$。

证明 (i)和(iii)的证明与[2]类似，以下只就θ_-证(ii)，θ_+同理可证。

任取$u\in\theta_-\cap M_{zb}$，记$w=Tu$有$w\leqslant u$。$\forall v\in\overline{A}_w\cap\overline{B}_u$，$w\leqslant v\leqslant u$。由(2.2)知$Tv\leqslant Tu=w\leqslant v$，即$\dot{v}\leqslant 0$，故$v\in\overline{\theta}_-\cap M_{zb}$。取连接$u$，$w$的线段$\overline{uw}$，则$\overline{uw}\subset\overline{A}_w\cap\overline{B}_u\subset\overline{\theta}_-\cap M_{zb}$，$\overline{uw}$显然单调非降。对$S^+$上任一对相邻点$u^{(n)}$，$u^{(n+1)}(=Tu^{(n)})$，$n\in J_+$，均用这样的线段连接，由此构成的曲线就是$C^+$。

三、稳定性的几种情况

因$\bar{R}_+^m$是正不变集（引理1），故当用李雅普诺夫函数V研究(2.1)的稳定性时，只需考虑V函数在某个存在邻域$\varpi_+\subset\bar{\Omega}_+$内的性质，而不必考虑整个原点邻域。

定义4 设曲线$g\subset\omega_+$，$\bar{g}$由原点O出发延续到$\partial\omega_+-\pi$；如果$\forall v\in g$，$\dot{v}<0$ (>0)，则称g为负（正）曲线，记为$g_-(g_+)$。

命题1 $\exists g_-\subset\omega_+\Rightarrow$(2.1)的零解渐近稳定。

证明 显然存在连通的$\theta_-\supset g_-$，原点$O\in\partial\theta_-$，且$\exists b\in\theta_-\cap\varpi_+$，$B_b$是$\omega_+$内最大箱体（指$B_b\subset\omega_+$上$\bar{B}_b\cap(\partial\omega_+-\pi)\neq 0$）。于是由引理3知存在单调升曲线$C\subset\theta_-$，$\bar{C}$两端为$O(z=0)$和$b$。从而参数方程(2.4)的反函数是单调增的，即

$$r=\psi_i^{-1}(v_i),\ \Delta r/\Delta v_i>0,\qquad v\in C,i\in\underline{m} \tag{3.1}$$

且$0=\psi_i^{-1}(0)$，$i\in\underline{m}$。现取正定函数

$$V(u)=\psi_i^{-1}(u_i),\qquad u\in f_v^i,\ v\in C,\ i\in\underline{m} \tag{3.2}$$

点集$V(u)=r$就是箱面。因C是单调升的，任取相异点$v,w\in C$，有$v>w$，$B_v\supset\bar{B}_w$，故集合$\{f_v\}_{v\in C}=B_b$。现任取$u\in B_b$，$\exists i\in\underline{m}$，$v\in C$使$u\in f_v^i$；由(2.2)知$Tu\leqslant Tv$，再由$\dot{v}<0$知$Tu\leqslant Tv<v$；故还$\exists j\in\underline{m}$，$w\in C$，$w<v$使$Tu\in f_w^j$。由(3.2)得

$$\dot{V}(u)\triangleq V(Tu)-V(u)=\psi_j^{-1}(w_j)-\psi_i^{-1}(v_i)$$

根据(3.1)知$\psi_j^{-1}(v_j)=\psi_i^{-1}(v_i)$，得

$$\dot{V}(u)=\psi_j^{-1}(w_j)-\psi_j^{-1}(v_j)=L_j(w_j-v_j)$$

因ψ^{-1}单调升，$\exists L$（常数）使$0<L_j\leqslant L$，并由$w_j<v_j$知$\dot{V}(u)<0$；零解渐近稳定，B_b为吸引域。

命题2 如果在原点任意小邻域ϖ_+内，存在$v\in\varpi_+$使(i)$\dot{v}\leqslant 0\Rightarrow$(2.1)零解稳定；(ii)$\dot{v}\geqslant 0\Rightarrow$(2.1)零解不是渐近稳定。

证明 (i)$\forall u\in\bar{B}_v$，$u\leqslant v$，由(2.2)及命题条件知$Tu\leqslant Tv\leqslant v$，即$Tu\in\bar{B}_v$，$\bar{B}_v$是正不变集。因在任意小邻域存在这样的正不变集，(i)成立。

