应用数学和力学，第11卷第7期（1990年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

大变形弹塑性率变分极值原理

高　杨　　E. T. 昂纳特

（合肥工业大学预测与发展研究所）（耶鲁大学机械系，美国）

摘　要

在 Updated Lagrangian 率形式下，研究了大变形弹塑性率问题的对偶极值变分原理．证明了变分泛函的凸性取决于一个所谓的间隙函数．

一、引　　言

大变形经典弹塑性率问题的变分原理业已得到广泛的研究（参见[1]）．然而此问题中的一个重要性质，即变分泛函的凸性却被忽略了．这一性质是分析变分解的存在性，唯一性的关键所在．本文正是试图利用现代凸分析理论予以研究解决．

在三维欧氏空间中，令参考构形 $\mathscr{B}^0$ 及当前构形 $\mathscr{B}$ 分别对应于二组独立的笛卡尔直角坐标系：Lagrange 系 $\{X_\alpha\}$ 和 Euler 系 $\{x_i\}$．它们相应的基矢量分别为 $\mathbf{G}_\alpha$ 和 $\mathbf{g}_i$．于是物体由 $\mathscr{B}^0$ 变形到 $\mathscr{B}$ 可以被描述为：

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X})=\mathbf{X}+\mathbf{u}(\mathbf{X}) \tag{1.1}$$

引入参考构形 $\mathscr{B}^0$ 中的梯度算子 $\nabla^0=\dfrac{\partial}{\partial X_\alpha}\mathbf{G}_\alpha$ 和 $\mathscr{B}$ 中的 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{g}_i$，于是变形梯度张量可以写成

$$\mathbf{F}=\mathbf{x}\nabla^0=\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{G}_\alpha=\mathbf{I}+\mathbf{u}\nabla^0=F_{i,\alpha}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{G}_\alpha \tag{1.2}$$

对于许可的变形，$\mathbf{F}$ 是非奇异有限的，于是有

$$\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{X}\nabla=\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i}\mathbf{G}_\alpha\otimes\mathbf{g}_i=\mathbf{I}-\mathbf{u}\nabla \tag{1.3}$$

Green-Lagrangian 应变张量定义为

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\mathbf{F}^T\mathbf{F}-\mathbf{I}]=\frac{1}{2}[\nabla^0\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla^0+(\nabla^0\mathbf{u})(\mathbf{u}\nabla^0)] \tag{1.4}$$

* 郭仲衡推荐．1989年6月20日收到．

在有限变形理论中，常用的应力张量为 Cauchy 应力为 $\boldsymbol{\sigma}(=\sigma_{ij}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j)$; Piola应力 $\boldsymbol{\tau}(=\tau_{i\alpha}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{G}_\alpha)$ 和Kirchhoff 应力 $\mathbf{S}(=S_{\alpha\beta}\mathbf{G}_\alpha\otimes\mathbf{G}_\beta)$. 其内在关系为:

$$\boldsymbol{\sigma}=j\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T=j\boldsymbol{\tau}\mathbf{E}^T \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{F}\mathbf{S}=J(\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) \tag{1.6}$$

$$\mathbf{S}=J(\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-1T})=\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau} \tag{1.7}$$

此处 j 为体积元变形前后的体积比，$J=1/j$. 另外，在讨论势能率问题时，常用到加权的 Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{S}=J\boldsymbol{\sigma}$.

令 Ω^0 及 Γ^0 为参考构形 $\mathscr{B}^0$ 中的物质体积和边界，Ω 及 Γ 为 $\mathscr{B}$ 构形中的体积和边界. 不计体积力，平衡方程可以写成:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla=0 \qquad (\text{在}\,\Omega\,\text{内}) \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla^0=0 \qquad (\text{在}\,\Omega_0\,\text{内}) \tag{1.9}$$

$$(\mathbf{F}\mathbf{S})\cdot\nabla^0=0 \qquad (\text{在}\,\Omega_0\,\text{内}) \tag{1.10}$$

