应用数学和力学，第11卷第7期（1990年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

主观几何中一组余弦定律方程的解*

云 天 铨

（华南理工大学，1989年6月30日收到）

摘 要

本文讨论在主观几何应用例子[1]中出现的由余弦定理建立的一组六元二次带根式的代数方程的解．应用隐函数存在定理，本文证明这组方程存在有唯一的实解．把求解问题转化为无约束非线性优化问题，可以用已知的诸法来求解．文中给出了用下降法求解的数值例子．

一、概 述

在“主观几何初步探讨”一文[1]的应用例子中，利用六张球面照片确定任意两点的六个未知的坐标分量曾导出六个六元二次带根式的代数方程．在文[1]中没有讨论这组方程，只是假定它可解．由于这是一组六元二次带根式的代数方程，即使用消元法能化为一元高次方程，按照 Abel 定理（五次以及更高次的代数方程没有一般的代数解法）[2]，有必要对这组方程是否有实解以及如何求解进行探讨．本文将隐函数存在定理应用于六维情形的本组方程，证明了在一定条件下，这组方程存在有唯一的实解．至于求解的方法，可把求解问题转化为无约束非线性优化问题，然后可以用已知的方法求解．本文用下降法给出数值计算的例子．

所有这些理论和实际的计算表明：文[1]中假定这组方程有解且可解是正确的；利用六张球面照片是可以定出两个欲测点的六个坐标分量的．

二、一组余弦定理方程

在此，重述文[1]应用例子的方程．设欲测点A，B的笛卡儿坐标分别是未知的x_a, y_a, z_a和x_b，y_b，z_b；观察点$O_i(i=1\sim6)$的坐标分别是已知的x_i，y_i，z_i．也就是观察点O_i之间的坐标的相互关系是可以给定的，例如令

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_1+a_i\\ y_i&=y_1+b_i\\ z_i&=z_1+c_i \end{aligned}\right\}\qquad (i=2\sim6) \tag{2.1}$$

---

* 华南理工大学重点科研基金资助课题．85级任秀铭同学参加计算．

式中 a_i，b_i，c_i为实常数，是已知的。

记AB，AO_i和BO_i的距离分别为d，s_i及t_i，即

$$\left.\begin{aligned} d&=[(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2]^{1/2}\\ s_i&=[(x_a-x_i)^2+(y_a-y_i)^2+(z_a-z_i)^2]^{1/2}\\ t_i&=[(x_b-x_i)^2+(y_b-y_i)^2+(z_b-z_i)^2]^{1/2}\end{aligned}\right\}\quad (i=1\sim 6) \tag{2.2}$$

在观察点$O_i(i=1\sim 6)$拍摄包含A，B目标的球面照片六张，分别在球面屏幕上量出圆心角$\angle AO_iB=\varphi_i$ $(i=1\sim 6)$，也就是φ_i是已知的实数。对$\triangle AO_iB$由余弦定理建立方程

$$d^2=s_i^2+t_i^2-2s_it_i\cos\varphi_i \qquad (i=1\sim 6) \tag{2.3}$$

(2.3)式是一组六元二次带根式的代数方程组。其中未知数是x_a，y_a，z_a，x_b，y_b，z_b，其余为已知的实数。本文的任务是探讨(2.3)式是否有实解和如何求解。

三、(2.3)式有唯一实解的证明

为方便，记

$$X=\{X_1,\ X_2,\cdots,\ X_6\}=\{\varphi_1,\ \varphi_2,\cdots,\ \varphi_6\}$$
$$Y=\{Y_1,\ Y_2,\cdots,\ Y_6\}=\{x_a,\ y_a,\ z_a,\ x_b,\ y_b,\ z_b\}$$

分别为六维实欧几里得空间X_E和Y_E中的一点。将(2.3)式写成

$$f_i(X,Y)=d^2-s_i^2-t_i^2+2s_it_i\cos\varphi_i=0 \qquad (i=1\sim 6) \tag{3.1}$$

其中 泛函$f_i(X,Y)$当X不变时，看作是六维实欧几里得空间中的一点。也就是当u^*，$u\in Y_E$时，$f_i(X,u^*)$和$f_i(X,u)$的距离定义为：

$$|f_i(X,u^*)-f_i(X,u)|\equiv\left[\sum_{j=1}^{6}(\Delta f_{ij})^2\right]^{1/2} \tag{3.2}$$

