

文章编号: 1000_0887(2004) 06_0614_07

层流管流入口压力突然升高引起的水力瞬变的理论分析

邓松圣^{1,2}, 周绍骑¹, 廖振方²,
邱正阳³, 曾顺鹏³

(1. 后勤工程学院 军事供油工程系, 重庆 400016;

2. 重庆大学 机械工程学院, 重庆 400044;

3. 重庆石油高等专科学校, 重庆 400016)

(本刊原编委惠昌年推荐)

摘要: 研究了层流状态下管道入口压力突然升高引起的水力瞬变过程, 建立了瞬态压力分布的偏微分方程和初边值条件, 用分离变量法求得了压力的理论解。根据压力和流量间的约束关系, 得到了关于流量的偏微分方程和初边值条件, 用分离变量法求得了瞬变过程流量分布理论解。最后, 用特征线法(MOC)对该问题进行了数值求解, 理论解和数值解吻合很好。

关键词: 层流; 管流; 水力瞬变; 理论解

中图分类号: TV134.1 文献标识码: A

引 言

在管道输送工程实际中, 广泛存在因为入口压力突然升高引起的水力瞬变过程, 如油库自流发油、长输成品油管道首站油品以及其它自由泄流系统流体的切换等, 正确分析该水力瞬变过程, 对进行管线水力仿真、掌握水力特性及运行工况等具有重要意义。自 20 世纪 70 年代起, 特征线法一直是分析水力瞬变的有力工具, 特别是紊流状态时更是如此^[1~9]。但是, 人们一直没有放弃对求理论解的探索, 不仅因为解的形式直观, 而且将过渡状态和稳态下的解结合在一起, 便于分析过渡过程, 易于得到稳态下的解。

将描述层流状态下管流水力瞬变的基本方程转化为关于流量和压力的线性偏微分方程, 用分离变量法求得压力分布的解析解。根据压力与流量的约束关系, 将流量求解转换为已知初值条件下的偏微分方程的求解。最后, 用特征线法(MOC)求数值解, 其结果与解析解相符较好。

1 基本方程

特作如下假设: 管道内直径为 D , 长度为 l ; 在初始稳态工况时, 管道流量为 Q_0 , 在管道入

收稿日期: 2002_06_23; 修订日期: 2004_01_08

作者简介: 邓松圣(1963), 男, 重庆璧山人, 副教授, 博士, 现在后勤工程学院工作, 重庆大学机械工程学院从事博士后研究, 研究管流水力学、传热传质学(联系人, Tel: + 86_23_68750749(o), + 86_23_68750720(h); E-mail: dsskj@yahoo.com.cn)

口处初始稳态压力为 P_0 , 在管道末端处 $x = l$, 压力为 $P = 0$; 流态为层流; 在初始时刻 $t = 0$, 管道入口处压力跃升到 P_{10}

根据牛顿第二定律和质量守恒定律, 并考虑流体的压缩性和管道应变特性, 得到层流管流水力瞬变的基本方程^[1,2]:

$$\frac{P}{t} + \frac{a^2}{A} \frac{Q}{x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{A} \frac{Q}{t} + \frac{1}{x} \frac{P}{x} + \frac{f}{2A^2 D} Q^2 = 0, \tag{2}$$

式中 A 为管道流通面积; P 为流体压力; ρ 为流体密度; a 为水击波速度; Q 为流体体积流量; t 为时间; x 为轴向坐标; f 为水力摩擦系数

注 1) 介质压缩性和管道应变特性主要体现在水击波速度 a 上, 即在推导式(1)和式(2)时考虑了 ρ 和 A 的微小变化^[1,2]; 2) 从 $P = f(l/D)(\rho/2)(Q/A)^2$ 可知, 对给定管段 l , 当 P 发生突变后, 流量 Q 也将发生变化 由于 P 以水击波速度 a 传播, 故 Q 是 x 与 t 的函数; 3) 在推导理论解时, 假设 ρ 和 A 近似为定值, 这符合通常的处理方法^[1,2]