在以上涉及的应力张量中，只有 Cauchy 应力具有直接的物理意义: 当其作用在当前构形 $\mathscr{B}$ 中的单位矢量 $\mathbf{n}$ 上时，其给出单位面元上的接触力:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}=\mathbf{T} \qquad (\text{在}\,\Gamma_0\,\text{上}) \tag{1.11}$$

令 $\mathbf{N}$ 为 $\mathscr{B}^0$ 中单位法向量，a 为变形前后的面积效，于是有:

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{N}=\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{N}=T=a\mathbf{T} \qquad (\text{在}\,\Gamma_t\,\text{上}) \tag{1.12}$$

在加载过程中，若真实表面力 $\mathbf{T}$ 给定，则 Lagrangian 类的表面力 $\boldsymbol{T}_0$ 将取决于构形的变形. 于是参照当前构形 $\mathscr{B}$，边界条件应为:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}=\bar{\mathbf{T}} \qquad (\text{在}\,\Gamma_t\,\text{上}) \tag{1.13}$$

$$\mathbf{u}=0 \qquad (\text{上}\,\Gamma_u\,\text{上}) \tag{1.14}$$

此处 $\Gamma_t\cup\Gamma_u=\Gamma=\partial\Omega$.

二、势能率及控制方程

本文将使用所谓的 Updated Lagrangian 格式描述弹塑性率问题，亦即当前构形之后的无限小变形状态 $\mathscr{B}'$ 中的场变量以 $\mathscr{B}$ 为参考构形，而且 $\mathscr{B}$ 中的场变量均为已知量. 令 $\mathbf{v}$ 表示物体质点由 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}'$ 的位移率，在 $\mathbf{v}$ 关于坐标 x_i 一阶导数精度下，应变率应为:

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}\nabla+\nabla\mathbf{v})=\mathbf{L}-\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{在}\,\Omega\,\text{内}) \tag{2.1}$$

此处 $\mathbf{L}=\mathbf{v}\nabla$ 为速率梯度，$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}\nabla-\nabla\mathbf{v})$ 为旋率. 令 $\mathring{\mathbf{s}}=\dot{\mathbf{s}}-\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}$ 表示加权Kirchhoff应力张量的 Jaumann 率，于是有[1]

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\mathring{\mathbf{s}}-\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{在}\,\Omega\,\text{内}) \tag{2.2}$$

$$\dot{\mathbf{S}}=\mathring{\mathbf{s}}-\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D} \qquad (\text{在}\,\Omega\,\text{内}) \tag{2.3}$$

对于经典弹塑性介质，根据 Hill[2]，有势能率 $\dot{V}$ 存在，并满足

$$\mathring{\mathbf{s}}=\frac{\partial\dot{V}}{\partial\mathbf{D}} \tag{2.4}$$

$$\dot{V}=\frac{1}{2}\mathsf{L}_{ijkl}D_{ij}D_{kl}-\frac{\alpha}{g}(\lambda_{kl}D_{kl})^2 \tag{2.5}$$

此处L_{ijkl}为瞬时弹性模量张量，并假设为在$ij\leftrightarrow kl$变换下正定对称的，$\alpha=1$或0取决于$\lambda_{kl}D_{kl}$是正和负，λ_{ij}为应变率空间中垂直于弹、塑性交界超平面的张量。考虑到方程(2.2)，(2.3)，若势率$\dot{V}$对$\dot{\mathbf{S}}$存在，则同样存在着$\dot{W}$和$\dot{U}$：

$$\dot{W}=\dot{V}-\sigma:(\mathbf{DD}) \tag{2.6}$$

$$\dot{U}=\dot{V}-\sigma:(\mathbf{DD})+\frac{1}{2}\sigma:(\mathbf{L}^T\mathbf{L})$$

$$=\dot{W}+\frac{1}{2}\sigma:(\mathbf{L}^T\mathbf{L}) \tag{2.7}$$

并且满足

$$\dot{\mathbf{S}}=\frac{\partial\dot{W}}{\partial\mathbf{D}}\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.8}$$

$$\dot{\tau}=\frac{\partial\dot{U}}{\partial\mathbf{L}^T}\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.9}$$

