应用数学和力学，第11卷第7期（1990年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线弹性正交异性复合材料板 Ⅰ、Ⅱ型裂纹尖端的J积分*

杨维阳　张少琴

（太原重型机械学院，1989年5月22日收到）

摘　要

本文借助于复变函数方法，通过将 J 积分化为复形式，首先证明了线弹性正交异性复合材料板Ⅰ、Ⅱ型裂纹尖端附近的 J 积分的路径无关性，继而推出了该 J 积分在 $\Delta<0$ 和 $\Delta>0$ 两种情况下的计算公式．这对于将 J 积分应用于复合材料平面断裂的理论研究和实验校核中去，具有一定的参考价值．

一、预　备　知　识

在文[1]～[5]中给出了线弹性正交异性复合材料板Ⅰ，Ⅱ型裂纹尖端附近的应力场、应变场和位移场的解析解．现将在推导 J 积分计算公式的过程中所要用到的有关结论摘录如下：

1.1　基本方程及其特征根

若定义应力函数

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \tag{1.1}$$

则线弹性正交异性复合材料板平面应力状态的基本方程是

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{b_{22}}\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{b_{11}}{b_{22}}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0 \tag{1.2}$$

其中 $b_{11}=\dfrac{1}{E_x}$，$b_{12}=-\dfrac{\nu_{xy}}{E_x}=-\dfrac{\nu_{yx}}{E_y}$，$b_{22}=\dfrac{1}{E_y}$，$b_{66}=\dfrac{1}{G_{xy}}$

皆由所给复合材料的弹性常数所确定．

基本方程(1.2)的特征方程为

$$1+\frac{2b_{12}+b_{66}}{b_{22}}s^2+\frac{b_{11}}{b_{22}}s^4=0 \tag{1.3}$$

* 李灏推荐．

这是一个双二次方程，其判别式

$$\Delta=\left(\frac{2b_{12}+b_{66}}{b_{22}}\right)^2-4\frac{b_{11}}{b_{22}} \tag{1.4}$$

（1） 当$\Delta<0$时，(1.2)的特征根是两对共轭复根：

$$s_1=\alpha+i\beta,\quad s_2=-\alpha+i\beta,\quad s_3=\bar{s}_1,\quad s_4=\bar{s}_2 \tag{1.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}2\alpha^2&=\sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}}}-\frac{2b_{12}+b_{22}}{2b_{11}} \quad (\alpha>0)\\ 2\beta^2&=\sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}}}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}} \quad (\beta>0)\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

（2） 当$\Delta>0$时，(1.2)的特征根是两对共轭纯虚根：

$$s_1=i\beta_1,\quad s_2=i\beta_2,\quad s_3=\bar{s}_1,\quad s_4=\bar{s}_2 \tag{1.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\beta_1^2&=\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}-\sqrt{\left(\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right)^2-\frac{b_{22}}{b_{11}}} \quad (\beta_1>0)\\ \beta_2^2&=\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}+\sqrt{\left(\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right)^2-\frac{b_{22}}{b_{11}}} \quad (\beta_2>0)\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

1.2 Ⅰ型裂纹尖端附近应力场、位移场的解析解

按照所给复合材料的弹性常数使得Δ所取的符号分别两种情况.

（1） 对于$\Delta<0$的复合材料

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\left\{\alpha{\rm Re}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right.\\ &\quad\left.-\beta{\rm Im}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right\}\\ \sigma_y&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha{\rm Re}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right.\\ &\quad\left.+\beta{\rm Im}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right\}\\ \tau_{xy}&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}{\rm Re}\left[-\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\alpha}\{\alpha[b_{11}(\alpha^2+\beta^2)+b_{12}]{\rm Re}[(z_1-a)^{\frac12}+(z_2-a)^{\frac12}]\\ &\quad-\beta[b_{11}(\alpha^2+\beta^2)-b_{12}]{\rm Im}[(z_1-a)^{\frac12}-(z_2-a)^{\frac12}]\}\\ v&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\{[b_{12}(\alpha^2+\beta^2)^2\\ &\quad+b_{22}(\alpha^2-\beta^2)]{\rm Re}[(z_1-a)^{\frac12}-(z_2-a)^{\frac12}]\\ &\quad+2b_{22}\alpha\beta{\rm Im}[z_1-a)^{\frac12}+(z_2-a)^{\frac12}]\}\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

