应用数学和力学，第11卷第6期（1990年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

气固两相流和气液两相流的掺混问题*

林多敏　　蔡树棠

（上海市应用数学和力学研究所；上海工业大学）　（中国科学技术大学近代力学系；上海市应用数学和力学研究所）

（1989年5月12日收到）

摘　要

在工业生产中气固两相流和气液两相流的掺混是一个常见问题．在这个掺混流动过程中，颗粒团将形成，且在颗粒碰撞聚结效应和分裂效应相平衡时，颗粒团将具有稳定半径．本文引入了颗粒团线尺度数密度分布函数 $n(a,\vec{r},t)$，从分子运动论的观点出发，导出了颗粒团线尺度数密度分布函数的控制方程．最后，在气相流速非常缓慢的情况下，得到了颗粒团平均稳定半径的表达式．

一、引　言

自从多相流体动力学开始发展以来，气相和颗粒相混合物的流动问题一直是令人感兴趣的课题．借助均质流体力学的处理方法，气固两相流和气液两相流分别得到了较为充分的研究[1]．相比之下，气固两相流和气液两相流的混合问题则讨论得极少．气固两相流和气液两相流的相互混合在自然界和工业生产中，如：大气中的云雾、液滴和颗粒在燃烧室中的燃烧、利用离心器分离流体中的粒子和燃烧产物中烟粒的生成与清除等，都有广泛的应用．严格地说，纯粹的两相流动仅仅是多相流中最简单的一种情形．

两相流中颗粒（固体颗粒、液滴和气泡等）的大小是一个基本的物理量．在流化床和沸腾炉中颗粒的大小决定着床的流化状况和输运特性．过去人们研究了运载流体中不同固体颗粒的大小对其沉降特性的影响[2]和不同大小的液滴和气泡在两相流中的运动规律．同时，人们也讨论了两相流中液滴和气泡线尺度的分布情况对液滴之间的相互作用，如碰撞、聚结、畸变和分裂等过程的影响[4]．然而，在气固两相流和气液两相流相互掺混时，其颗粒（固体颗粒和液滴）的状况将远远复杂于气固两相流和气液两相流的个别流动情形中颗粒线尺度的

* 第三届全国多相流学术会议论文，西安（1988.12）．

分布．这种情形下，颗粒线尺度的分布不仅取决于固体颗粒之间的碰撞和液滴之间的耦合，而且也取决于固体颗粒和液滴之间的相互作用．弄清颗粒线尺度的分布有益于了解颗粒的碰撞损耗和质量耦合以及颗粒的生长和收缩等各种因素．

在本文中，我们讨论了气固两相流和气液两相流的掺混过程．在掺混流动中，颗粒团将形成，且在颗粒碰撞聚结效应和分裂效应相平衡时，颗粒团具有稳定半径．我们引入了颗粒团线尺度数密度分布函数$n(a,\vec{r},t)$，并根据分子运动论导出了$n(a,\vec{r},t)$的控制方程．在气相流速非常缓慢的情形下，我们得出了颗粒团平均稳定半径的表达式．

二、颗粒团的形成和颗粒团的稳定半径

气固两相流和气液两相流相互掺混时，气液两相流中的液滴将会与气固两相流中的固体颗粒发生碰撞．碰撞的结果，液体将形成湿润的薄膜附着在固体颗粒表面．这种带有液体薄膜的颗粒团能与其他与之碰撞的固体颗粒形成一种固体颗粒团或称为“新颗粒”．与此同时，液体的蒸汽也会凝结在这种颗粒团上．在蒸汽浓度特别小的时候，颗粒团上的液体也会产生蒸发现象．掺混以后，分散相的颗粒有了很大变化．气流中的“颗粒”不仅有原来的固体颗粒和不同半径的液相液滴，而且还会有液体和固体颗粒所组成的颗粒团或“新颗粒”．在气相中，各种成分也有很大变化．除了气体以外，气体中还有和液滴成分有一定关系的蒸汽分子．

在气固两相流和气液两相流相互掺混的过程中，每个颗粒团的线尺度是在不断地变化．颗粒团与其他颗粒相碰，可能增加颗粒团内固体颗粒的数目或液体的量，发生聚结而形成较大的颗粒团；也可能减少颗粒团内固体颗粒的数目或液体的量，发生分裂而形成较小的颗粒团．在掺混初期，聚结现象是占主导作用的．聚结和分裂作用的相对强弱决定了颗粒团线尺度的最终大小．当两种作用相互抵消而发生平衡时，颗粒团的大小将趋于稳定，此时，颗粒团的平均“粒径”被称为颗粒团的稳定半径．颗粒团的稳定半径与固体颗粒本身的线尺度、液体的表面张力系数、固体颗粒和液滴的数密度、液滴之间的平均相对速度、固体颗粒之间的平均相对速度、固体颗粒与液滴之间的平均相对速度、气相速度、气相粘性系数等等各种物理参数有关．