对于合理的材料，$\partial\dot{W}(\mathbf{D})/\partial\mathbf{D}$为单调算子，满足$\langle\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2,\ \partial\dot{W}(\mathbf{D}_1)/\partial\mathbf{D}-\partial\dot{W}(\mathbf{D}_2)/\partial\mathbf{D}\rangle\geqslant0$，亦即$\dot{W}(\mathbf{D})$为凸的。利用 Legendre-Fenchel 变换[5]，可以得到$\dot{W}(\mathbf{D})$的共轭函数：

$$\dot{W}^*(\dot{\mathbf{S}})=\sup_{\mathbf{D}}\{\langle\dot{\mathbf{S}},\ \mathbf{D}\rangle-\dot{W}(\mathbf{D})\} \tag{2.10}$$

于是我们有(2.8)式的逆形式：

$$\mathbf{D}=\frac{\partial\dot{W}^*(\dot{\mathbf{S}})}{\partial\dot{\mathbf{S}}} \tag{2.11}$$

由于$\dot{\tau}$表示为参照于构形$\mathscr{B}$的 Lagrangian 应力率，则率平衡方程可写成：

$$\dot{\tau}\cdot\nabla=0\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.12}$$

相应地边界条件应为：

$$\dot{\tau}\mathbf{n}=\dot{T}\qquad(\text{在}\Gamma_s\text{上}) \tag{2.13}$$

$$\mathbf{v}=0\qquad(\text{在}\Gamma_u\text{上}) \tag{2.14}$$

此处$\dot{T}$表示构形由$\mathscr{B}$变形到$\mathscr{B}'$时表面力的变化。对于死载荷力系[3]，$\dot{T}$恒为零。对于一般力系，$\dot{T}$不仅取决于表面载荷强度的变化，同时依赖于表面力变化方式。

注意到式(1.6)，有

$$\dot{\tau}=\mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}+\dot{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{S}}=J(\mathbf{F}^{-1}\dot{\sigma})+\dot{J}(\mathbf{F}^{-1}\sigma)+J(\dot{\mathbf{F}}^{-1}\sigma) \tag{2.15}$$

此处J与$\mathbf{F}$是在$\mathscr{B}'$中参照于$\mathscr{B}$而度量的，且$\dot{J}=\mathrm{tr}\mathbf{L}J=\mathrm{tr}\mathbf{L}$，$\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{LF}=\mathbf{L}$，于是有

$$\dot{\tau}=\dot{\mathbf{S}}+\mathbf{L}\sigma=\dot{\sigma}+(\mathrm{tr}\mathbf{L})\sigma-\mathbf{L}\sigma\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.16}$$

因此平衡方程(2.12)可以写成下列形式：

$$\dot{\mathbf{S}}\cdot\nabla+(\mathbf{L}\sigma)\cdot\nabla=0\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial\dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}-\sigma_{ij,p}v_{p,j}=0\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.18}$$

由(2.9)式，本构方程可$\dot{\sigma}$以表示成：

$$\dot{\sigma}=-(\mathrm{tr}\mathbf{L})\sigma+\mathbf{L}\sigma+\sigma\mathbf{L}^T+\frac{\partial\dot{W}}{\partial\mathbf{D}}\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.19}$$

于是大变形弹塑性率问题即为求速度$\mathbf{v}$，应变率$\mathbf{D}$，应力率$\dot{\sigma}$或$\dot{\tau}$，或$\dot{\mathbf{S}}$，并使其满足

1. 几何方程(2.1)；
2. 本构方程(2.8)，或(2.9)，或(2.19)；
3. 平衡方程(2.12)，或(2.17)，或(2.18)；
4. 边界条件(2.13)，(2.14).

三、加载系统的描述

在平衡构形$\mathscr{B}$中，具有外法线向量 $\mathbf{n}$ 的单位面无承受表面载荷 $d\mathbf{P}=\mathbf{T}d\Gamma$ 可以表示为：

$$d\mathbf{P}=\mathbf{T}d\Gamma=(\|\mathbf{T}\|d\Gamma)\mathbf{T}/\|\mathbf{T}\|=(\nu d\Gamma)\mathbf{t} \tag{3.1}$$

此处 $\nu=\|\mathbf{T}\|\geqslant0$ 为载荷密度，$\mathbf{t}=\mathbf{T}/\|\mathbf{T}\|$ 为沿$\mathbf{T}$方向的单位矢量.