其中

$$z_j=x+s_jy=x+[(-1)^{j-1}\alpha+i\beta]y=x_j+iy_j \qquad (j=1,\ 2) \tag{1.11}$$

（2） 对于$\Delta>0$的复合材料

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Re}\left[-\frac{\beta_1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{\beta_2}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\\ \sigma_y&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Re}\left[\frac{\beta_2}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{\beta_1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\\ \tau_{xy}&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{2}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Re}[-\beta_2(b_{11}\beta_1^2-b_{12})(z_1-a)^{\frac12}\\&\quad+\beta_1(b_{11}\beta_2^2-b_{12})(z_2-a)^{\frac12}]\\ v&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{2}{\beta_1\beta_2(\beta_2-\beta_1)}\mathrm{Im}[-\beta_2^2(b_{12}\beta_1^2-b_{22})(z_1-a)^{\frac12}\\&\quad+\beta_1^2(b_{12}\beta_2^2-b_{22})(z_2-a)^{\frac12}]\end{aligned}\right\}\tag{1.13}$$

其中

$$z_j=x+s_jy=x+i\beta_jy=x_j+iy_j\qquad(j=1,\ 2)\tag{1.14}$$

1.3 Ⅰ型裂纹尖端附近应力场、位移场的解析解

（1） 对于Δ<0的复合材料

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{2\alpha}\left\{-(\alpha^2-\beta^2)\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right.\\&\quad\left.+2\alpha\beta\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right\}\\ \sigma_y&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{2\alpha}\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\\ \tau_{xy}&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right.\\&\quad\left.-\beta\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\right\}\end{aligned}\right\}\tag{1.15}$$

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\alpha}\{-[b_{11}(\alpha^2-\beta^2)+b_{12}]\mathrm{Re}[(z_1-a)^{\frac12}-(z_2-a)^{\frac12}]\\&\quad+2b_{11}\alpha\beta\,\mathrm{Im}[(z_1-a)^{\frac12}+(z_2-a)^{\frac12}]\}\\ v&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\{-\alpha[b_{12}(\alpha^2+\beta^2)+b_{22}]\mathrm{Re}[(z_1-a)^{\frac12}\\&\quad+(z_2-a)^{\frac12}]+\beta[b_{12}(\alpha^2+\beta^2)-b_{22}]\mathrm{Im}[(z_1-a)^{\frac12}-(z_2-a)^{\frac12}]\}\end{aligned}\right\}\tag{1.16}$$

（2） 对于Δ>0的复合材料

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Im}\left[-\frac{\beta_1^2}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{\beta_2^2}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\\ \sigma_y&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\\ \tau_{xy}&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac12}}\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\mathrm{Re}\left[-\frac{\beta_1}{(z_1-a)^{\frac12}}+\frac{\beta_2}{(z_2-a)^{\frac12}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.17}$$

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{\beta_2-\beta_1}{\rm Im}[-(b_{11}\beta_1^2-b_{12})(z_1-a)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad+(b_{11}\beta_2^2-b_{12})(z_2-a)^{\frac{1}{2}}]\\ v&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{\beta_1\beta_2(\beta_2-\beta_1)}{\rm Re}[\beta_2(b_{12}\beta_1^2-b_{22})(z_1-a)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad-\beta_1(b_{12}\beta_2^2-b_{22})(z_2-a)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

1.4 应力-应变关系

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x&=b_{11}\sigma_x+b_{12}\sigma_y\\ \varepsilon_y&=b_{12}\sigma_x+b_{22}\sigma_y\\ \gamma_{xy}&=b_{66}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

1.5 柯西-古萨定理

设c是一条简单闭曲线，设$f(z)$在以c为边界的有界闭区域上解析，那么

$$\oint_c f(z)dz=0 \tag{1.20}$$

二、J 积分的一般概念

J 积分在断裂力学中有着很重要的地位．已知[5],[6]

$$J=\int_\Gamma W dy-\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}ds \tag{2.1}$$

