应用数学和力学，第11卷第6期（1990年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Hilbert空间中广义强非线性拟补问题*

张石生　　黄南京

（四川大学数学系，1989年6月17日收到）

摘　要

本文在 Hilbert 空间中引入一类新的广义强非线性拟补问题，并讨论这类问题解的存在性及由算法所构造的序列的收敛性．本文所得结果改进和推广了许多已知的结果．

一、引　言

相补理论是由 Lemke[1]，Cottle 和 Dantzig[2]在60年代早期首先引入并研究的．在过去的20多年中，相补理论得到了许多重要发展．最近，为了研究产生于控制与优化、经济与运输平衡、弹性接触以及媒质渗流（参见 Lin 和 Cryer[3]、Cottle[4]，Crank[5]及其参考文献）等方面的大量问题，人们对补问题进行了不同形式的推广．Pang[6,7]和Noor[8,9,10]引入并研究的拟补问题以及 Noor[12,13,14]引入并研究的适度非线性补问题都是补问题的重要的推广．

受上述研究工作的启示，本文引入一类广义强非线性拟补问题，讨论这类问题解的存在性及由算法所构造的序列的收敛性．本文所得结果包含许多已知结果作为特例．

二、预 备 知 识

设H是一Hilbert 空间，我们分别用（·，·）和$\|\cdot\|$表示H的内积和范数．

如果$K\subset H$是一闭凸锥，我们用K^*表示K的极锥，即

$$K^*=\{u\in H:(u,v)\geqslant 0,\ \ \forall v\in K\}$$

给定映象$m:K\to K,A:H\to H,T:H\to H$和$V:H\to 2^H$，我们考虑下述问题：找$u\in K(u)$，$y\in V(u)$使

$$Tu+Ay\in K^*(u),\ \ (u-m(u),\ Tu+Ay)=0 \tag{2.1}$$

其中$K(u)=m(u)+K$，$K^*(u)=(m(u)+K)^*$．如果m，A，T和V都是非线性映象，则问题(2.1)称为广义强非线性拟补问题；如果$V:H\to H$为恒等映象，m，A及T为非线性映象，

* 国家自然科学基金资助的项目．

则问题(2.1)等价于找$u\in K(u)$使

$$Tu+Au\in K^*(u),\ (u-m(u),\ Tu+Au)=0 \tag{2.2}$$

问题(2.2)称为强非线性拟补问题。

我们指出，如果$m\equiv 0$，则问题(2.2)等价于找$u\in K$使

$$Tu+Au\in K^*,\ (u,\ Tu+Au)=0 \tag{2.3}$$

问题 (2.3) 称为强非线性补问题．如果$H=R^n$，$K=R^n_+=\{u\in R^n:u\geqslant 0\}$，$m$，$A$，$T$ 和V都是非线性映象，则问题(2.1)等价于找$u\in K(u)$，$y\in V(u)$使

$$Tu+Ay\in K^*(u),\ (u-m(u),\ Tu+Ay)=0 \tag{2.4}$$

如果$H=R^n$，$K=R^n_+$，则问题 (2.2) 等价于找$u\in K(u)$使

$$Tu+Au\in K^*(u),\ (u-m(u),\ Tu+Au)=0 \tag{2.5}$$

而问题 (2.3) 等价于找$u\in R^n_+$使

$$Tu+Au\geqslant 0,\quad (u,\ Tu+Au)=0 \tag{2.6}$$

如果$H=R^n$，$K=R^n_+$，T是下述形式的仿射映象：

$$Tu=Mu+q$$

其中$q\in R^n$，M是$n\times n$矩阵，则问题 (2.6) 称为适度非线性补问题，即找$u\in R^n_+$使

$$Mu+q+Au\geqslant 0,\quad (u,\ Mu+q+Au)=0 \tag{2.7}$$

问题 (2.6) 和 (2.7) 产生于下述类型的带约束条件的非线性偏微分不等式的有限差分（有限元）逼近：

$$\left.\begin{aligned}&-Lu(x)+f(x,\ u(x))\geqslant 0,\quad x\in D;\ u(x)\geqslant 0,\quad x\in D\\ &u(x)[-Lu(x)+f(x,u(x))]=0,\quad x\in D;\ u(x)=g(x),\quad x\in S\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