三、颗粒团线尺度数密度分布函数的控制方程

为了确定气固两相流和气液两相流相互掺混时颗粒团的稳定半径，首先需要引入颗粒团线尺度数密度分布函数$n(a,\vec{r},t)$并建立$n(a,\vec{r},t)$所满足的控制方程．

设 $n(a,\vec{r},t)d\tau da$ 为在时刻 t 位于体积元$d\tau=dxdydz$ 以及半径从$a\to a+da$ 内的颗粒团数目．经过dt时间以后，在时刻$t+dt$位于同一体积元$d\tau$和半径间隔 da 内的颗粒团数目将变为$n(a,\vec{r},t+dt)d\tau da$．当$dt$很小时，$n(a,\vec{r},t+dt)$用泰勒级数展开，只取头两项，得

$$\left\{n(a,\vec{r},t)+\frac{\partial n}{\partial t}dt\right\}d\tau da$$

所以在dt时间之后，在$d\tau da$内的颗粒团数目增加了

$$\frac{\partial n}{\partial t}dtd\tau da \tag{3.1}$$

这个增加数有三个来源：第一个来源于运动，第二个来源于碰撞，第三个来源于蒸汽分子的凝结和挥发。由于运动，原来在时刻 t 在 $d\tau da$ 内的颗粒走出去，到了时刻 $t+dt$ 位于 $d\tau da$ 内的颗粒是从邻近的地点转移过来的。通过计算在 dt 时间内有多少颗粒团经过三对平面（x 和 $x+dx$，y 和 $y+dy$，z 和 $z+dz$）所组成的边界，就可得由于运动在 dt 时间内位于 $d\tau da$ 内增加的颗粒团数为[5]

$$-\left(u\frac{\partial n}{\partial x}+v\frac{\partial n}{\partial y}+w\frac{\partial n}{\partial z}\right)dtd\tau da \tag{3.2}$$

其中 $(u,\ v,\ w)$ 为颗粒团的速度。碰撞对（3.1）的贡献来源于两个部分：第一个部分是颗粒之间的碰撞聚合，第二个部分是颗粒团与其它颗粒相碰后的分裂效应。假设由于颗粒之间的碰撞，在时刻 t 位于 $d\tau da$ 内颗粒 1 与颗粒 2 聚合成颗粒团的几率密度为 $P_{12}(a,\vec{r},t)$，而它们的相互碰撞总数为[5]

$$n(a_1,\vec{r},t)\cdot n(a_2,\vec{r},t)A_{12}$$

其中 $A_{12}=\sigma_{12}g_{12}$，σ_{12} 为颗粒 1 和颗粒 2 之间的有效碰撞截面，g_{12} 为颗粒 1 和颗粒 2 之间的平均相对速率。这样，在时间间隔 dt 内位于 $d\tau da$ 内由于颗粒碰撞而增加的颗粒团数目为

$$\sum_{i,j}^{A_{ij}} n(a_i,\vec{r},t)\Delta a_i\cdot n(a_j,\vec{r},t)\Delta a_j A_{ij}P_{ij}(a,\vec{r},t)\,dtdad\tau \tag{3.3}$$

若颗粒线尺度分布是连续的，则(3.3)可写成为积分形式

$$\iint_{A_{12}} n(a_1,\vec{r},t)da_1\cdot n(a_2,\vec{r},t)da_2A_{12}P_{12}(a,\vec{r},t)\,dtdad\tau \tag{3.4}$$

其中 A_{12} 取遍所有的现有粒径值。同理，第二部分对(3.1)的贡献，即在时间间隔 dt 内位于 $d\tau da$ 内由于颗粒相碰而减少的颗粒团数目为

$$\iint_{A_{12}} n(a_2,\vec{r},t)\delta(a_2-a)da_2\cdot n(a_1,\vec{r},t)da_1A_1P_1(a,\vec{r},t)dtdad\tau \tag{3.5}$$