(ii)与(i)类似，反箱体$\bar{A}_v$也是正不变集。

命题3 $\exists g_+\subset\varpi_+\Rightarrow$(2.1)零解不稳定。

四、渐近稳定的进一步讨论

命题1只给出了(2.1)渐近稳定的充分条件，其实它也是必要的。为证明这点，先将Tu的定义域$\bar{\Omega}_+$按以下方式扩大到$\bar{\Omega}$，即考虑

$$u_i'=\hat{T}_iu,\qquad i\in\underline{m} \tag{4.1}$$

式中

$$\hat{T}_iu=\begin{cases}T_iu, & \text{当}u\in\bar{\Omega}_+\\ -T_i(-u), & \text{当}u\in\bar{\Omega}_-(\Omega_-=\{u\in\bar{\Omega}\mid -u\in\bar{\Omega}_+\})\\ \hat{T}_i(u_{j_1},\cdots,u_{j_p},0,\cdots,0)+\hat{T}_i(0,\cdots,0,u_{j_{p+1}},\cdots,u_{j_m}), & \\ \quad\text{当}u\in\bar{\Omega}-(\bar{\Omega}_+\cup\bar{\Omega}_-),\ (u_{j_1},\cdots,u_{j_p},0,\cdots,0)\in\bar{\Omega}_+ & \\ \quad(0,\cdots,0,u_{j_{p+1}},\cdots,u_{j_m})\in\bar{\Omega}_-,\ \forall p\in\underline{m-1};\ i\in\underline{m} & \end{cases} \tag{4.2}$$

容易证明这样定义的$\hat{T}u$是连续奇函数，且满足单调非减的性质.

定义5 设曲线H由方程组

$$\hat{T}_1u-u_1=\hat{T}_2u-u_2=\cdots=\hat{T}_mu-u_m \tag{4.3}$$

确定，则称H为等值曲线. 若H关于原点对称，记h和h^*为互为对称的两支; 如果$\forall u\in h$

$$\dot{u}_1=\dot{u}_2=\cdots=\dot{u}_m<0(>0)$$

则称h为负（正）等值曲线，记为$h_-(h_+)$; 如果在原点任意小邻域内有$u\in h$使$\dot{u}=0$，则称h为半零等值曲线，记为h_0.

文献[2]证明了连续奇函数总存在关于原点对称的等值曲线. 进一步按照与[2]类似的方法可得:

命题4 方程（4.1）的等值曲线只能是h_-，h_+和h_0中的一种，$\bar{h}$从原点出发延续到边界$\partial\omega$.

命题5 如果(4.1)的等值曲线$h\not\subset\omega_+$，则(2.1)零解不是渐近稳定的.

五、稳定性的判别准则

定理1 设原点邻域$\bar{\omega}_+\subset\bar{\Omega}_+$，则以下命题等价: (i)（2.1）零解渐近稳定（全局渐近稳定）; (ii) 在$\omega_+(R_+^m)$内存在负曲线

$$g_-: \quad c_1(T_1u-u_1)=c_2(T_2u-u_2)=\cdots=c_m(T_mu-u_m)<0$$
$$(c_i=c_i(u)>0，u\in\omega_+，i\in\underline{m}) \tag{5.1}$$

$\bar{g}_-$从原点出发延续到边界$\partial\omega_+-\pi$（g_-无界）;

(iii)
$$\forall u\in\omega_+(R_+^m)，\sum_{i=1}^{m}(T_iu-u_i)^2>0 \tag{5.2}$$

$$\exists u\in\omega_+(R_+^m)，T_iu-u_i<0，i\in\underline{m} \tag{5.3}$$

证明 由命题1知(ii)⇒(i).

(iii)⇒(ii): 由(5.3)知存在常向量c，$Tu<c<u$. 由$Tu<c$及T的连续性知存在以u为心的邻域$N_1(u)$，$\forall v\in N_1(u)$，$Tv<c$; 同理，存在另一邻域$N_2(u)$，$\forall v\in N_2(u)$，$c<v$. 取$N(u)=N_1(u)\cap N_2(u)$，则$\forall v\in N(u)$，$Tv<c<v$. 从而存在最大连通的开集θ_-，$\forall v\in\theta_-$，$Tv<v$. 由引理3知$\theta_-\subset\bar{\omega}_+$有唯一平衡点$z\in\partial\theta_-\cap\bar{\omega}_+$，再由(5.2)知$z$是原点，从而$\exists g_-\subset\theta_-\cap\omega_+$，(ii)成立.

(i)⇒(iii): 由命题5知$h\subset\omega_+$，又由命题4、命题2(ii)及命题3知$h=h_-$，故（5.1）从而(5.3)成立; 而且存在吸引域$\subset\bar{\omega}_+$没有平衡点（除原点），(5.2)成立.