令 $\boldsymbol{\mu}$ 表示为$d\Gamma$上包含 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{t}$ 平面上切于线元 dL 的单位矢量. 在平衡构形$\mathscr{B}'$中，变形将$d\Gamma$映射成$d\Gamma'$，相应的法向量为$\mathbf{n}'$，同时将dL映射成dL'，相应的切矢量为$\boldsymbol{\mu}'$，并满足

$$d\Gamma'=ad\Gamma \tag{3.2}$$

$$d\Gamma'=bd\Gamma \tag{3.3}$$

$$\mathbf{t}'=\boldsymbol{\gamma}\mathbf{t} \tag{3.4}$$

此处a、b分别为面积率和线率，$\boldsymbol{\gamma}=\gamma_{ij}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j$为参照于$\mathscr{B}$的 Lagrangian 型反对称张量. 它们均取决于由$\mathscr{B}$到$\mathscr{B}'$的变形. 令$d\mathbf{P}'$表示为$\mathscr{B}'$中作用在$d\Gamma'$上的表面力，则有

$$d\mathbf{P}'=\mathbf{T}'d\Gamma'=(\nu'd\Gamma')\mathbf{t}'=a(\nu'd\Gamma)\boldsymbol{\gamma}\mathbf{t} \tag{3.5}$$

于是表面载荷率应为：

$$\begin{aligned}d\dot{\mathbf{P}}&=(\dot{\nu}d\Gamma)\mathbf{t}+\dot{a}(\nu d\Gamma)\mathbf{t}+(\nu d\Gamma)\dot{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{t}\\&=(\dot{\nu}/\nu\mathbf{I}+\dot{a}\mathbf{I}+\dot{\boldsymbol{\gamma}})\mathbf{T}d\Gamma\qquad(\text{在}\Gamma_t\text{内})\end{aligned} \tag{3.6}$$

在变形梯度率的一阶精度下，容易证明

$$\dot{a}=\mathrm{tr}\mathbf{L}-\mathbf{n}\mathbf{L}\mathbf{n}=(\delta_{ij}-n_in_j)v_{i,j} \tag{3.7}$$

$$\dot{\mathbf{n}}=((\mathbf{n}\mathbf{L}\mathbf{n})\mathbf{I}-(\nabla\mathbf{v}))\mathbf{n}=(\delta_{ij}n_kv_{k,l}n_l-v_{j,i})n_j\mathbf{g}_i \tag{3.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}=(\mathbf{v}\nabla-(\boldsymbol{\mu}\mathbf{L}\boldsymbol{\mu})\mathbf{I})\boldsymbol{\mu}=(v_{i,j}-\delta_{ij}\mu_kv_{k,l}\mu_l)\mu_j\mathbf{g}_i \tag{3.9}$$

它们均为$\mathbf{v}\nabla$的线性齐次函数. 令

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{v}\nabla)=\mathbf{R}_{ijkl}v_{k,l}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j \tag{3.10}$$

$$\mathbf{K}_{ij}=[(\delta_{ik}\delta_{jl}-n_in_k\delta_{ij}\delta_{kl})+\mathbf{R}_{ikjl}]T_k\frac{\partial}{\partial x_l} \tag{3.11}$$

此处$\mathbf{R}_{ijkl}$为四阶张量，于是表面载荷率可写成

$$\dot{T}(\mathbf{v})=\dot{\mathbf{T}}_0+\mathbf{K}_{ij}v_j\mathbf{g}_i. \tag{3.12}$$

其中 $\dot{\mathbf{T}}_0=\dot{\nu}/\nu\mathbf{T}$，算子张量$\mathbf{K}_{ij}$取决于表面$\Gamma$上的加载条件. 本文仅考虑保守加载力系. 根据 Sewell[4]，载荷(3.12)作用在表面一质点$\mathbf{x}$上被称为保守载荷，如果存在一势函数

$$D=D(\mathbf{v},\mathbf{x}) \tag{3.13}$$

对于同一质点 $\mathbf{x}$ 且满足

$$-\dot{T}=\frac{\partial D}{\partial\mathbf{v}}\text{ 和 }-\dot{T}\delta\mathbf{v}=\delta D(\mathbf{v},\mathbf{x})\qquad(\forall\,\mathbf{x}\in\Gamma) \tag{3.14}$$