其中 $A_1=\sigma_1g_1$，σ_1 为颗粒 1 和颗粒团之间的有效碰撞截面，g_1 为颗粒 1 和颗粒团之间的平均相对速率，$P_1(a,\vec{r},t)$ 为在时刻 t 位于 $d\tau da$ 内颗粒 1 与颗粒团相碰而使颗粒团分裂的几率密度，$\delta(a_2-a)$ 为狄拉克函数，它是无量纲量。以下讨论蒸汽分子的凝结与挥发对(3.1)的贡献。设在时间间隔 dt 内位于 $d\tau da$ 内颗粒团上蒸汽凝结量为 $J_1(a,\vec{r},t)dtd\tau$，蒸汽挥发量为 $J_2(a,\vec{r},t)\cdot dtd\tau$，故在时刻 t 颗粒团由于蒸汽分子的凝结与挥发，其半径增加率为

$$\frac{da}{dt}=\frac{J(a,\vec{r},t)}{\rho(a)4\pi a^2} \tag{3.6}$$

其中 $J(a,\vec{r},t)=J_1(a,\vec{r},t)-J_2(a,\vec{r},t)$，$\rho(a)$ 为颗粒团的密度。这样，在时间间隔 dt 内位于 $d\tau da$ 内颗粒团数的增加为

$$\frac{J(a,\ \vec{r},\ t)}{\rho(a)4\pi a^2}\cdot\frac{\partial n(a,\ \vec{r},\ t)}{\partial a}dtd\tau da \tag{3.7}$$

因此，将表达式(3.2)、(3.4)、(3.5)和(3.7)相加起来并与式(3.1)相等，我们就得到下列方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t}+u\frac{\partial n}{\partial x}+v\frac{\partial n}{\partial y}+w\frac{\partial n}{\partial z}$$

$$= \frac{J(a, \vec{r}, t)}{\rho(a)4\pi a^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial a} + \iint_{A_{12}} [A_{12}P_{12} - A_1P_1\delta(a_2 - a)]n(a_1)n(a_2)da_1da_2 \tag{3.8}$$

方程式(3.8)也就是确定颗粒团线尺度数密度分布函数$n(a,\vec{r},t)$的基本方程式。

四、均匀分布下的颗粒团平均稳定半径

在颗粒团线尺度数密度函数为均匀分布的情况下，有$n(a,\vec{r},t)=n(a,t)$，则方程式(3.8)变成

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{J(a,t)}{\rho(a)4\pi a^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial a} + \iint_{A_{12}} [A_{12}P_{12} - A_1P_1\delta(a_2 - a)]n(a_1)n(a_2)da_1da_2 \tag{4.1}$$

在颗粒团稳定半径形成时，$\partial n/\partial t=0$，$J(a,t)=0$，于是，方程(4.1)可写成

$$\iint_{A_{12}} [A_{12}P_{12} - A_1P_1\delta(a_2 - a)]n(a_1)n(a_2)da_1da_2 = 0 \tag{4.2}$$

对于颗粒团线尺度分布非连续的情形，方程(4.2)中的双重积分号可改写为双重加和号，δ函数改写成为1。为欲求颗粒团稳定半径的平均值，我们认为在搅拌流动中主要存有固体颗粒、液滴和颗粒团三种颗粒，每一种颗粒半径各自相同，并假定固体颗粒、液滴和颗粒团各自之间的自碰撞对颗粒团平均稳定半径的影响可以略去。于是，P_{12}主要取决于固体颗粒与液滴之间的相互碰撞，P_1主要取决于颗粒团与固体颗粒和液滴之间的相互碰撞。在上述条件下，P_{12}和P_1可以取相应量的平均值。所以，方程(4.2)为

$$n_s n_l A_{sl} P_{sl} = \bar{n} n_s A_s P_s + \bar{n} n_l A_l P_l \tag{4.3}$$

其中$n(a_1)=n_s$，$n(a_2)=n_l$，$n(a)=\bar{n}$，下标s，l分别代表固体颗粒和液滴。现若可知固体颗粒的数密度n_s、液滴的数密度n_l以及A_{sl}，P_{sl}，P_s和P_l，那么就可通过方程(4.3)求得颗粒团的数密度$\bar{n}$与颗粒团平均稳定半径之间的关系，即

$$\bar{n} = \frac{n_s n_l A_{sl} P_{sl}}{n_s A_s P_s + n_l A_l P_l} \tag{4.4}$$

假定$P_s=P_l=P$，并设$n_s/n_l=\beta$，$n_s=n_0$，那么，式(4.4)为

$$\bar{n} = n_0 \frac{A_{sl}}{A_s + A_l} \cdot \frac{P_{sl}}{P} \tag{4.5}$$

其中

$$A_{sl} = \sigma_{sl}V_{sl} = 4\pi(a_s + a_l)^2 V_{sl}$$
$$A_s = \sigma_s V_s = 4\pi(a_s + a)^2 V_s$$
$$A_l = \sigma_l V_l = 4\pi(a_l + a)^2 V_l$$