其中 Γ 是环绕裂纹尖端从裂纹下表面一点逆时针方向走到上表面一点的任意积分迴路．W 为应变能密度函数，对平面应力状态有

$$W=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy}) \tag{2.2}$$

而$\mathbf{T}$为积分迴路Γ上的张力：

$$\mathbf{T}=[\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)]\mathbf{i}+[\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)]\mathbf{j}$$

$\mathbf{u}$为积分迴路Γ上的位移向量：

$$\mathbf{u}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}$$

于是

$$\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}ds=\left(\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy-\left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \tag{2.3}$$

将(2.2)，(2.3)代入(2.1)得到

$$J=\int_\Gamma\left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$$

$$+\left[\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})-\left(\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dy \tag{2.4}$$

利用应变-位移关系

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\tag{2.5}$$

以及应力-应变关系(1.19)，则(2.4)可化为

$$J=\int_\Gamma\left[(b_{11}\sigma_x+b_{12}\sigma_y)\tau_{xy}+\sigma_x\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx$$

$$+\left[-\frac{1}{2}(b_{11}\sigma_x^2-b_{22}\sigma_y^2+b_{66}\tau_{xy}^2)+\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dy\tag{2.6}$$

下面我们通过将应力场、位移场的解析解直接代入上述J积分公式并将其化为复形式，借助于复变函数的概念，公式和定理，首先证明了线弹性正交异性复合材料板Ⅰ，Ⅱ型裂纹尖端附近的J积分的路径无关性，继而推出了J积分的计算公式.

三、J积分的复形式

3.1 Ⅰ型裂纹的J积分

（1） 对于$\Delta<0$的复合材料将(1.9)，(1.10)代入(2.6)，注意到(1.6)，有

$$J=\frac{K_1^2}{2\pi}\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\left\{\int_\Gamma\left[-\beta\left(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}\right)\right.\right.$$

$$+2\alpha\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}\Big]dx$$

$$+2(\alpha^2+\beta^2)\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac12}}dy$$

$$+\int_\Gamma\left[\beta\left(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\right)\right.$$

$$+2\alpha\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\Big]dx$$

$$\left.-2(\alpha^2+\beta^2)\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac12}}dy\right\}\tag{3.1}$$

由(1.11)，有

$$dz_j=dx+[(-1)^{j-1}\alpha+i\beta]dy=dx_j+idy_j\tag{3.2}$$

又

$$\frac{1}{z_j-a}=\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_j-a)^{\frac12}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_j-a)^{\frac12}}$$

$$+i2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_j-a)^{\frac12}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_j-a)^{\frac12}}\tag{3.3}$$

$$\int_\Gamma f(z_j)dz_j=\int_\Gamma udx_j-vdy_j+i\int_\Gamma vdx_j+udy_j\tag{3.4}$$

由此(3.1)可改写为复形式

$$J=\frac{K_1^2}{2\pi}\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\mathrm{Im}\left[(\alpha-i\beta)\int_\Gamma\frac{1}{z_1-a}dz_1\right.$$

$$+(\alpha+i\beta)\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big] \tag{3.5}$$

（2） 对于Δ>0的复合材料　将(1.12)，(1.13)代入(2.6)，注意到(1.8)，有

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi}\,\frac{b_{22}}{2}\,\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2(\beta_2-\beta_1)}\Big[\beta_2\int_{\Gamma}2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$+\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)\beta_1 dy$$

$$-\beta_1\int_{\Gamma}2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$+\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)\beta_2 dy\Big] \tag{3.6}$$

由(1.14)，有

$$dz_j=dx+i\beta_j dy=dx_j+idy_j \tag{3.7}$$

注意到(3.3)，(3.4)，则(3.6)可改写为复形式

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi}\,\frac{b_{22}}{2}\,\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2(\beta_2-\beta_1)}\mathrm{Re}\Big[-iB_2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1+i\beta_1\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big] \tag{3.8}$$

3.2　Ⅱ型裂纹的J积分

（1） 对于Δ<0的复合材料　将(1.15)，(1.16)代入(2.6)，并利用(1.6)，得到

$$J=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{2\pi}\,\frac{b_{11}}{2}\,\frac{\beta}{\alpha}\Big\{\int_{\Gamma}\Big[\beta\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$+2\alpha\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dx+2\Big[\alpha\beta\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)+(\alpha^2-\beta^2)\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dy$$

$$+\int_{\Gamma}\Big[-\beta\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$+2\alpha\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dx+2\Big[\alpha\beta\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)-(\alpha^2-\beta^2)\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dy\Big\} \tag{3.9}$$

