应用数学和力学，第11卷第8期（1990年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于非均匀变截面梁阶梯折算法的极限*

伍 炯 宇

（四川大学数学系，1986年6月3日收到）

摘　要

本文讨论叶开沅教授提出的计算非均匀变截面梁的阶梯折算法．并证明了如下结论：用这个方法得出的近似解，当阶梯数趋于无穷时趋于真解．不过极限解和真解之间差别的度量不是纯数学意义的而是在力学意义下的．

对非均匀变截面梁使用阶梯折算法是叶开沅教授提出来的．其优越性是明显的，这里不列举．当阶梯数趋于无穷大时，其解与真解之间的关系如何？叶教授未讨论这个问题．本文对这个问题进行了初步的探讨，并得到了肯定的结论．不过极限解与真解之间的差别的度量是在力学意义下的而不是纯数学意义的．

设我们讨论变刚度$D(x)$的梁的弯曲问题．若它所承受的荷载是$f(x)$，则挠度$y(x)$满足基本方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2}{dx^2}y(x)=f(x) \tag{1}$$

如果$f(x)$连续，$D(x)$二次连续可微，则可以在四次连续可微函数类中求解挠度函数$y(x)$．若$f(x)$间断，$D(x)$也间断，则在四次连续可微函数类中难以求解，因其光滑程度下降．如有集中荷载则挠度函数的光滑性还要下降．

叶开沅阶梯折算法的实质是用阶梯函数$D_n(x)$代替$D(x)$并以相应的挠度$y_n(x)$代替原来的挠度$y(x)$．我们的目的是要证明这样做是合理的．而且当$n\to\infty$时(阶梯的最大长度$\to 0$，$D_n(x)\to D(x)$)，这种替代是精确的．

我们先作下面的考虑：令

$$T_D=\{y\,|\,y\in C^1([0,\ l]),\ Dy''\in C^1([0,\ l])\}$$

若$y_1\in T_{D_1}$，$y_2\in T_{D_2}$，定义它们之间的距离

$$\|y_1-y_2\|_T=\{\|y_1-y_2\|^2+\|y_1'-y_2'\|^2+\|D_1y_1''-D_2y_2''\|^2+\|(D_1y_1''-D_2y_2'')'\|^2\}^{1/2}$$

其中$\|\cdot\|$表函数在$[0,\ l]$中的上确界，即对任一$f\in C([0,\ l])$则

$$\|f\|=\sup_{0<x<l}|f(x)|$$

又考虑方程(1)，若给定了边界条件，对于某一给定的梁($D(x)$)，对不同的荷载函数

* 叶开沅推荐．

$f(x)$一定有不同的挠度$y(x)$与之对应(作为方程(1)的解)．于是方程(1)实际上给出了一个映射（或算子）$\mathscr{D}:M\to T_D$．其中M代表有界可测函数空间，T_D是上面定义的集合．（我们假设了荷载函数$f(x)$是有界可测的)．也就是说，给定了梁$\mathscr{D}$，对任何荷载$f\in M$．都有挠度$y=\mathscr{D}f\in T_D$与之对应．另外，我们还定义

$$\|\mathscr{D}_1-\mathscr{D}_2\|_W=\sup_{f\in M}\|\mathscr{D}_1 f-\mathscr{D}_2 f\|_T/\|f\|_M$$

在这个尺度下，两个梁被认为是近似的，如果对任何荷载，相应的挠度、转角、力矩、剪力都是近似的．这样一来，我们的问题化成：若$\|D_n-D\|_M$接近于零，要有$\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W$也接近于零．下面我们具体来证明．

1 均布荷载的情形

由于没有集中力，$f(x)$是分段连续的函数，至多是有界可测函数．设梁的刚度函数是$D(x)$定义在$x=0$到$x=l$之间．用分点$0=a_0<a_1<a_2\cdots<a_n<a_{n+1}=l$把梁分成$n+1$段．令$\Delta_i=[a_i,\ a_{i+1})\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1;\ \Delta_n=[a_n,\ l]$．

$$D_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\mathscr{X}_i(x)D(a_i) \tag{2}$$