层流状态下的摩擦系数 f 为

$$f = 64/Re = 16 D / Q, \tag{3}$$

式中 Re 为雷诺数, ν 为流体运动粘度

将式(3)代入式(2)得

$$\frac{1}{A} \frac{Q}{t} + \frac{1}{x} \frac{P}{x} + \frac{8}{A^2} Q = 0 \tag{4}$$

定义下列常数:

$$C = A / a^2, L = l / A, R = 8 / A^2, \tag{5}$$

将式(3)和式(5)代入式(1)与式(4)得

$$Q_x + CP_t = 0, \tag{6}$$

$$P_x + LQ_t + RQ = 0, \tag{7}$$

式中 $Q_x = \partial Q / \partial x$, $P_t = \partial P / \partial t$, $P_x = \partial P / \partial x$, $Q_t = \partial Q / \partial t$

式(6)和(7)可转化为

$$Q_{xx} = LCQ_{tt} + RCQ_t, \tag{8}$$

$$P_{xx} = LCP_{tt} + RCP_t, \tag{9}$$

式中 $Q_{xx} = \partial^2 Q / \partial x^2$, $Q_{tt} = \partial^2 Q / \partial t^2$, $P_{xx} = \partial^2 P / \partial x^2$, $P_{tt} = \partial^2 P / \partial t^2$

2 求压力分布

求解压力分布的定解方程和初边值条件为

$$P_{xx} = LCP_{tt} + RCP_t, \tag{10}$$

$$x = 0, P = P_{10}, \tag{11}$$

$$x = l, P = 0, \tag{12}$$

$$t = 0, P = f(x), \tag{13}$$

$$t = 0, P_t = 0, \tag{14}$$

式中 $f(x)$ 为初始稳态压力

2.1 边界条件齐次化

为了将微分方程(10)齐次化, 令

$$P = P_w + P_{10}(1 - x/l), \quad (15)$$

将式(15)代入式(10)~(14)得

$$P_{wxx} = LCP_{wt} + RCP_{wt}, \quad (16)$$

$$x = 0, P_w = 0, \quad (17)$$

$$x = l, P_w = 0, \quad (18)$$

$$t = 0, P_w = f(x) - P_{10}(1 - x/l), \quad (19)$$

$$t = 0, P_{wt} = 0, \quad (20)$$

式中 $P_{wxx} = \frac{\partial^2 P_w}{\partial x^2}$, $P_{wt} = \frac{\partial P_w}{\partial t}$, $P_{wt} = \frac{\partial^2 P_w}{\partial t^2}$

2.2 分离变量法求解 P_w

令 $P_w = X_w(x) T_w(t)$, (21)

将式(21)代入式(16)得

$$X_{wxx}/X_w = (LCT_{wt} + RCT_{wt})/T_w = - \quad (22)$$

由式(22)、(17)和(18)得

$$X_{wxx} + \lambda^2 X_w = 0, \quad (23)$$

$$x = 0, X_w = 0, \quad (24)$$

$$x = l, X_w = 0 \quad (25)$$

采用分离变量法求解式(23)、(24)和(25)得

$$X_w = A_{1n} \sin(n x/l), \quad (26)$$

$$= n/l \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

将式(27)代入式(22)得

$$LCT_{wt} + RCT_{wt} + (n/l)^2 T_w = 0 \quad (28)$$

经分析,在层流状态下, $4LC(n/l)^2 > (RC)^2$, 由式(28)得

$$T_w = e^{-(Rt/2L)} \left[B_{1n} \cos \left(\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right) + B_{2n} \sin \left(\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right) \right] \quad (29)$$

将式(26)、(29)代入(21)得

$$P_w = \sum_{n=1} \sin \left(\frac{n x}{l} \right) e^{-(Rt/2L)} \left[B_{1n} \cos \left(\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right) + B_{2n} \sin \left(\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right) \right], \quad (30)$$