可以证明，存在这一势函数的充要条件是：

$$\frac{\partial\dot{T}_i}{\partial v_j}-\frac{\partial\dot{T}_j}{\partial v_i}=0 \tag{3.15}$$

考虑到(3.12)式，不难发现保守加载意味着对称性：

$$\mathbf{K}_{ij}=\mathbf{K}_{ji} \tag{3.16}$$

于是有：

$$D(\mathbf{v})=-\int_{\Gamma_t}\left[\dot{\mathbf{T}}_0\mathbf{v}+\frac{1}{2}\mathbf{vKv}\right]d\Gamma \tag{3.17}$$

下面将讨论几种重要保守加载情况：

（1） 限制性死载荷($\mathbf{t}=\text{const}$，$\nu d\dot{\Gamma}$已知)：

$$d\dot{\mathbf{P}}=\dot{\nu}d\dot{\Gamma}\,\mathbf{t}=\left(\frac{\dot{\nu}}{\nu}+\dot{a}\right)d\mathbf{P}=\dot{c}\mathbf{T}d\Gamma \tag{3.18}$$

此处 c 为一常数．该力系构成一保守力场：

$$D(\mathbf{v})=-\int_{\Gamma_t}c\mathbf{T}\mathbf{v}d\Gamma \tag{3.19}$$

（2） 静水压力载荷($\mathbf{t}=-\mathbf{n}$，$\nu=\|p(t)\|$)：

$$d\mathbf{P}'=\mathbf{T}'d\Gamma'=-a(pd\Gamma)\mathbf{n}' \qquad (\text{在}\Gamma'\text{上}) \tag{3.20}$$

注意到关系(3.7)，(3.8)式，有

$$\dot{T}=-\dot{p}n_i\mathbf{g}_i-p(n_jv_{j,i}-n_iv_{j,j})\mathbf{g}_i, \tag{3.21}$$

当此载荷拓广到整个表面Γ，即构成一保守力场，相应的势泛函应为：

$$\begin{aligned}D(\mathbf{v})&=\int_{\Gamma_t}\dot{p}n_iv_id\Gamma+\int_{\Gamma_t}\frac{1}{2}pv_i(n_jv_{j,i}-n_iv_{j,j})d\Gamma\\&=\int_{\Gamma_t}\dot{p}n_iv_id\Gamma+\int_{\Omega}\frac{1}{2}p(v_{i,j}v_{j,i}-v_{i,i}v_{j,j})d\Gamma\end{aligned} \tag{3.22}$$

（3） 均匀法向加载力系($\mathbf{T}=-\nu\mathbf{n}=\text{const}$)：

$$d\dot{\mathbf{P}}=\dot{a}d\mathbf{P}，\ \dot{T}=\dot{a}\mathbf{T} \tag{3.23}$$

相应的势泛函数为：

$$D(\mathbf{v})=-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_t}\nu\mathbf{vn}\dot{a}d\Gamma=\int_{\Gamma_t}\nu H(\mathbf{vn})^2d\Gamma \tag{3.24}$$

这里 H为Γ_t表面的平均曲率，$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$[6,7]．

（4） 一般法向加载 ($\mathbf{T}=-\nu\mathbf{n}=\text{const}$)：

$$d\dot{\mathbf{P}}=-(\nu d\Gamma)\dot{\mathbf{n}}=\dot{a}(\nu d\Gamma)\mathbf{n}+(\nu d\Gamma)(v_{j,i}-\delta_{ij}v_{k,k})n_j\mathbf{g}_i, \tag{3.25}$$

其也构成一保守力场：

$$D(\mathbf{v})=-\int_{\Gamma_t}\nu\mathbf{R}(\mathbf{vn})^2d\Gamma-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\nu(v_{i,i}v_{j,j}-v_{i,j}v_{j,i})d\Gamma \tag{3.26}$$

