

# 薄壁结构动力计算中若干问题\*

成祥生

(同济大学, 1987年4月27日收到)

## 摘 要

本文讨论薄板和薄壳之类的薄壁结构受冲击荷载作用时的动力计算问题。主要是求动力因数。在计算中考虑了冲击物和被冲击的薄壁结构系统质量的影响; 用相当质量法将薄壁结构的分布质量转化为只有一个集中的相当质量, 从而导出薄壁结构系统在冲击力作用下的动力因数, 计算比较方便。

## 一、概 述

本文献[1~4]中曾讨论过杆件在冲击荷载作用下的动力计算问题。本文的企图是将在杆件中用过的方法推广并应用到板或壳的薄壁结构系统中去。我们应用能量原理对板或壳的薄壁结构系统在冲击荷载作用下的动力计算问题进行研究。在讨论中, 考虑了冲击物和被冲击的薄壁结构系统的质量的影响; 用相当质量法将具有分布质量的薄壁结构系统转化为只有一个集中质量的弹性系统, 从而导出板或壳结构在冲击荷载作用下的动力因数。

为了简化问题, 我们作如下的假定: 忽略冲击系统的阻尼作用, 不计冲击过程中的能量损失, 不考虑被冲击物体局部的塑性变形, 薄壁结构中的最大动力挠度仍在线性范围, 最大的动力应力不超过结构材料的比例极限。

## 二、冲击过程中能量的转换

为了分析冲击过程和叙述能量的转换, 我们以薄板作为薄壁结构的模型。设有一薄板, 水平放置, 如图1所示。边长分别为 $a$ 和 $b$ , 厚度为 $h$ 。今设有一重物 $Q$ 向静止的薄板冲击, 落体高度为 $H$ , 冲击点为 $m_1$ 点, 为了一般性, 可设冲击点的坐标为 $(\xi, \eta)$ 。假定在冲击后, 冲击重物 $Q$ 和板两者连成一体, 在冲击点薄板产生一向下的动力挠度 $w_{1,0}$ , 同时重物 $Q$ 的速度亦很快变为零。于是薄板将以最大动力位移为振幅进行自由振动, 我们现在感兴趣的是如何求最大的动力位移。

我们以重物 $Q$ 所经过的全路程将冲击过程分为两个阶段。其中第一阶段的路程为 $H$ , 第

\* 钱伟长推荐。

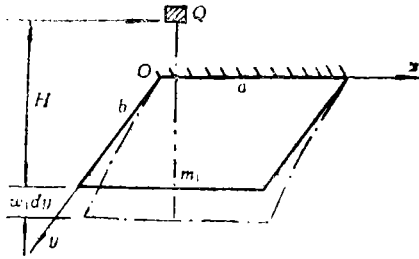


图 1

则薄板在冲击后瞬间得到的动量并不等于  $M_p V$ ，而只是量  $M_p V$  的一部份，因为薄板在其它各点的速度并不等于  $V$ ，特别是薄板在支承处这些速度为零。我们设想把薄板的全部质量  $M_p$  的一部份  $eM_p$  集中于冲击点  $m_1$  处，其中  $e < 1$ ，薄板真正得到的动量就是  $eM_p V$ ，其中  $e$  称为折算系数，该折算系数可根据原先具有分布质量的整块薄板和经过折算为一个集中的相当质量的弹性系统在振动时动能相等的原理求出。

现在对冲击系统应用动量守恒原理于冲击瞬间的前后。冲击物在冲击前瞬间具有的能量  $MV_0$  应等于冲击后瞬间该冲击物与薄板合在一起所得到的动量  $(M + eM_p)V$ ，于是得到了薄板在冲击后瞬间在冲击点  $m_1$  所获得的速度

$$V = MV_0 / (M + eM_p) \quad (2.1)$$

再应用能量守恒原理于冲击后的瞬间至薄板上冲击点  $m_1$  的速度降到零的间隔（冲击的第二阶段）。当薄板受冲击后，在冲击点既得到了速度  $V$ ，那么当重物到达路程的极点时，速度便从  $V$  降到零。于是薄板和冲击物两者在冲击后瞬间所具有的动能与势能之和应等于薄板上的冲击点  $m_1$  达到路程的极点时薄板弹性力的势能，即