式中用 B_{1n} 代表 $B_{1n} A_{1n}$, 用 B_{2n} 代表 $B_{2n} A_{1n}$

由式(30)对 P_w 求 t 的偏导, 并结合式(20)得

$$P_w = \sum_{n=1} B_n \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{RC} \cos \left(\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right) \right] \sin(n x/l) e^{-(Rt/2L)} \quad (31)$$

注 式(31)中的 B_n 代表式(30)中的 B_{2n}

将式(31)代入式(19)得

$$(P_0 - P_{10}) + \left(\frac{P_{10}}{l} - \frac{8}{A^2} Q_0 \right) x = \sum_{n=1} A_n \sin \frac{n x}{l}, \quad (32)$$

式中 $A_n = B_n \sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}/(RC)$

由式(32)得

$$A_n = 2(P_0 - P_{10})/(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{33}$$

由式(15)和(31)得

$$P = P_{10} \left[1 - \frac{x}{l} \right] + \sum_{n=1} A_n \frac{RC}{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}} \sin \frac{n x}{l} \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}}{RC} \cos \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}}{2LC} t \right] + \sin \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}}{2LC} t \right] \right] e^{-(Rt/2L)}, \tag{34}$$

式中第一项代表最终的压力分布, 级数项代表压力扰动波对过渡状态压力的影响

3 求流量

3.1 基本方程和初值条件

由式(34)对 P 求 x 的偏导并令 $t = 0$ 得

$$\frac{P}{x} \Big|_{t=0} = - \frac{P_{10}}{l} + \sum_{n=1} A_n \frac{n}{l} \cos \frac{n x}{l} \tag{35}$$

对式(32)求 x 的偏导数, 并与式(35)比较得

$$\frac{P}{x} \Big|_{t=0} = - \frac{8}{A^2} Q_0 \tag{36}$$

将式(5)与(36)代入式(7), 并令 $t = 0$ 得

$$t = 0, Q_t = 0 \tag{37}$$

因此, 关于流量的定解方程及初值条件为

$$Q_{xx} = LCQ_{tt} + RCQ_t, \tag{38}$$

$$t = 0, Q = Q_0, \tag{39}$$

$$t = 0, Q_t = 0 \tag{40}$$

注 考虑到式(6)的约束关系, 求解 Q 时无需边界条件

3.2 求 $Q(x, t)$ 分布

由式(34)对 P 求 t 的偏导, 并代入式(6)得

$$Q_x = - C \frac{P}{t} = \sum_{n=1} A_n \frac{2C(n/l)^2 \sin(n x/l)}{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}} e^{-(Rt/2L)} \sin \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}}{2LC} t \right],$$

积分该式得

$$Q(x, t) = - \sum_{n=1} A_n \frac{2C(n/l) \cos(n x/l)}{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}} \sin \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2C^2}}{2LC} t \right] e^{-(Rt/2L)} + Q_1(t) \tag{41}$$

将 $Q(x, t)$ 代入式(39)得

$$Q_1(t) |_{t=0} = Q_0 \quad (42)$$

将 $Q(x, t)$ 对 t 求偏导, 并令 $t = 0$ 得

$$\frac{Q(x, t)}{t} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{L} \sum_{n=1} A_n \left(\frac{n}{l} \right) \cos \frac{n}{l} x + Q_1(t) |_{t=0}$$

对照式(32)得

$$\begin{aligned} \frac{Q(x, t)}{t} \Big|_{t=0} &= -\frac{1}{L} \left[\frac{P_{10}}{l} - \frac{8}{A^2} Q_0 \right] + Q_1(t) |_{t=0} = \\ &= - (R/L) (Q_s - Q_0) + Q_1(t) |_{t=0} \end{aligned}$$