式中
$$\Delta f_{ij}=f_i(X,u_j^*)-f_i(X,u_j) \tag{3.3}$$

而其中

$$u=\{u_1,\ u_2,\cdots,\ u_6\},\quad u^*=\{u_1^*,\ u_2^*,\cdots,\ u_6^*\}$$

$f_i(X,u_j)$是$f_i(X,u_1,\cdots,\ u_j,\cdots,u_6)$只是$u_j$变化的简写。

当f_i对各变量的偏导数存在时，即

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}=f_{i,j}(X,u_j+\theta\Delta u_j)=f_{i,j} \qquad (0<\theta<1)$$

$$\Delta u_j=u_j^*-u_j \qquad (j=1\sim 6)$$

由多变量微分中值定理得

$$\Delta f_{ij}=f_i(X,u_j^*)-f_i(X,u_j)=f_{i,j}\Delta u_j \tag{3.4}$$

现在，我们来看多维的隐函数存在定理。

隐函数存在定理：

设实函数$f_i(X,Y)$在区域Ω

$$\Omega:\ g_i\leqslant X_i\leqslant h_i,\ k_i\leqslant Y_i\leqslant l_i \qquad (i=1\sim 6)$$

上处处连续，且处处有关于Y_i的偏导数，而且存在有常数m，M，使在Ω中满足

$$0<m\leqslant f_{i,j}^2(X,Y)\leqslant M<\infty \tag{3.5}$$

那么方程$f_i(X,Y)=0$在区间$[g_i,h_i]$上必有唯一实的连续解$Y=u^0(X)$。

证明　在完备空间$C[g_i,h_i]$中作映射

$$Au=u-\frac{1}{M}f_i(X,u)\qquad(i=1\sim6)\tag{3.6}$$

这个映射是$C[g_i,h_i]$到其自身的压缩映射．因为对于任何u^*，$u\in C[g_i,h_i]$，由微分中值定理知，存在$0<\theta<1$使得

$$\begin{aligned}|(Au^*)(X)-(Au)(X)|&=\left|u^*(X)-\frac{1}{M}f_i(X,u^*)\right.\\&\quad\left.-u(X)+\frac{1}{M}f_i(X,u)\right|\\&=\left|u^*(X)-u(X)-\frac{1}{M}\left[\sum_{j=1}^{6}(f_{i,j}\Delta u_j)^2\right]^{1/2}\right|\\&\leqslant|u^*(X)-u(X)|\left(1-\frac{m}{M}\right)\end{aligned}\tag{3.7}$$

令　$\alpha=1-m/M$，显然$0<\alpha<1$，于是

$$|(Au^*)(X)-(Au)(X)|\leqslant\alpha|u^*(X)-u(X)|$$

或

$$\|Au^*-Au\|\leqslant\alpha\|u^*-u\|\tag{3.8}$$

其中　A是$C[g_i,h_i]$中的压缩算子．根据 Banach 压缩映射定理[3,p.74]，在$C[g_i,h_i]$中有唯一的u^0，使

$$Au^0=u^0\tag{3.9}$$

于是由定义的(3.6)式，得

$$f_i(X,u^0(X))\equiv0\qquad(g_i\leqslant X_i\leqslant h_i)\tag{3.10}$$

Q.E.D

根据这个隐函数存在定理，只要(3.1)式的泛函$f_i(X,Y)$满足条件(3.5)式，在Ω中有唯一的实的连续解$Y=u^0(X)$．现在，(3.1)式给出

$$\left.\begin{aligned}f_{i,1}&=\frac{\partial f_i}{\partial Y_1}=2(Y_4-x_i)+2(x_i-Y_1)(t_i/s_i)\cos X_i\\f_{i,2}&=\frac{\partial f_i}{\partial Y_2}=2(Y_5-y_i)+2(y_i-Y_2)(t_i/s_i)\cos X_i\\f_{i,3}&=\frac{\partial f_i}{\partial Y_3}=2(Y_6-z_i)+2(z_i-Y_3)(t_i/s_i)\cos X_i\\f_{i,4}&=\frac{\partial f_i}{\partial Y_4}=2(Y_1-x_i)+2(x_i-Y_4)(t_i/s_i)\cos X_i\\f_{i,5}&=\frac{\partial f_i}{\partial Y_5}=2(Y_2-y_i)+2(y_i-Y_5)(t_i/s_i)\cos X_i\\f_{i,6}&=\frac{\partial f_i}{\partial Y_6}=2(Y_3-z_i)+2(z_i-Y_6)(t_i/s_i)\cos X_i\end{aligned}\right\}\quad(i=1\sim6)\tag{3.11}$$