其中L是已知的线性椭圆型算子，$D\subset R^n$是具边界S的定义域，$f(x,\ u(x))$是x和$u(x)$的非线性函数，$g(x)$是已知的函数．可以写成形如 (2.8) 式的熟知的自由边值问题，包含媒质渗流问题、轴承平衡问题和弹性接触问题 (参见[3，4，5])．

显然，问题 (2.2)～(2.7) 都是问题 (2.1) 的特例．

三、迭 代 算 法

首先，我们给出下述结果．

引理3.1 如果$K(u)=m(u)+K$，则

$$K^*(u)=m^*(u)\cap K^*$$

证 $m^*(u)\cap K^*\subset K^*(u)$是显然的．另一方面，对$x\in K^*(u)$，因为$0\in K$，故$m(u)\in K(u)$，从而$(x,\ m(u))\geqslant 0$，即$x\in m^*(u)$．

其次，我们证明$x\in K^*$．设相反，$x\notin K^*$，则存在$z\in K$，使得$(x,\ z)<0$．令

$$a=(x,\ m(u))/(-(x,\ z)),\ y=m(u)+(a+1)z\in K(u)$$

则$a\geqslant 0$且 $(x,\ y)=(x,\ m(u))+a(x,\ z)+(x,\ z)=(x,\ z)<0$

矛盾．故$x\in K^*$，从而$K^*(u)\subset m^*(u)\cap K^*$， 这与$x\in K^*(u)$相矛盾．因此，$x\in K^*$，从而$K^*(u)\subset m^*(u)\cap K^*$．

综合上述证明知 $K^*(u)=m^*(u)\cap K^*$．

引理3.2 (Noor[15]) 如果$K\subset H$是一闭凸集，$z\in H$是一给定点，则$u\in K$满足下述不等式 $(u-z,\ v-u)\geqslant 0,\quad \forall v\in K$

当且仅当 $$u=P_K z \tag{3.1}$$

其中P_K是H到K的投影.

引理3.3 (Noor[15]) 由 (3.1) 式所定义的映象P_K是非扩张的, 即

$$\|P_K u-P_K v\|\leqslant\|u-v\|,\qquad \forall u,\ v\in H$$

引理3.4 (Noor[16]) 如果$K(u)=m(u)+K$, $K\subset H$是一闭凸集, 则对任意$u,v\in H$, 有

$$P_{K(u)}v=m(u)+P_K(v-m(u)) \tag{3.2}$$

引理3.5 设$K\subset H$是一闭凸锥, $K(u)=m(u)+K$. 则$u\in K(u)$, $y\in V(u)$是广义强非线性拟补问题(2.1)的解, 当且仅当$u\in K(u)$, $y\in V(u)$满足下述广义强非线性拟变分不等式:

$$(v-u,\ Tu+Ay)\geqslant 0,\qquad \forall v\in K(u) \tag{3.3}$$

证 设$u\in K(u)$, $y\in V(u)$是问题 (2.1) 的解. 因为$K(u)=m(u)+K$, 若$v\in K(u)$, 则存在$z\in K$, 使$v=m(u)+z$. 由假设知

$$\begin{aligned}(Tu+Ay,\ v-u)&=(Tu+Ay,\ m(u)+z-u)\\&=(Tu+Ay,\ m(u)-u)+(Tu+Ay,\ z)=(Tu+Ay,\ z)\geqslant 0\end{aligned}$$

这表明$u\in K(u)$, $y\in V(u)$是问题 (3.3) 的解.

反之, 设$u\in K(u)$, $y\in V(u)$满足(3.3), 则$u-m(u)\in K$, 从而$2(u-m(u))\in K$. 又因$0\in K$, 故$m(u)\in K(u)$. 在 (3.3) 式中分别取$v=2u-m(u)$和$v=m(u)$, 有

$$(Tu+Ay,\ u-m(u))\geqslant 0,\ (Tu+Ay,\ u-m(u))\leqslant 0$$

由上面的不等式知

$$(Tu+Ay,\ u-m(u))=0 \tag{3.4}$$

下面证明$Tu+Ay\in K^*(u)$. 在 (3.3) 中取$v=m(u)+z$, 有

$$0\leqslant(Tu+Ay,\ v-u)=(Tu+Ay,\ m(u)+z-u)=(Tu+Ay,\ z)$$

这表明$Tu+Ay\in K^*$. 另一方面, 令$v=m(u)+u$, 则$v\in K(u)$. 在 (3.3) 中取$v=m(u)+u$, 有

$$0\leqslant(Tu+Ay,\ m(u)+u-u)=(Tu+Ay,\ m(u))$$

这表明$Tu+Ay\in m^*(u)$. 由引理3.1知$Tu+Ay\in K^*(u)$.