对照该式和式(40)得

$$Q_1(t) |_{t=0} = R(Q_s - Q_0)/L, \quad (43)$$

$$\text{式中 } Q_s = P_{10} A^2 / (8 l), \quad (44)$$

该式为最终稳态流量表达式

从式(38)易知, $Q_1(t)$ 应满足的常微分方程及初值条件为

$$Q_{1tt} + (R/L) Q_{1t} = 0, \quad (45)$$

$$t = 0, Q_1(t) = Q_0, \quad (46)$$

$$t = 0, Q_1(t)/t |_{t=0} = R(Q_s - Q_0)/L \quad (47)$$

联立解式(45)、(46)与(47)得

$$Q_1(t) = (Q_0 - Q_s) e^{-(Rt/L)} + Q_s, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} Q = - \sum_{n=1} \frac{2A_n C(n/l) \cos(n x/l)}{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}} \sin \left[\frac{\sqrt{4LC(n/l)^2 - R^2 C^2}}{2LC} t \right] e^{-Rt/(2L)} + \\ (Q_0 - Q_s) e^{-Rt/L} + Q_s \end{aligned} \quad (49)$$

4 理论解的适用条件

将 L 、 C 和 R 代入 $4LC(n/l)^2 > (RC)^2$ 得

$$4l/(A^2 a) < n = 1 \quad (50)$$

分析计算表明, 绝大多数自流管道均满足式(50), 上述理论解成立

5 层流时的特征线解法

管流水力瞬变特征线方程为

$$\frac{a}{A} \frac{dQ}{dt} - \frac{dP}{dt} + \frac{af}{2A^2 D} Q^2 = 0, \quad (51)$$

对层流状态并结合式(3), 式(51)转化为

$$aL(dQ/dt) - dP/dt + RaQ = 0 \quad (52)$$

特征线方程为

$$dx/dt = a,$$

特征线如图1所示, 图中 A 、 P 、 B 表示3个节点

对式(52)沿正特征线积分得

$$aL(Q_P - Q_A) + P_P - P_A + Ra \int t Q_P = 0,$$

式中 t 是时间步长 整理得

$$P_A = R_A - S_A Q_P, \quad (54)$$

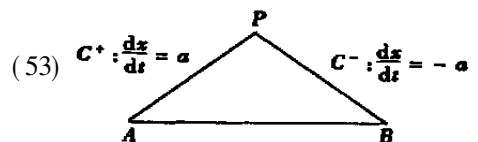


图1 特征线图

式中

$$R_A = P_A + aLQ_A, \tag{55}$$

$$S_A = aL + Ra t \tag{56}$$

对式(52)沿负特征线积分得

$$aL(Q_P - Q_B) - (P_P - P_B) + Ra t Q_P = 0,$$

整理得

$$P_P = R_B + S_B Q_P, \tag{57}$$

式中

$$R_B = P_B - aLQ_B, \tag{58}$$

$$S_B = aL + Ra t \tag{59}$$

联立式(54)与(57)得

$$Q_P = (R_A - R_B)/(S_A - S_B), \tag{60}$$

式(60)代入式(54)或式(57)可以求出节点 P 的压力 P_P

6 计算示例

取自由泄流管道初始入口水位为 $h_0 = 2\text{ m}$, 在入口处突然跃升达到的高度为 $h_{01} = 3\text{ m}$, $\rho = 830\text{ kg/m}^3$, $\nu = 3.5 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, $d = 0.149\text{ m}$, $\mu = 0.005\text{ m}$, $\omega = 0.9324$, $e = 2 \times 10^{11}\text{ Pa}$, 流体的弹性模量为 $K = 1.2 \times 10^9\text{ Pa}$, 管道呈水平, 选取结点: $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 110$ 计算理论解选取的级数项为 $n = 500$, 理论解和特征线法(MOC)数值计算结果如表 1 所示