注意到(3.2)，(3.3)，(3.4)，则(3.9)可改写为复形式

$$J=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{2\pi}\,\frac{b_{11}}{2}\,\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{Im}\Big[(\alpha+i\beta)\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1+(\alpha-i\beta)\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big]$$

(3.10)

（2） 对于Δ>0的复合材料 将(1.17)，(1.18)代入(2.6)，并利用(1.8)，得到

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\Big[-\int_\Gamma 2\beta_1{\rm Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}{\rm Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$+\beta_1^2\Big({\rm Re}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}-{\rm Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)dy$$

$$+\int_\Gamma 2\beta_2{\rm Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}{\rm Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$+\beta_2^2\Big({\rm Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-{\rm Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)dy\Big] \tag{3.11}$$

注意到(3.3)，(3.4)，(3.7)，则(3.11)可改写为复形式

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_2-\beta_1}{\rm Re}\Big[i\beta_1\int_\Gamma\frac{1}{z_1-a}dz_1-i\beta_2\int_\Gamma\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big] \tag{3.12}$$

四、J 积分的路径无关性

4.1 Ⅰ型裂纹的J积分

（1） 对于Δ<0的复合材料 现在证明 J 积分(3.5)即(3.1)与路径无关．由于复变函数 $1/(z_j-a)(j=1,2)$，除点 $z_j=a$ 外是解析的，从而根据柯西-古萨定理(1.20)沿不包括点 $z_j=a$ 的正向封闭迴路 l，如图1所示，有

$$\oint_l\frac{1}{z_j-a}dz_j=0 \qquad (*)$$

其中 $l=\gamma+DB-\Gamma-CA$．注意到 DB 是贴着裂纹上表面的线段，可认为 $y=0$．由(1.11)得到

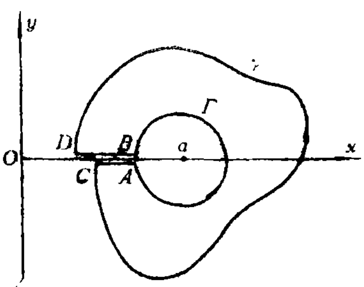

图 1

$${\rm Im}\Big[(\alpha-i\beta)\int_{DB}\frac{1}{z_1-a}dz_1+(\alpha+i\beta)\int_{DB}\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big]$$

$$={\rm Im}\Big[(\alpha-i\beta)\int_D^B\frac{1}{x-a}dx+(\alpha+i\beta)\int_D^B\frac{1}{x-a}dx\Big]=0$$

同理

$${\rm Im}\Big[(\alpha-i\beta)\int_{CA}\frac{1}{z_1-a}dz_1+(\alpha-i\beta)\int_{CA}\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big]=0$$

从而由(*)式得到

$${\rm Im}\Big[(\alpha-i\beta)\int_{\gamma-\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1+(\alpha+i\beta)\int_{\gamma-\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\Big]=0$$

即
$$\mathrm{Im}\left[(\alpha-i\beta)\int_{\gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1+(\alpha+i\beta)\int_{\gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\right]$$
$$=\mathrm{Im}\left[(\alpha-i\beta)\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1+(\alpha+i\beta)\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\right]$$

这说明J积分(3.5)即(3.1)与路径无关.

下面我们只写出结论，其证明与上述相仿，略去.

（2） 对于$\Delta>0$的复合材料 J积分(3.8)即(3.6)与路径无关.

4.2 Ⅱ型裂纹的J积分

（1） 对于$\Delta<0$的复合材料 J积分(3.10)即(3.9)与路径无关.

（2） 对于$\Delta>0$的复合材料 J积分(3.12)即(3.11)与路径无关.