证毕.

引理3.6 设$K\subset H$是闭凸锥, $K(u)=m(u)+K$, 则$u\in K(u)$, $y\in V(u)$满足 (3.3) 当且仅当$u\in K(u)$, $y\in V(u)$满足下述关系:

$$u=\lambda m(u)+\lambda P_K[u-\rho(Tu+Ay)-m(u)]-(1-\lambda)u \tag{3.5}$$

其中 $0<\lambda<1$, $\rho>0$是常数.

证 由引理3.2与3.4即得.

根据引理3.5和3.6, 下面我们给出拟补问题 (2.1) 的一般的和统一的算法.

算法3.1 设$K\subset H$是闭凸锥, $m:K\to K$, $T:H\to H$, $A:H\to H$, $V:H\to C(H)$, 其中$C(H)$表H的非空紧子集的全体. 对任意给定的$u_0\in K$, 取$y_0\in V(u_0)$, 令

$$u_1=\lambda m(u_0)+\lambda P_K[u_0-\rho(Tu_0+Ay_0)-m(u_0)]+(1-\lambda)u_0$$

因$y_0\in V(u_0)\in C(H)$, 由[17]知存在$y_1\in V(u_1)$, 使

$$\|y_0-y_1\|\leqslant H(V(u_0),\ V(u_1))$$

其中$H(\cdot,\cdot)$是$C(H)$上的 Hausdorff 度量. 令

$$u_2=\lambda m(u_1)+\lambda P_K[u_1-\rho(Tu_1+Ay_1)-m(u_1)]+(1-\lambda)u_1$$

由归纳法，我们可得两序列$\{u_n\}$和$\{y_n\}$如下：

$$\left.\begin{array}{l} y_n\in V(u_n),\ \|y_n-y_{n+1}\|\leqslant H(V(u_n),\ V(u_{n+1})) \\ u_{n+1}=\lambda m(u_n)+\lambda P_K[u_n-\rho(Tu_n+Ay_n)-m(u_n)]+(1-\lambda)u_n \\ \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

其中 $0<\lambda<1$，$\rho>0$为常数。

如果$V:H\to H$是恒等映象，则由算法3.1易知

算法3.2　给定$u_0\in K$，计算

$$u_{n+1}=\lambda m(u_n)+\lambda P_K[u_n-\rho(Tu_n+Au_n)-m(u_n)]+(1-\lambda)u_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.7}$$

其中 $0<\lambda<1$，$\rho>0$为常数。

如果$m\equiv 0$，则由算法3.2有

算法3.3　给定$u_0\in K$，计算

$$u_{n+1}=(1-\lambda)u_n+\lambda P_K[u_n-\rho(Tu_n+Au_n)] \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.8}$$

其中 $0<\lambda<1$，$\rho>0$为常数。

四、存在性和收敛性

本节讨论广义强非线性拟补问题（2.1）解的存在性及由算法所构造的序列的收敛性。首先，我们给出下述定义。

定义4.1　映象$T:H\to H$称为

（i）　强单调的，如果存在常数$\alpha>0$，使得

$$(Tu-Tv,\ u-v)\geqslant\alpha\|u-v\|^2,\qquad \forall u,\ v\in H$$

（ii）　Lipschitz 连续的，如果存在常数$\beta>0$，使得

$$\|Tu-Tv\|\leqslant\beta\|u-v\|,\qquad \forall u,\ v\in H$$

注　如果$T:H\to H$是强单调的 Lipschitz 连续映象，则$\alpha\leqslant\beta$。

定义4.2　集值映象$V:H\to C(H)$称为H-Lipschitz 连续的，如果存在常数$\eta>0$，使得

$$H(V(u),\ V(v))\leqslant\eta\|u-v\|,\qquad \forall u,\ v\in H$$

定理4.1　设$T:H\to H$是强单调(单调常数为α)、Lipschitz 连续映象(Lipschitz 常数为β)，$A:H\to H$是 Lipschitz 连续映象（Lipschitz 常数为ξ），$m:K\to K$是 Lipschitz 连续映象（其 Lipschitz 常数为γ），$V:H\to C(H)$是H-Lipschitz 连续的（H-Lipschitz 常数为η）。如果