数值计算表明: 特征解法和解析法求得的结果吻合很好

表 1 理论解与特征线法(MOC)数值解比较

节点 t/s	P, Q	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
9.0	Q_M	2.76	2.76	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22
	Q_T	2.76	2.49	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22
89	Q_M	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.22	2.22
	Q_T	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.43	2.22
9.0	P_M	24 417	14 798	13 318	11 838	10 358	8 878	7 399	5 919	4 439	2 959	1 479	0
	P_T	24 417	18 768	13 318	11 834	10 357	8 880	7 399	5 919	4 439	2 959	1 479	0
89	P_M	24 416	22 771	21 126	19 481	17 836	16 191	14 546	12 901	11 257	9 613	1 479	0
	P_T	24 416	22 771	21 125	19 480	17 835	16 190	14 544	12 900	11 259	9 612	4 719	0

注 1) 表中下标 T 表示理论解结果, M 表示由 MOC 法求得的数值解; 2) 流量 Q 的单位为 m^3/h , 压力 P 的单位为 Pa

7 结 论

- 1) 在层流状态下, 描述自由泄流管道入口压力高度突然升高引起的水力瞬变过程的非线性偏微分方程, 可以化为线性偏微分方程, 由分离变量法求得压力分布的理论解
- 2) 根据流量和压力间的约束关系, 并结合初值条件, 利用已求得的压力分布, 便可求得发生水力瞬变后的流量分布

- 3) 理论解与特征线法(MOC)数值解吻合较好
 4) 当 t , 可以得到最终稳态时的压力和流量, 与实际相符

[参 考 文 献]

- [1] Wylie E Benjamin, Streeter Victor L. Fluid Transients [M]. New York: FEB Press, 1985, 32-36.
 [2] 邓松圣, 蒲家宁. 顺序输送水力瞬变全过程模拟[J]. 油气储运, 1996, 15(12): 16-19.
 [3] 蒲家宁. 管道水击分析与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991.
 [4] Adamkowski Adam. Analysis of transient flow in pipes with expanding or contracting sections[J]. Journal of Fluid Engineering, 2003, 125(4): 716-722.
 [5] Chaiko M A, Brindman K W. Models for analysis of water hammer in piping with entrapped air[J]. Journal of Fluid Engineering, 2002, 124(1): 194-204.
 [6] Hadj-Taieb E, Lili T. Validation of hyperbolic model for water hammer in deformable pipe[J]. Journal of Fluid Engineering, 2000, 122(1): 57-64.
 [7] Liou Jin C P. Numerical properties of the discrete gas cavity model for transients[J]. Journal of Fluid Engineering, 2000, 122(3): 636-639.
 [8] 邓松圣, 周明来, 蒲家宁. 分析管流水力-热力瞬变的双特征线法[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(6): 627-634.
 [9] 邓松圣, 蒲家宁, 廖振方. 分析介质顺序输送管流水力瞬变的特征线[J]. 水动力学研究与进展, 2003, 18(1): 81-85.

Theoretical Analysis on Hydraulic Transient Resulted by Sudden Increase of Inlet Pressure for Laminar Pipeline Flow

DENG Song_sheng^{1,2}, ZHOU Shao_qi¹, LIAO Zhen_fang²,
 QIU Zheng_yang³, ZENG Shun_peng³

(1. Department of Oil Supply Engineering, Chongqing College of Logistic Engineering, Chongqing 400016, P. R. China;

2. Mechanical College, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;

3. Chongqing Petroleum College, Chongqing 400016, P. R. China)

Abstract: Hydraulic transient, which is resulted from sudden increase of inlet pressure for laminar pipeline flow, is studied. The partial differential equation, initial and boundary conditions for transient pressure were constructed, and the theoretical solution was obtained by variable_separation method. The partial differential equation, initial and boundary conditions for flow rate were obtained in accordance with the constraint correlation between flow rate and pressure while the transient flow rate distribution was also solved by variable_separation method. The theoretical solution conforms to numerical solution obtained by method of characteristics (MOC) very well.

Key words: laminar flow; pipeline flow; hydraulic transient; theoretical solution