$$\frac{1}{2}(M + eM_p)V^2 + Mgw_{1st} = \frac{1}{2}Pw_{1st} \quad (2.2)$$

其中  $P$  为薄板上最大的弹性力， $w_{1st}$  为薄板上在冲击点  $m_1$  处最大的动力挠度。(2.2) 式表示在冲击的第二阶段中，冲击系统的全部机械能转换为薄板的弹性力的势能。由于  $w_{1st}$  和  $P$  两者都是从零增加到最大值，所以(2.2)式的右端便是弹性力  $P$  在路程  $w_{1st}$  上所作的功，即所谓弹性力的势能。

### 三、确定动力因数

由于弹性薄板始终工作于比例极限的范围之内，故有如下的正比例关系， $P:Q = w_{1st}:$   
 $w_{1st}$ ，由此可得公式

$$P = Qw_{1st} / w_{1st} \quad (3.1)$$

其中  $w_{1st}$  为由力  $Q$  在冲击点  $m_1$  处所引起的静力挠度。

将(3.1)代入(2.2)并注意到(2.1)便得到关于  $w_{1st}$  的二次代数方程，由它可解得

$$w_{1st} = w_{1st} [1 \pm (1 + V^2 / K_e g w_{1st})^{1/2}] \quad (3.2)$$

式中

$$K_e = 1 + eM_p / M \quad (3.3)$$

由于  $w_{1st}$  应大于  $w_{1st}$ ，故在上式根号前应使用正号。式(3.2)可写成

二阶段的路程为  $w_{1st}$ 。若冲击物和板的质量分别为  $M$  和  $M_p$ ，于是在第一阶段中，根据不计能量损失的假定并应用能量守恒原理，当重物  $Q$  下落直至与板接触前的瞬间，它原先所具有的势能  $MgH$  将全部转变为它的动能  $MV_0^2/2$ ，于是可求出在冲击前瞬间重物  $Q$  的速度  $V_0$ ，此时冲击物的动量为  $MV_0$ 。在第二阶段中，若板受冲击后的瞬间，板在冲击点得到的速度为  $V$ ，

$$w_{1,dy} = K_d w_{1,st} \quad (3.4)$$

其中

$$K_d = 1 + (1 + V_0^2 / K_e g w_{1,st})^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

称为动力因数。由(3.4)可以看出：动力因数 $K_d$ 表示动力挠度 $w_{1,dy}$ 和静力挠度 $w_{1,st}$ 的比值。若已知静力挠度，则可由(3.4)求出动力挠度。自然，动力内力或动应力亦可根据静力内力或静应力乘上动力因数 $K_d$ 而得到。

若冲击物 $Q$ 是自由落体，高度为 $H$ ，则动力因数(3.5)可表示如下

$$K_d = 1 + (1 + 2H / K_e w_{1,st})^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

如果不计薄板质量的影响，则由式(3.3)并令 $M_p = 0$ ，从而 $K_e = 1$ ，于是(3.5)或(3.6)便得到

$$K_d = 1 + (1 + V_0^2 / g w_{1,st})^{\frac{1}{2}} \text{ 或 } K_d = 1 + (1 + 2H / w_{1,st})^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

这时便得到了动力因数 $K_d$ 的上限值，应用时偏于安全。如果在(3.5)~(3.7)中，冲击前瞬间重物的速度 $V_0 = 0$ 或落体高度 $H = 0$ ，就得到了 $K_d = 2$ ，这便是突加荷载情形下的动力因数。