现考虑$Tu\in C_1$类函数，令$T_{ij}=\partial T_iu/\partial u_j$，$i,j\in\underline{m}$，$A=(T_{ij})_{m\times m}$，$B=I-A$，$D_k$是$\det B$的第$k$级顺主子式($k\in\underline{m}$).

定理2 如果$\forall u\in\omega_+(R_+^m)$，$A$是非负矩阵，且

$$D_k>0, \qquad k\in\underline{m} \tag{5.4}$$

(2.1)零解渐近稳定（全局渐近稳定）.

证明 记$\det B(=D_m)$任一元的代数余子式为B_{ij}，由定理条件知[7]

$$B_{ij}\geqslant 0 \quad (i\neq j)，B_{ii}>0; \qquad i,j\in\underline{m} \tag{5.5}$$

取等值曲线

$$h:\ u_i-T_iu=u_m-T_mu,\qquad i\in\underline{m-1}$$

两端对u_m求导

$$(1-T_{ii}+T_{mi})\frac{du_i}{du_m}+\sum_{j\neq i}^{m}(-T_{ij}+T_{mj})\frac{du_j}{du_m}=1-T_{mm}+T_{im},\qquad i\in\underline{m-1}$$

解得

$$\frac{du_j}{du_m}=\sum_{i=1}^{m}B_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{m}B_{im},\qquad j\in\underline{m-1}$$

由(5.5)知$du_j/du_m>0$，$j\in m-1$．故$h\subset\omega_+$为单调升，由命题4，h只能为h_-或h_+．现令

$$\dot{u}_i=T_iu-u_i=-\varepsilon,\qquad i\in\underline{m}\tag{5.6}$$

两端对ε求导

$$(1-T_{ii})\frac{du_i}{d\varepsilon}-\sum_{j\neq i}^{m}T_{ij}\frac{du_j}{d\varepsilon}=1,\qquad i\in\underline{m}$$

解得

$$\frac{du_j}{d\varepsilon}=\sum_{i=1}^{m}B_{ij}\Big/D_m>0$$

上式表明$\varepsilon>0$，代回(5.6)知$\dot{u}<0$，$h=h_-$，零解渐近稳定．

一次近似准则只考虑原点的雅可比矩阵，得到的只是小范围指数稳定[5]，而定理2考虑了整个ω_+以至R_+^m（注意，可以不包括原点!）的雅可比矩阵A，可以得到全局渐近稳定的结论．

由命题2和命题3立即可得：

定理3 如果原点邻域$\bar{\omega}_+$无论如何小，$\exists\, x\in\omega_+$，使(i) $Tx\leqslant x$（包括x恒是平衡点，即$\sum_{i=1}^{m}(T_ix-x_i)^2=0$)，则(2.1)零解稳定；(ii) $Tx\geqslant x$（包括x恒为平衡点），则(2.1)零解不是渐近稳定．

定理4 设存在原点邻域$\bar{\omega}_+\subset\bar{\Omega}_+$，

$$\forall\, u\in\bar{\omega}_+,\ u\neq0,\ 有\sum_{i=1}^{m}(T_iu-u_i)^2>0$$

$$\exists\, u\in\bar{\omega}_+\ 使\ T_iu-u_i>0,\qquad i\in\underline{m}$$

则 (2.1) 零解不稳定．

例 1 设有m维多项式型比较方程

$$u_i'=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{(k)}u_j^k,\qquad a_{ij}^{(k)}\geqslant0,\ k\in\underline{n},\ i,j\in\underline{m}$$

记 $u^{(k)}=(u_1^k,\cdots,u_m^k)^T$，$A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{m\times m}$，上式可改写成

$$u'=\sum_{k=1}^{n}A^{(k)}u^{(k)}$$

记$B=I-A^{(1)}$，由定理2，只要ω_+充分小时恒有(5.4)成立，零解就是渐近稳定的.

例 2 设有二维比较方程

$$u_1'=0.5\,u_1+a\sqrt{u_2}\ ,\ u_2'=0.2u_1^2+0.4u_2 \qquad (a\geqslant 0)$$

如果 $a<0.5\sqrt{0.3}$，取 g: $u_1=b\sqrt{u_2}$，$a/0.5<b<\sqrt{0.3}$，有$u_1'=(0.5+a/b)u_1<u_1$，$u_2'=(0.2b^2+0.4)u_2<u_2$，$g=g_-$，由定理1，零解全局渐近稳定. 同理，如果 $a=0.5\sqrt{0.3}$ ($a>0.5\sqrt{0.3}$)，由定理3和定理4知零解稳定但不渐近稳定（零解不稳定).