其中$\mathscr{X}_i$是区间Δ_i的特征函数：

$$\mathscr{X}_i(x)=\begin{cases}0 & x\overline{\in}\Delta_i\\ 1 & x\in\Delta_i\end{cases}\quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{3}$$

现在考虑近似于方程(1)的方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D_n(x)\frac{d^2}{dx^2}y_n=f(x) \tag{4}$$

我们有下面的定理．

定理1 设$D_n(x)$在有界可测函数空间M中收敛于$D(x)(n\to\infty)$，荷载$f(x)$是任一有界可测函数，则方程(4)的满足某线性边值问题的解收敛于方程(1)的满足同一边值问题的解．

证明 由假设，当$\Delta_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$的最大长度趋于零时$(n\to\infty)$，$\max\limits_{0<x<l}|D_n(x)-D(x)|$趋于零．故由方程(1)和(4)显然有$(Dy'')'$和$(D_n y_n'')'$都是绝对连续的函数．因为$f(x)$是可积的，故有

$$\|(D_n y_n''-Dy'')'\|=\max_{0<x<l}\left|\int_0^x[f(s)-f(s)]ds\right|=0$$

这里用到(1)与(4)有同样的边值条件，因而$(D_n y_n'')'|_{x=0}=(Dy'')'|_{x=0}$．同样由于$(D_n y_n'')|_{x=0}=(Dy'')|_{x=0}$而有

$$\|D_n y_n''-Dy''\|=0$$

令$D_n y_n''(x)=Dy''(x)=g(x)$，于是

$$y_n''(x)=g(x)/D_n(x);\quad y''(x)=g(x)/D(x)$$

$$\|y_n'(x)-y'(x)\|=\max\left|y_n'(0)-y'(0)+\int_0^x g(s)\left(\frac{1}{D_n(s)}-\frac{1}{D(s)}\right)ds\right|$$

$$=\max\left|\int_0^x g(s)(D(s)-D_n(s))ds/D_n(s)D(s)\right|$$

$$\leqslant\frac{lG}{D_0^2}\max|D_n(x)-D(x)|$$

其中$G=\max|g(x)|$. $D_0=D(0)=D_n(0)$(若$D(x)$是增函数). 若$D(x)$不是增函数，则上式中的D_0换成$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\{D_n(x),\ D(x)\}$. 由此立即得到

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l}|y_n'(x)-y'(x)|\to 0\qquad(n\to\infty)$$

最后，

$$y_n(x)-y(x)=y_n(0)-y(0)+\int_0^x(y_n'(s)-y'(s))ds$$

由于边界条件相同，故有$y_n(0)=y(0)$，更有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l}|y_n(x)-y(x)|\to 0\qquad(n\to\infty)$$

综上所述有

$$\|y_n-y\|_T\to 0\qquad(n\to\infty)$$

证毕.

注 由于方程(1)是线性方程，y是线性依赖于f的. 即是说算子$\mathscr{D}$是线性算子，另外我们还可证明算子$\mathscr{D}$是连续的. 事实上，设y_i分别满足方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2}{dx^2}y_i(x)=f_i(x)\qquad(i=1,\ 2)$$

类似于定理1的证明，假设边值条件相同立即可以得到当$\|f_1-f_2\|_M\to 0$时，有$\|y_1-y_2\|_T\to 0$. 这就证明了算子$\mathscr{D}$的连续性，因而是有界线性算子（这是线性算子的性质）. 由此，若定义

$$\|\mathscr{D}\|_W=\sup_{f\in M}\|\mathscr{D}f\|_T/\|f\|_M$$

则有

$$\|\mathscr{D}f\|_T\leqslant\|\mathscr{D}\|_W\|f\|_M$$

我们还有下面的定理.