$$\left|\rho-\frac{\alpha-(1-2\gamma)\xi\eta}{\beta^2-\xi^2\eta^2}\right|<\frac{\sqrt{[\alpha-(1-2\gamma)\xi\eta]^2-4(\beta^2-\xi^2\eta^2)(\gamma-\gamma^2)}}{\beta^2-\xi^2\eta^2} \tag{4.1}$$

$$\alpha>(1-2\gamma)\xi\eta+2\sqrt{(\beta^2-\xi^2\eta^2)(\gamma-\gamma^2)} \tag{4.2}$$

$$\rho\xi\eta<1-2\gamma,\ \gamma<1/2,\ \xi\eta<\alpha \tag{4.3}$$

则存在$u\in K(u)$，$y\in V(u)$是广义强非线性拟补问题（2.1）的解，且由算法3.1所构造的序列$\{u_n\}$及$\{y_n\}$分别在H中强收敛于u及y。

证　由算法3.1及引理3.3，有

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u_n\|=&\|\lambda m(u_n)+\lambda P_K[u_n-\rho(Tu_n+Ay_n)-m(u_n)]+(1-\lambda)u_n-\lambda m(u_{n-1})\\ &-\lambda P_K[u_{n-1}-\rho(Tu_{n-1}+Ay_{n-1})-m(u_{n-1})]-(1-\lambda)u_{n-1}\|\\ \leqslant&\lambda\|m(u_n)-m(u_{n-1})\|+(1-\lambda)\|u_n-u_{n-1}\|\\ &+\lambda\|u_n-u_{n-1}-\rho(Tu_n-Tu_{n-1})-\rho(Ay_n-Ay_{n-1})-m(u_n)+m(u_{n-1})\|\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\lambda\|m(u_n)-m(u_{n-1})\|+(1-\lambda)\|u_n-u_{n-1}\|$$
$$+\lambda\|u_n-u_{n-1}-\rho(Tu_n-Tu_{n-1})\|+\lambda\rho\|Ay_n-Ay_{n-1}\|$$

因为T是强单调、Lipschitz 连续的，所以

$$\|u_n-u_{n-1}-\rho(Tu_n-Tu_{n-1})\|^2\leqslant(1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2)\|u_n-u_{n-1}\|^2$$

又由A的 Lipschitz 连续性及V的 H-Lipschitz 连续性可得

$$\|Ay_n-Ay_{n-1}\|\leqslant\xi\|y_n-y_{n-1}\|\leqslant\xi H(V(u_n),\ V(u_{n-1}))\leqslant\xi\eta\|u_n-u_{n-1}\|$$

综合上述不等式及m的 Lipschitz 连续性，有

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant\theta\|u_n-u_{n-1}\| \tag{4.4}$$

其中 $$\theta=2\lambda\gamma+(1-\lambda)+\lambda\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2}+\lambda\rho\xi\eta$$

由条件(4.1)～(4.3)易知$0<\theta<1$，因此，根据 (4.4) 易知$\{u_n\}$是 H 中的 Cauchy 序列。设$u_n\to u(n\to\infty)$，由(3.6)有

$$\|y_{n+1}-y_n\|\leqslant H(V(u_{n+1}),\ V(u_n))\leqslant\eta\|u_{n+1}-u_n\|$$

从而$\{y_n\}$也是H中 Cauchy 列。设$y_n\to y$ $(n\to\infty)$，利用算法 3.1及 P_K，T，A，m 的连续性，我们有

$$u=\lambda m(u)+\lambda P_K[u-\rho(Tu+Ay)-m(u)]+(1-\lambda)u$$

即 $$u=m(u)+P_K[u-\rho(Tu+Ay)-m(u)]\in K(u)$$

现在证明 $y\in V(u)$。事实上，

$$d(y,\ V(u))\leqslant\|y-y_n\|+d(y_n,\ V(u))\leqslant\|y-y_n\|+H(V(u_n),\ V(u))$$
$$\leqslant\|y-y_n\|+\eta\|u_n-u\|$$