例 3 设有二维系统

$$\left.\begin{aligned}x(n+1)&=\frac{a_1x^2(n)}{1+x^2(x)}+\frac{a_2y^2(n)}{1+y^2(n)}\\ y(n+1)&=\frac{b_1x^2(n)}{1+x^2(n)}+\frac{b_2y^2(n)}{1+y^2(n)}\end{aligned}\right\}\quad a_j,b_j\geqslant 0,\ j=1,2 \tag{5.7}$$

取正定函数$v_1=x^2$，$v_2=y^2$，可得比较方程

$$u_1'=\left[\frac{a_1u_1}{1+u_1}+\frac{a_2u_2}{1+u_2}\right]^2,\ u_2'=\left[\frac{b_1u_1}{1+u_1}+\frac{b_2u_2}{1+u_2}\right]^2 \tag{5.8}$$

记

$$X=\frac{a_1u_1}{1+u_1}+\frac{a_2u_2}{1+u_2},\quad Y=\frac{b_1u_1}{1+u_1}+\frac{b_2u_2}{1+u_2}$$

则

$$\frac{\partial u_1'}{\partial u_1}=2a_1X/(1+u_1)^2,\quad \frac{\partial u_1'}{\partial u_2}=2a_2X/(1+u_2)^2$$

$$\frac{\partial u_2'}{\partial u_1}=2b_1Y/(1+u_1)^2,\quad \frac{\partial u_2'}{\partial u_2}=2b_2Y/(1+u_2)^2$$

利用C_1类函数准则（定理2)

$$D_1=1-2a_1\,X/(1+u_1)^2$$

$$D_2=\left[1-\frac{2a_1X}{(1+u_1)^2}\right]\left[1-\frac{2b_2Y}{(1+u_2)^2}\right]-\frac{4a_2b_1XY}{(1+u_1)^2(1+u_2)^2}$$

显然，只要u_1和u_2充分小，就有 D_1，$D_2>0$，(5.8)从而(5.7)零解渐近稳定. 此外，因 $X\leqslant a_1+a_2$，$Y\leqslant b_1+b_2$，$(1+u_1)^2\geqslant 1$，$(1+u_2)^2\geqslant 1$，还有

$$D_1\geqslant 1-2a_1(a_1+a_2)$$

$$D_2\geqslant[1-2a_1(a_1+a_2)][1-2b_2(b_1+b_2)]-4a_2b_1(a_1+a_2)(b_1+b_2)$$

故当 $1-2a_1(a_1+a_2)>0$，$[1-2a_1(a_1+a_2)][1-2b_2(b_1+b_2)]-4a_2b_1(a_1+a_2)(b_1+b_2)>0$时，(5.7)零解全局渐近稳定.

六、结　　论

用矢量V函数解决稳定性问题分两步(i)集结一个矢量比较方程，(ii)判断该比较方程的稳定性. 本文全面建立了离散系统非线性驻定比较方程的各种稳定性准则，其中渐近稳定准则可以判断原系统的非指数稳定以至全局非指数稳定. 至于如何对一个给定的大系统集结一个非线性比较方程，作者将在另一篇文章中给出一个一般性方法.

参 考 文 献

[1] Bailey, F. N., The application of Lyapunov's second method to interconnected systems, *J. SIAM, Control Ser.*, A, 3 (1966), 443—462.

[2] 舒仲周，比较方程的稳定性，数学年刊，7A，6 (1986)，676—684.

[3] Shu Zhong-zhou, General theorems on the stability of large scale systems, *SIAM Conference on Control in the 90's*, San Fransisco (1989, 5).

[4] Feng En-bo, Comparison principle of the discrete large-scale systems in the theory of stability and its applications, 控制理论与应用, 1, 1 (1984), 92—100.

[5] Lasalle, J. P., *The Stability of Dynamical Systems*, J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol, 3, England (1976).

[6] 舒仲周，我国运动稳定性研究的新进展，力学进展，18，1 (1988)，1—12.

[7] 许淞庆，《常微分方程稳定性理论》，上海科技出版社 (1962).

Stability of Nonlinear Comparison Equations for Discrete Large-Scale Systems

Shu Huang

(*Southwest Jiaotong University, Chengdu*)

Abstract

On the stability analysis of large-scale systems by Lyapunov functions, it is necessary to determine the stability of vector comparison equations. For discrete systems, only the stability of linear autonomous comparison equations was studied in the past. In this paper, various criteria of stability for discrete nonlinear autonomous comparison equations are completely established. Among them a criterion for asymptotic stability is not only sufficient, but also necessary, from which a criterion on the function class C_1 is derived. Both of them can be used to determine the unexponential stability, even in the large, for discrete nonlinear (autonomous or nonautonomous) systems. All the criteria are of simple algebraic forms and can be readily used.