五、J积分的计算公式

5.1 Ⅰ型裂纹的J积分

（1） 对于$\Delta<0$的复合材料 因为J积分(3.5)即(3.1)与路径无关，所以可取Γ为正向小圆周(图1中Γ)，起点$A(r,\ -\pi)$，终点$B(r,\ \pi)$，即

$$\Gamma:\ z_j-a=re^{i\theta}\quad(j=1,2,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

于是
$$\int_{\Gamma}\frac{1}{z_j-a}dz_j=i\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=2\pi i \tag{5.1}$$

代入(3.5)得到

$$J=K_{\rm I}^2 b_{22}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}=K_{\rm I}^2 b_{11}\beta(\alpha^2+\beta^2) \tag{5.2}$$

（2） 对于$\Delta>0$的复合材料 根据前述理由，将(5.1)代入(3.8)得到

$$J=K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2}=K_{\rm I}^2\frac{b_{11}}{2}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2) \tag{5.3}$$

（3） 统一表示式 由(1.5)，(1.7)可知，$\Delta<0$和$\Delta>0$两种情况下的计算公式(5.2)，(5.3)可统一表示为

$$J=K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{(s_1+s_2)i}{s_1s_2}=K_{\rm I}^2\frac{b_{11}}{2}s_1s_2(s_1+s_2)i \tag{5.4}$$

5.2 Ⅱ型裂纹的J积分

（1） 对于$\Delta<0$的复合材料 将(5.1)代入(3.10)得到

$$J=K_{\rm II}^2 b_{11}\beta=K_{\rm II}^2 b_{22}\frac{\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \tag{5.5}$$

（2） 对于$\Delta>0$的复合材料 将(5.1)代入(3.12)得到

$$J=K_{\rm II}^2\frac{b_{11}}{2}(\beta_1+\beta_2)=K_{\rm II}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1^2\beta_2^2} \tag{5.6}$$

（3） 统一表示式 由(1.5)，(1.7)，$\Delta<0$和$\Delta>0$两种情况下的计算公式(5.5)，(5.6)可统一表示为

$$J=-K_{\rm I}^2\frac{b_{11}}{2}(s_1+s_2)i=-K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{s_1+s_2}{s\bar{s}_1s_2\bar{s}_2}i \tag{5.7}$$

最后需要指出，本文采用复变函数方法推出了线弹性正交异性复合材料板Ⅰ，Ⅱ型裂纹尖端附近的J积分在$\Delta<0$和$\Delta>0$两种情况下的计算公式(5.2)，(5.3)和(5.5)，(5.6)以及统一表示式(5.4)，(5.7)．所推出的这些公式，在复合材料平面断裂的理论研究和实验校核中，可供我们根据所给复合材料的弹性常数使得Δ所取的符号适当选择，加以套用；也可供我们造出J积分数值表，随时查用．所以具有一定的实用和参考价值．

华中理工大学李灏教授审阅过本文稿，作者在此表示感谢．

参 考 文 献

[1] Corten, H. T., Fracture mechanics of composite, *Fracture* (Liebowitz, H. Ed),7, Academic Press, New York (1972).

[2] 杨维阳、张少琴，关于复合材料单层板Ⅰ型裂纹尖端应力场的的探讨，太原重型机械学院学报，3 (1986).

[3] 杨维阳、张少琴，关于复合材料单层板Ⅰ型裂纹尖端附近应变场和位移场的探讨，太原重型机械学院学报，1 (1987年)

[4] 杨维阳、张少琴，复合材料单层板Ⅱ型裂纹尖端附近应力场、应变场和位移场的解析解，太原重型机械学院学报，2 (1988).

[5] 李灏、陈树坚、郭碧坚，《断裂力学与复合材料力学》，华中工学院出版社(1986).

[6] Rice, J. R., A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *J. Applied Mechanics*, 35, 2 (1968), 379.

On J-Integrals Near Models Ⅰ, Ⅱ Crack Tips in the Plates of Orthotropic Composite Material

Yang Wei-yang Zhang Shao-qin

(*Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan*)

Abstract

In this paper, we prove the independence of path of the J-integrals near models Ⅰ、Ⅱ crack tips in the plate of the orthotropic composite material. Then we derive the computing formulae of the J-integrals in the cases of $\Delta<0$ and $\Delta>0$ by using a complex variable method and reducing J-integrals to complex form.

The J-integral computional formulae derived in this paper have certain referential value for the theoretical researches and the experimental verifications in the plane fracture for the composite material.