#### 四、关于折算系数

我们在前面已设板上被冲击点 $m_1$ 的坐标为 $(\xi, \eta)$ ，今选择一个能满足薄板周边的几何边界条件的振形曲面的函数 $W(x, y)$ ，并且使最初具有分布质量的整块薄板的动能和经过折算后只有一个集中的相当质量 $eM_p$ 的弹性系统的动能相等，便可求出折算系数 $e$ 。对于等厚板上述原理可用公式来表示，就是

$$\frac{1}{2} \frac{\gamma h}{g} \iint (w_t^2) dx dy = \frac{1}{2} e M_p (w_t^2)_{m_1} \quad (4.1)$$

其中 $\gamma$ 为板材料的比重； $h$ 为板厚， $g$ 为重力加速度， $w_t$ 为薄板的瞬时挠度

$$w(x, y, t) = W(x, y) \exp[i\omega t] \quad (4.2)$$

对时间 $t$ 的一阶偏导数。这里 $W(x, y)$ 是薄板振形曲面的函数式， $\omega$ 为板自由振动的固有频率。(4.1)的左边表示具有分布质量的整块薄板的动能，右边表示在冲击点 $m_1(\xi, \eta)$ 处只有一个集中的相当质量 $eM_p$ 的弹性系统的动能。下标 $m_1$ 表示该括号中的量应取冲击点 $m_1(\xi, \eta)$ 处的值。将(4.2)代入(4.1)进行积分并约去公因子 $\omega^2 \exp[2i\omega t]$ ，同时注意到薄板的总质量为 $M_p = abh\gamma/g$ ，可得到求折算系数的公式

$$e = \iint W^2(x, y) dx dy / ab W^2(\xi, \eta) \quad (4.3)$$

以上二重积分均遍及薄板的中面区域，即 $0 \leq x \leq a$ ， $0 \leq y \leq b$ 。上述求折算系数的方法亦可使用于圆板及壳体结构的计算中。

#### 五、实际数例

**例1** 设有一方形钢板，三边简支，一边自由，有一重物 $Q$ 以等速 $V_0$ 平行于 $z$ 轴作水平运动，向静止薄板的自由边中点 $m_1$ 冲击，如图2所示。已知： $a = b = 5\text{m}$ ， $E = 2.1 \times 10^{10} \text{kgf/m}^2$ ，

$h=0.06\text{m}$ ,  $\mu=0.3$ ,  $\gamma=7.8\times 10^3\text{kgf/m}^3$ ,  $Q=100\text{kgf}$ ,  $V_0=0.5\text{m/s}$ . 经计算得  $D=39.56044\times 10^4\text{kgf}\cdot\text{m}$ ,  $Q_p=11.7\times 10^3\text{kgf}$  ( $1\text{kgf}=9.80665\text{N}$ ). 设薄板的振形曲面函数为

$$W(x, y) = A \frac{x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (5.1)$$

用能量法可求出  $m_1$  点的静力挠度为

$$w_{1st} = 2.73057 \times 10^{-4} \text{m} \quad (5.2)$$

由(4.3)求得折算系数

$$e = 1/6 \quad (5.3)$$

由(3.5)计算动力因数

$$K_d = 1 + \left( 1 + \frac{0.53}{9.81 \times 2.73057 \times 10^{-4}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{6} \frac{11.7 \times 10^3}{100}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = 3.35635 \quad (5.4)$$