定理2 梁的挠度y是$\mathscr{D}$及f的连续函数.

证明 令$y_n=\mathscr{D}_nf_n$，$y=\mathscr{D}f$，且$\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W\to 0$，$\|f_n-f\|_M\to 0$ $(n\to\infty)$. 我们要证明当$n\to\infty$时$y_n\to y$. 事实上

$$\|y_n-y\|_T\leqslant\|\mathscr{D}_nf_n-\mathscr{D}_nf\|_T+\|\mathscr{D}_nf-\mathscr{D}f\|_T$$

上式右边第二项是

$$\|\mathscr{D}_nf-\mathscr{D}f\|_T\leqslant\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W\|f\|_M$$

当n趋于无穷时显然是趋于零的.

第一项是

$$\|\mathscr{D}_nf_n-\mathscr{D}_nf\|_T\leqslant\|\mathscr{D}_n\|_W\|f_n-f\|_M\leqslant(\|\mathscr{D}\|_W+1)\|f_n-f\|_M$$

当$n\to\infty$时，也是趋于零的. 证毕.

定理3 若$\|D_n-D\|_M\to 0(n\to\infty)$，则有

$$\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W\to 0\qquad(n\to\infty)$$

证 由定义

$$\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W=\sup_{f\in M}\|\mathscr{D}_nf-\mathscr{D}f\|_T/\|f\|_M$$

若令$h=f/\|f\|_M$，则

$$\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W=\sup_{h\in M,\|h\|_M=1}\|\mathscr{D}_nh-\mathscr{D}h\|_T$$

这样，任给$\varepsilon>0$，一定存在$h\in M$，$\|h\|_M=1$使得

$$\|\mathscr{D}_nh-\mathscr{D}h\|_T>\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W-\varepsilon/2$$

又由定理1知存在$\delta>0$，只要$\|D_n-D\|_M<\delta$，则有$\|y_n-y\|_T=\|\mathscr{D}_nh-\mathscr{D}h\|_T<\varepsilon/2$，而且由于$\|h\|_M=1$，$\delta$与$h$无关，于是有

$$\|\mathscr{D}_n-\mathscr{D}\|_W<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

证毕。

由上面的定理，我们得到下面的结论：当$\|D_n-D\|_M\to0$ $(n\to\infty)$，$\|f_n-f\|_M\to0$ $(n\to\infty)$时，有方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D_n(x)\frac{d^2}{dx^2}y_n=f_n(x) \tag{5}$$

之某边值问题的解在$n\to\infty$时，收敛于方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2}{dx^2}y=f(x) \tag{1}$$

满足同样边值问题的解。

有了这个结论，我们可以用各种方便的办法，造出$D_n(x)$来逼近$D(x)$(当然是在有界可测函数空间中的逼近)。然后算出原方程的逼近解。叶开沅教授便是用阶梯函数$D_n(x)$来逼近$D(x)$并把方程(4)之解作为方程(1)的近似解。如果方便的话，也可以用折线$D_n(x)$来逼近$D(x)$，一般说来或许更为精确。

注 用初参数法求方程(4)的解，其结果与文[1]的结果一致(参看文[3])。

2. 有集中力的情形

不失一般性，我们假设在点$x=c$处有一个集中力的情况，即考虑方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2}{dx^2}y=-\delta(x-c)P \tag{6}$$

其中$\delta(x-c)$是δ-函数，它是最简单的广义函数(或分布)。此外，我们还考虑方程

$$\frac{d^2}{dx^2}D_n(x)\frac{d^2}{dx^2}y_n=-\delta(x-c)P \tag{7}$$

其中$D_n(x)$是逼近于$D(x)$的阶梯函数。文[3]中用初参数法求解(7)得到文[1]中同样的结果。

$$y_n(x)=y(0)+\theta(0)x-\frac{M(0)}{2D_0}\Big[x^2+\sum_{i=1}^{n}\{x-a_i\}^\circ(\delta_i-\delta_{i-1})(x-a_i)^2\Big]$$