a_s为固体颗粒半径，a_l为液滴半径，V_{sl}为固体颗粒与液滴之间的平均相对速度，V_s为固体颗粒与颗粒团之间的平均相对速度，V_l为液滴与颗粒团之间的平均相对速度。P_{sl}/P与直接影响颗粒团聚结、分裂等因素有关，这些影响因素有液体性质（液体表面张力系数γ），固体颗粒性质（固体颗粒的平均速度u_s、平均线尺度L_s和密度ρ_s），它们组成的无量纲数为

$$M=\frac{\gamma}{\rho_s u_s^2 L_s} \tag{4.6}$$

由此可设

$$\frac{P_{sl}}{P}=AM^a \tag{4.7}$$

其中A，a为待定常数。当$a_s=a_l=a_0$时，式(4.5)有

$$\frac{a}{a_0}=1+2\left(AM^a\,\frac{n_0}{\bar{n}}\cdot\frac{V_{sl}}{\beta V_s+V_l}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

在气相流速相当缓慢的情况下，可设$V_{sl}=V_s=V_l=V_g$，V_g为气相流速，那么，颗粒团的平均稳定半径为

$$a=a_0\left[1+2\left(\frac{AM^a}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n_0}{\bar{n}}}\right] \tag{4.9}$$

由式(4.9)可见，颗粒团数密度的减少将导致颗粒团稳定半径的增大。因此，通过控制颗粒团稳定半径可以达到控制颗粒团数密度的皿的。在式(4.9)中，显然需要$n_0/\bar{n}\geqslant 1$。当$\beta=1$，$M=0.36$，$A=5.6$，$\alpha=1$时，其a/a_0随$n_0/\bar{n}$变化的曲线如图1所示。

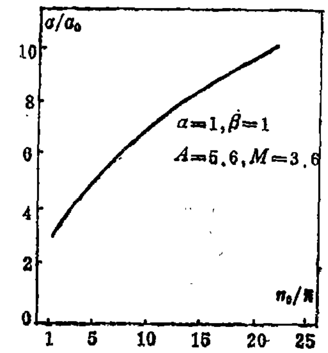

图1 a/a_0随$n_0/\bar{n}$的变化曲线

五、结 束 语

本文讨论了气固两相流和气液两相流的相互掺混问题，同时引入了颗粒团线尺度数密度的分布函数$n(a,\vec{r},t)$，并且建立了$n(a,\vec{r},t)$所满足的控制方程式(3.8)。在$n(a,\vec{r},t)$均匀分布的情况下，我们得到了方程式(3.8)的一个特解。一般来说，若能给出在初始时刻$n(a,\vec{r},0)$的值，那么$n(a,\vec{r},t)$的一般解就可以通过解方程式(3.8)而得出，这样，掺混中的颗粒团平均粒径$\bar{a}$以及大于某一粒径r_0的颗粒数N可以通过以下积分

$$\bar{a}=\int_0^{+\infty} n(a,\vec{r},t)a\,da \tag{5.1}$$

$$N=\int_{r_0}^{+\infty} n(a,\vec{r},t)\,da \tag{5.2}$$

而分别求出。

参 考 文 献

[1] Hetstroui, G., *Handbook of Multiphase Systems*, Hemisphere Publishing Corporation and McGraw-Hill Book Company, U. S. A. (1982).

[2] Rudinger, G., *Fundamentals of Gas-Particle Flow*, Amsterdam (1980).

[3] Wallis, G. B., *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill (1969).

[4] Pai, S. I., *Two-Phase Flow*, Vieweg (1977).

[5] 王竹溪，《统计物理学导论》，高等教育出版社 (1957)。

The Mixing of Gas-Liquid Flow with Vapor and Gas-Solid Flow

Lin Duo-min

(*Shanghai Inst. of Appl. Math. Mech., Shanghai; Shanghai Univ. of Tech., Shanghai*)

Tsai Shu-tang

(*Dept. of Mod. Mech., Univ. of Sci. Tech. of China, Hefei; Shanghai Inst. of Appl. Math. Mech., Shanghai*)

Abstract

In the industrial production, the mixing of gas-liquid flow with vapor and gas-solid flow is a very common problem. In the process of the mixing, solid particle-clusters will form, and will have steady radii when the effect of the gathering of particles is balanced with that of the breaking of particle-clusters. Then, the population distribution function $n(a, \vec{r}, t)$ of size of particles per unit length per unit volume is introduced, and its governing equation is derived on the analogy of the molecular kinetic theory. Finally, when the gas flow is very slow, the expression of steady average radius of particle-clusters is obtained.