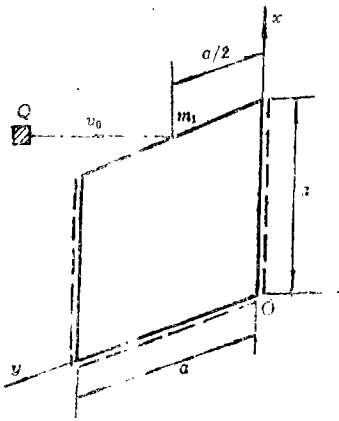


图 2

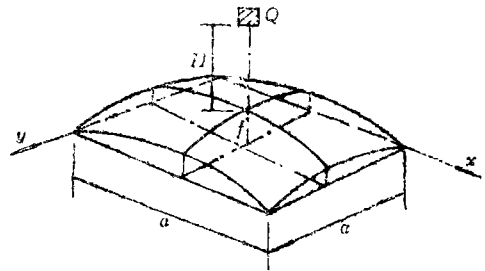


图 3

例 2 设有一混凝土球面扁壳, 方底, 周边简支, 在顶端受一重物  $Q$  冲击, 如图 3 所示. 已知:  $a=b=10\text{m}$ ,  $h=0.1\text{m}$ , 曲率半径  $R=80\text{m}$ , 矢高  $f=0.3\text{m}$ ,  $\mu=0.12$ ,  $E=2\times 10^9\text{kgf/m}^2$ ,  $\gamma=2400\text{kgf/m}^3$ ,  $Q=50\text{kgf}$ ,  $H=0.2\text{m}$ . 经计算可得  $D=1.69\times 10^5\text{kgf}\cdot\text{m}$ , 壳体重量为  $Q_s=27.0246\times 10^3\text{kgf}$ . 设扁壳的振形曲面函数取为

$$W(x, y) = A \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\pi}{a} y \quad (5.5)$$

由 Б. Г. Галеркин 法求出扁壳顶点的静力挠度为

$$W_{1st} = 0.52445 \times 10^{-4} \text{m} \quad (5.6)$$

由(4.3)求得折算系数

$$e = 1/4 \quad (5.7)$$

由(3.6)计算动力因数

$$K_d = 1 + \left( 1 + \frac{2 \times 0.2}{0.52445 \times 10^{-4}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{27.0246 \times 10^3}{50}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = 8.55185 \quad (5.8)$$

## 六、结 束 语

(1) 我们是在保守系统中应用能量守恒原理导出了薄壁结构系统中的板或壳受到冲击荷载时的动力因数, 其中并未计及冲击处物体局部的塑性变形。

(2) 在推导动力因数  $K_d$  时, 考虑到板或壳质量的影响, 例如将薄板的全部分布质量的一部份折算到冲击点, 在该点它只有一个集中的相当质量, 成为只有一个自由度的弹性系统, 对于较复杂的薄壁结构系统可化为只有少数几个自由度的弹性系统。

(3) 只要知道冲击物在冲击前瞬间的速度  $V_0$  或落体高度  $H$  即可求出动力因数, 而不管冲击的方向如何。

(4) 本文是将对杆件系统求动力因数的方法推广并应用到薄壁结构系统中。

(5) 只要薄壁结构上被冲击点的动力位移  $w_{1d}$  和被冲击的薄壁结构系统的弹性力成正比, 本文所述的方法就可使用。

(6) 对于被冲击的薄壁结构系统总是希望动力因数小, 这可以用如下的方法来实现: 降低落体高度  $H$  或减少冲击前瞬间的速度  $V_0$ ; 减少薄壁结构的刚度或增大其柔度, 这样可使静力挠度增大; 增大被冲击系统的重量或减少冲击物的重量。

(7) 本文所述的方法也可推广应用于开口的和闭合的柱壳或旋转壳中, 但是只要知道这些薄壳的振形曲面的函数式。

### 参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, Second Edition (1937).
- [2] Филиппов А. П., *Колебания Упругих Систем*, Изд. Акад. Наук Украинской ССР (1956).
- [3] Saint-Venant, B., *Théorie de l'Élasticité des Corps Solides*, Paris, Parag., 61 (1883), 490.
- [4] Love, A. E. H., *Math. Theo. of Elast.* (1927), 198.
- [5] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, McGraw-Hill Book Comp. Inc. (1959).

## On Some Problems in Dynamic Computation for Thin-Walled Structures

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

### Abstract

This article discusses the problems of the dynamic computation for thin-walled structures such as thin plates and thin shells under impact load to find the dynamic factor mainly. In calculation we take into account the effect of the mass of the striking object and the system of thin-walled structures to be struck and transform the distributed mass of thin-walled structures into only one concentrated "equivalent mass" by the method of reduced mass. Accordingly we derive the dynamic factor for the system of thin-walled structures under impact load.