其中 $d(y,\ V(u))=\inf\{\|y-z\|:z\in V(u)\}$。由上述不等式易知 $d(y,\ V(u))=0$，因 $V(u)\in C(H)$，故有$y\in V(u)$。

由引理3.5及3.6知$u\in K(u)$，$y\in V(u)$是问题（2.1）的解，且

$$u_n\to u,\qquad y_n\to y$$

证毕。

如果$V:H\to H$是恒等映象，则由定理4.1易得下述结果。

定理4.2 设T，m和A与定理4.1相同，如果

$$|(\rho-(\alpha-(1-2\gamma)\xi))/(\beta^2-\xi^2)|<\sqrt{[\alpha-(1-2\gamma)\xi]^2-4(\beta^2-\xi^2)(\gamma-\gamma^2)}\,/(\beta^2-\xi^2)$$
$$\alpha>(1-2\gamma)\xi+2\sqrt{(\beta^2-\xi^2)(\gamma-\gamma^2)},\quad \rho\xi<1-2\gamma,\quad \gamma<1/2,\quad \xi<\alpha$$

则问题（2.2）有解$u\in K(u)$，且由算法3.2所构造的序列$\{u_n\}$在H中强收敛于$u(u_n\to u)$。

定理4.3 设T，A与定理4.1相同，如果$m\equiv0$，且

$$0<\rho<2(\alpha-\xi)/(\beta^2-\xi^2),\quad \rho\xi<1,\quad \xi<\alpha$$

则问题(2.3)有解 $u\in K$，且

$$u_n\to u\qquad(n\to\infty)$$

其中 $\{u_n\}$ 是由算法3.3所构造的序列。

参 考 文 献

[1] Lemke, C. E., Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Management Sci.*, 11 (1965), 681—689.

[2] Cottle, R. W. and G. B. Dantzig, Complementarity pivot theory of mathematical programming, *Linear Algebra Appl.*, 1 (1968), 103—125.

[3] Lin, Y. and C. W. Cryer, An alternating direction implicit algorithm for the solution of linear complementarity problems arising from boundary problems, *Appl. Math. Optim.*, **13** (1985), 1—17.

[4] Cottle, R. W., Complementarity and variational problems, *Sympos. Math.*, **19** (1976), 177—208.

[5] Crank, J., *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford Univ. Press, London (1984).

[6] Pang, J. S., On the convergence of a basic iterative method for the implicit complementarity problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **37** (1982), 149—162.

[7] Pang, J. S., *The Implicit Complementarity Problem in Nonlinear Programming*, **4**, Ed by O. L. Mangasarian, R. Meyer and S. M. Robinson, Academic Press, New York/London (1981), 47—518

[8] Noor, M. A., Generalized quasi-complementarity problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **120** (1980), 321—327.

[9] Noor, M. A., Iterative method for quasi-complementarity problems, *Methods Oper. Res.*, **56** (1986), 75—83.

[10] Noor, M. A., The quasi-complementarity problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **130** (1988), 344—353.

[11] Noor, M. A. and S. Zarae, Linear quasi-complementarity problems, *Utilitas Math.*, **27** (1985), 249—26J.

[12] Noor, M. A., On the nonlinear complementarity problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **123** (1987), 455—460.

[13] Noor, M. A., Iterative methods for a class of complementarity problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **133** (1988), 366—382.

[14] Noor, M. A., Fixed point approach for complementarity problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **133** (1988), 437—448.

[15] Noor, M. A., On variational inequalities, Ph. D. thesis, Brunel Univ. U. K. (1975).

[16] Noor, M. A., An iterative scheme for a class of quasi variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **110** (1985), 463—468.

[17] Nalder, S. B., Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 475—488.

Generalized Strongly Nonlinear Quasi-Complementarity Problems in Hilbert Spaces

Zhang Shi-sheng Huang Nan-jing

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, we introduce a new kind of generalized strongly nonlinear quasi-complementarity problems in Hilbert space and discuss the existence of solutions for this kind of problems and the convergence of sequences generated by algorithms. The results presented in this paper improve and extend a number of known results.