四、对偶变分原理

令$\mathscr{V}$为一许可速度空间，$\mathscr{V}_a\subset\mathscr{V}$为运动许可子集：

$$\mathscr{V}_a=\{v\in\mathscr{V}\,|\,v=0\quad \text{在}\Gamma_u\text{上}\} \tag{4.1}$$

于保守加载力系，率问题的总势能应为：

$$P(v)=\int_{\Omega}\dot{U}(\mathbf{v}\nabla)d\Omega+D(v)$$

$$=\int_{\Omega}\dot{W}(\mathbf{D}(\mathbf{v}))d\Omega+G(\mathbf{v})+D(\mathbf{v}) \tag{4.2}$$

此处 G：$\mathscr{V}\to R$即是所谓的间隙函数：

$$G(\mathbf{v})=\int_{\Omega}\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:[(\nabla\mathbf{v})(\mathbf{v}\nabla)]d\Omega \tag{4.3}$$

它在非线性变分边值问题分析中起到重要的作用[5]。

定理 1 对于任给定的 $\mathbf{v}\in\mathscr{V}_a$，$P$的临界点$\bar{\mathbf{v}}$为率问题的解。并且若间隙函数$G$是非负的：

$$G(\mathbf{v})\geqslant 0 \qquad (\forall\,\mathbf{v}\in\mathscr{V}_a) \tag{4.4}$$

则临界点$\bar{\mathbf{v}}$使P达到最小：

$$P(\bar{\mathbf{v}})=\inf_{\mathbf{v}\in\mathscr{U}_a}P(\mathbf{v}) \tag{4.5}$$

此外，若$\mathscr{V}_a$为自反 Banach 空间中的一有界子集，则问题(4.5)至少有一解；若间隙函数G为严格正的，则解必唯一。

证明 易证由驻值条件 $\delta P(\bar{\mathbf{v}})=0$ 可得如下 Euler-Lagrangian 方程：

$$\frac{\partial\dot{U}(\mathbf{L}(\bar{\mathbf{v}}))}{\partial\mathbf{L}}\cdot\nabla=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\dot{U}(\mathbf{L}(\bar{\mathbf{v}}))}{\partial\mathbf{L}}\mathbf{n}=\dot{T} \qquad (\text{在}\Gamma_s\text{上}) \tag{4.7}$$

显然$\bar{\mathbf{v}}$为率问题的解。

另外，由$\dot{W}$和D的凸性，对于任意给定的 $\mathbf{v}\in\mathscr{V}_a$ 及相关连的 $\mathbf{D}(\mathbf{v})$，由物理关系$\dot{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{v}})=\partial\dot{W}(\bar{\mathbf{D}})/\partial\mathbf{D}$ 及 $-\dot{T}(\bar{\mathbf{v}})=\partial D(\bar{\mathbf{v}})/\partial\mathbf{v}$ 导致如下变分不等式：

$$\int_{\Omega}[\dot{W}(D(\mathbf{v}))-\dot{W}(D(\bar{\mathbf{v}}))]d\Omega+D(\mathbf{v})-D(\bar{\mathbf{v}})$$

$$\geqslant\int_{\Omega}\dot{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{v}}):(D(\mathbf{v})-D(\bar{\mathbf{v}}))d\Omega-\int_{\Gamma_t}\dot{T}(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}})d\Gamma \qquad (\forall\,\mathbf{v}\in\mathscr{V}_a) \tag{4.8}$$

令 $\mathbf{v}=\bar{\mathbf{v}}+\delta\mathbf{v}$，容易得到

$$G(\mathbf{v})-G(\bar{\mathbf{v}})=\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}:[(\nabla\bar{\mathbf{v}})(\delta\mathbf{v}\nabla)]d\Omega+G(\delta\mathbf{v}) \tag{4.9}$$