$$-\frac{Q(0)}{6D_0}\Big[x^3+3\sum_{i=1}^{n}\{x-a_i\}^\circ(\delta_i-\delta_{i-1})a_i(x-a_i)^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\{x-a_i\}^\circ(\delta_i-\delta_{i-1})(x-a_i)^3\Big]-\frac{P}{6D_0}\ [\{x-c\}^\circ\{c-a_{i_0}\}^\circ\delta_{i_0}(x-c)^3$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\{x-a_i\}^{*}\{a_i-c\}^{*}(\delta_i-\delta_{i-1})\{(x-a_i)^3+3(x-a_i)^2(a_i-c)\}] \tag{8}$$

其中，$a_{i_0}\leqslant c$是紧靠 c 的点(见[3])。

下面我们要类似地证明方程(7)的某一边值问题的解，在$\|D_n(x)-D(x)\|_M\to 0(n\to\infty)$时逼近于方程(6)满足同边值条件的解．事先引入下列记号

$$\hat{T}_D=\{y|y,\ y',\ Dy''\in C([0,\ l]),\ (Dy'')'\text{分段连续}\}$$

若$y_1\in\hat{T}D_1$，$y_2\in\hat{T}D_2$，则

$$\|y_1-y_2\|_{\hat{T}}\triangleq\{\|y_1-y_2\|^2+\|y_1'-y_2'\|^2+\|D_1y_1''-D_2y_2''\|^2+\|(D_1y_1''-D_2y_2'')'\|_M^2\}^{1/2}$$

其中$\|\cdot\|$是在C中的范数，$\|\cdot\|_M$是在M中的范数．同样定义两个算子$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$之间的尺度

$$\|\mathscr{D}_1-\mathscr{D}_2\|_{\hat{W}}=\sup_P\{\|y_1-y_2\|_{\hat{T}}/P\}$$

或
$$\|\mathscr{D}_1-\mathscr{D}_2\|_{\hat{W}}=\sup_{|P|=1}\{\|y_1-y_2\|_{\hat{T}}\}$$

于是我们又有

定理4 若当$n\to\infty$时$\|D_n-D\|_M\to 0$，则方程(7)的某一边值问题的解在$n\to\infty$时逼近于方程(6)的同一边值问题的解．

证明 因为方程(6)、(7)的右端是一样的．因此$(D_ny_n'')'=(Dy'')'$，$D_ny_n''=Dy''$．它们都是对右端积分一次和两次的结果．δ函数积分两次之后是连续函数．以后的证明同定理1．证毕．

有集中力矩的情形，相当于方程(6)的右端还加上一项$-\delta'(x-a)M$．这里$\delta'(x-a)$是δ-函数$\delta(x-a)$的一阶导数．它使梁的剪力出现间断．当然，这个导数是广义函数的导数，仍然是一个广义函数．它异于$\delta(x-a)$．这时方程(6)的左边也应当看成广义函数．按广义函数的运算法则，其积分应当是δ函数，再积分一次成了 Heaviside 函数．然后按普通的函数积分下去．同前面的处理一样，最后转角总是连续的．推导过程这里略去了．

参考文献

[1] 叶开沅，«非均匀变厚度弹性力学»，贵州省科学技术协会 (1983, 7).

[2] Zemanian, A. H., *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill Book Company (1965).

[3] 叶开沅、冯燕伟，«材料力学»，教育出版社．(即将出版)

On the Limit Case of the Step-Reduction Method for Calculating Non-Uniform Beam with Various Sections

Wu Jiong-yu

(*Mathematics Department, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, the step-reduction method is discussed, which was advanced by Prof. Yeh Kai-yuan for calculating a non-uniform beam with various sections. The following result is proved. The approximate solution by this method approaches the true solution if the number of the steps approaches the infinity. However, the measure of the error between the limit solution and the true solution is not in the pure mathematics sense but in the mechanics sense.