通常给定拍摄点坐标$O_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$，只要$s_i\neq0$，(3.11)式总有M存在使

$$f_{i,j}^2<M<\infty\qquad(i,\ j=1\sim6)$$

而且恰使$f_{i,j}^2=0$的机会也是不多的. 因此，在解$Y=u^0(X)$的邻域Ω内任一点开始的压缩映射所形成的序列必收敛于这个唯一的不动点u^0. 这个邻域Ω有多大，以(3.11)式的$f_{i,j}^2$满足(3.5)式来定.

以上是关于方程组(2.3)式在域Ω中存在有唯一实解的理论证明. 确信这一点后，我们总可以用有关的方法求出解.

四、下降法解与(2.3)式等价的无约束优化问题

由于(2.3)式是一组带根式的非线性方程组，用一般的非线性代数方程解法，如求根法，迭代法，牛顿法等不一定有效或方便. 在此，将它转化为优化问题，因为优化问题已有许多成熟的方法和程序可供选用.

作目标函数F

$$F=\sum_{i=1}^{6}f_i^2 \tag{4.1}$$

式中 $f_i(X,Y)$如(3.1)式之左边所示. 其中X是给定的.显然$F\geqslant 0$，且当(2.3)的解存在有

$$\min F \Longleftrightarrow f_i=0 \qquad (i=1\sim 6) \tag{4.2}$$

于是将(2.3)式的求解转化为求(4.1)式的目标函数F的最小问题. 这是个无约束非线性优化问题，有许多方法，如最速下降法，牛顿法，共轭方向法，共轭梯度法，变尺度法等等可以选用. 在此，我们选用比较简单的下降法.

构造迭代公式

$$Y_i^{(n+1)}=Y_i^{(n)}-\lambda_n\frac{\partial F}{\partial Y_i} \tag{4.3}$$

$$\lambda_n=\left[F\Big/\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial F}{\partial Y_i}\right)^2\right]\cdot c_n \tag{4.4}$$

其中 c_n是一大于或小于1的系数，视目标函数F下降或上升而定的与迭代次数n有关的系数. 其目的在于加速收敛. 当目标函数F小于给定的正数ε时便停算.

下面是用下降法计算的一个数值例子.

给定的六个拍摄点O_i的坐标x_i，y_i，z_i和圆心角$\angle AO_iB=\varphi_i$分别为:

i	x_i	y_i	z_i	φ_i
1	0.0	0.0	0.0	0.5234
2	7.0	0.0	0.0	0.7330
3	2.0	−2.0	0.0	0.6110
4	6.0	2.0	0.0	1.0472
5	5.0	−1.0	0.0	0.7510
6	2.0	1.0	0.0	0.9599

初始迭代值Y_i^0 $(i=1\sim 6)$取为:

1.0，3.0，0.1，5.0，6.0，0.1

精度ε取0.00001，次数$n=1000$算得结果$Y_i(x_a,\ y_a,\ z_a,\ x_b,\ y_b,\ z_b)$分别为:

0.8842，4.0947，0.20538，5.4962，5.8978，0.1793.

参 考 文 献

[1] 云天铨，主观几何初步探讨，应用数学和力学，10，8（1989），657—662.
[2] 数学手册编写组，《数学手册》，高等教育出版社，北京（1979），90.
[3] 夏道行等人编著，《实变函数论与泛函分析》（下册），人民教育出版社，北京（1979）.

Solution of Simultaneous Equations of Cosine Law Arising from Subjectivity Geometry

Yun Tian-quan

(*Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou*)

Abstract

This paper discusses the solution of a group of two-order, six-element rooted algebraic simultaneous equations Setup by cosine law arising from the application example of subjectivity geometry[1]. By means of the implicit function theorem, this paper proves that there exists a unique real solution of those equations. Transforming this problem into an unconstrained nonlinear optimization problem, the solution can be found by known methods. A numerical example by descent method is given.