将(4.9)式加入(4.8)式，并利用 Gauss-Green 公式，整理得：

$$P(\mathbf{v})-P(\bar{\mathbf{v}})\geqslant\int_{\Omega}\{\dot{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{v}}):(\delta\mathbf{v}\nabla)+\boldsymbol{\sigma}:[(\nabla\bar{\mathbf{v}})(\delta\mathbf{v}\nabla)]\}d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_t}-\dot{T}\delta\mathbf{v}d\Gamma+G(\delta\mathbf{v})$$

$$=\int_{\Omega}-\delta\mathbf{v}[(\dot{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{v}})+(\bar{\mathbf{v}}\nabla)\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla]d\Omega+G(\delta\mathbf{v})$$

$$+\int_{\Gamma_s}[\mathbf{n}(\dot{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{v}})+\mathbf{L}(\bar{\mathbf{v}})\boldsymbol{\sigma})-\dot{T}]\delta\mathbf{v}d\Gamma$$

$$=G(\delta\mathbf{v}) \qquad (\forall\,\mathbf{v}\in\mathscr{V}_a) \tag{4.10}$$

显然若 $G(\mathbf{v})\geqslant 0$ $(\forall \mathbf{v}\in\mathscr{U}_a)$，即有

$$P(\mathbf{v})-P(\bar{\mathbf{v}})\geqslant 0 \qquad (\forall \mathbf{v}\in\mathscr{U}_a) \tag{4.11}$$

此即证明$\bar{\mathbf{v}}$在$\mathscr{U}_a$上使P取极小．因为$\mathscr{U}_a$为一自反 Banach 空间中一有界子集，根据凸分析理论，极小化问题(4.5)在$\mathscr{U}_a$上至少有一解．若$G(\mathbf{v})>0$ $(\forall \mathbf{v}\in\mathscr{U}_a)$，则$P$为$\mathscr{U}_a$上严格凸的，因此问题(4.5)有唯一的解．证毕．

对于一般保守力系，欲求得 $D(\mathbf{v})$ 的共轭泛函是十分困难的．这里假设在加载过程中，表面力率$\dot{T}$是已知的，则势$D(\mathbf{v})$是$\mathbf{v}$的线性泛函．此时P可写成：

$$\Pi(D,\mathbf{v})=\int_\Omega \dot{W}(D)d\Omega+G(\mathbf{v})-\int_\Gamma \dot{T}\mathbf{v}d\Gamma+\Psi_{\mathscr{U}_a}(\mathbf{v}) \tag{4.12}$$

其中 $\Psi_{\mathscr{U}_a}$为子集$\mathscr{U}_a$的指标函数：

$$\Psi_{\mathscr{U}_a}(\mathbf{v})=\begin{cases}0 & (\text{当}\mathbf{v}\in\mathscr{U}_a)\\ +\infty & (\text{其它情况})\end{cases} \tag{4.13}$$

利用 Legendre-Fenchel 变换[5]，可求得Π的共轭泛函：

$$\Pi^*(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{u})=\sup_D\sup_{\mathbf{v}}\left\{\int_\Omega \dot{\mathbf{S}}:Dd\Omega+\int_\Omega \mathbf{v}(\dot{\mathbf{S}}\cdot\nabla)d\Omega+\int_\Gamma -\mathbf{v}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{n}d\Gamma-\Pi(D,\mathbf{v})\right\}$$

$$=\int_\Omega \dot{W}^*(\dot{\mathbf{S}})d\Omega+G(\mathbf{u})+\Psi_{\Sigma_a}(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{u}) \tag{4.14}$$

其中Ψ_{Σ_a}为子集Σ_a的指标函数：

$$\Psi_{\Sigma_a}(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})=\begin{cases}0 & (\text{当}(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})\in\Sigma_a)\\ +\infty & (\text{其它情况})\end{cases} \tag{4.15}$$

Σ_a 为静力许可集合：

$$\Sigma_a=\{(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})\mid(\dot{\mathbf{S}}+(\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla=0 \quad (\text{在}\ \Omega\ \text{内}),$$
$$(\dot{\mathbf{S}}+(\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}-\dot{T}=0 \quad (\text{在}\ \Gamma\ \text{上})\} \tag{4.16}$$

对于任意给定的静力许可场 $(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})\in\Sigma_a$，令

$$P^*(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})=-\int_\Omega \dot{W}^*(\dot{\mathbf{S}})d\Omega-G(\mathbf{u}) \tag{4.17}$$

于是有对偶变分原理：

定理 2 对于任意给定的$(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})\in\Sigma_a$，在静力许可场$\Sigma_a$中，$P^*$ 的临界点 $(\bar{\dot{\mathbf{S}}},\bar{\mathbf{v}})$ 为率问题的解．若$G(\mathbf{v})\geqslant 0$ $\forall \mathbf{v}\in\mathscr{U}_a$，则临界点使$P^*$取极大值：

$$P^*(\bar{\dot{\mathbf{S}}},\bar{\mathbf{v}})=\sup_{(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})\in\Sigma_a}P^*(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v}) \tag{4.18}$$

此外，若Σ_a为自反 Banach 空间中的一个有界子集，则极值问题(4.18)至少存在一个解．若间隙函数$G(\mathbf{v})$为严格正的，则解唯一．

证明 这里仅证明若间隙函数非负，则 (4.18) 式成立．由 $\dot{W}^*$ 的凸性，本构方程 $\bar{\mathbf{D}}=\dfrac{\partial \dot{W}^*(\bar{\dot{\mathbf{S}}})}{\partial\dot{\mathbf{S}}}$ 导致如下变分不等式：

$$\int_\Omega[\dot{W}^*(\dot{\mathbf{S}})-\dot{W}^*(\bar{\dot{\mathbf{S}}})]d\Omega\geqslant\int_\Omega \bar{\mathbf{D}}:(\dot{\mathbf{S}}-\bar{\dot{\mathbf{S}}})d\Omega \qquad (\forall \dot{\mathbf{S}}\in\Sigma) \tag{4.19}$$

将(4.9)加入(4.19)式，利用 Gauss-Green 定理，有

$$P^*(\dot{\mathbf{S}},\bar{\mathbf{v}})-P^*(\dot{\mathbf{S}},\mathbf{v})\geqslant\int_\Omega -\bar{\mathbf{v}}[\dot{\mathbf{S}}+(\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\sigma}]\cdot\nabla d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma}\bar{\mathbf{v}}[(\dot{\mathbf{S}}+(\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}-\dot{\boldsymbol{T}}]d\Gamma+G(\delta\mathbf{v})$$

$$=G(\delta\mathbf{v})\qquad(\forall(,\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v})\in\Sigma_a)\tag{4.20}$$

由于间隙函数的非负性，即得证$(\dot{\mathbf{S}},\dot{\boldsymbol{T}})$使$P^*$取极大值．证毕．

参考文献

[1] Atluri, S. N. On some new general and complementary energy theorems for the rate problems in finite strain, classical elastoplasticity, *J. Struc. Mech*, **8**, 1 (1980), 61—92.

[2] Hill, R., Aspects of invariance in solid mechanics, *Adv. Appl. Mech.*, **18**, (1978), 1—75.

[3] Nemat-Nasser, S., On local stability of a finite deformed solid subjected to follower type loads, *Quart. Appl. Math.*, **26**, 1 (1968), 119—129.

[4] Sewell, M. J. On configuration-dependent loading, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **23** (1966/67), 327—351.

[5] Gao Yang and G. Strang, Geometrical nonlinearity: potential energy, complementary energy and gap function (to appear).

[6] Horak, V., Inverse variational principles of continuum mechanics, *Rozpravy Ceskoslovenske Akademie, Ved Rocnik*, **79** (1969).

[7] Gao, Y., Inverse variational principle in finite elasticty, *Mechanics Research Communications* (1988).

Rate Variational Extremum Principles for Finite Elastoplasticity

Gao Yang

(Department of Forecasting & Development Research, Hefei University of Technology, Hefei)

E. T. Onat

(Department of Mechanical Engineering, Yale University, New Haven, U. S A.)

Abstract

Dual variational extremum principles for rate problems of classical eastoplasticity at finite deformation are studied in Updated Lagrangian rate forms. It is proved that the connexity of the variational functionals are closely related to a so-called gap function, which plays an important role in nonlinear variational problems.