

初始应力作用下的横向各向同性梁*

王晋莹 吕忠达

(西安公路学院, 1989年9月25日收到)

摘 要

本文从 Novozhilov 的非线性弹性理论基本方程出发, 经适当的简化, 用沿梁横截面积分的方法导出任意非均匀初始应力场作用下的横向各向同性梁的运动方程。当初始应力不存在时, 方程退化为经典的 Timoshenko 梁方程。作为例子, 本文用所得的方程, 研究了在初始轴向力、初始弯矩作用下的横向各向同性梁的屈曲及振动特性。

一、引 言

初始应力问题很早就引起人们的注意。M. A. Biot 建立了在初始应力作用下的三维弹性理论^[1], 并研究了初始应力对杆的扭转刚度的影响^[2]。G. Herrmann, A. E. Armenakas 研究了初始应力下板的振动和稳定性问题^[3]。E. J. Brunelle 从一个梁的微元体动力平衡出发, 导出了梁在初始轴向压力作用下的运动方程, 并讨论了梁的屈曲和振动特性^[4]。

为了导出横向各向同性 Timoshenko 梁在任意非均匀初始应力场作用下的一般方程, 本文从 Trefftz 应力分量和 Lagrangian 坐标表示的非线性弹性理论出发^[5], 经适当的简化, 用沿梁的整个截面积分的方法, 得到一组描述横向各向同性 Timoshenko 梁在任意初始应力作用下的运动微分方程。该方程考虑了梁的转动惯量和剪切变形的影响。作为例子, 本文分别讨论了梁在初始轴向力及初始弯矩作用下的振动和屈曲问题。

二、基本方程的建立

以 Trefftz 应力分量和 Lagrangian 坐标表示的非线性弹性理论基本方程, 当相对伸长和剪切变形为小量时可表示为^[5]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\delta_{js} + \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right) \sigma_{ij} \right] X_s = 0 \quad (i, j, s=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

对应的边界条件为

* 何福照推荐。

$$P_s = \sigma_{ij} n_i \left(\delta_{js} + \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right) \quad (i, j, s=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

其中, σ_{ij} , X_s 和 P_s 分别为弹性体的应力, 体力和面力; u_s 为相对于空间坐标系的 Cartesian 位移分量; x_i 是 Lagrangian 坐标; n_i 为弹性体外表面法线相对于空间坐标系的方向余弦; δ_{js} 为 Kronecker delta 函数,

$$\delta_{js} = \begin{cases} 0 & j \neq s \\ 1 & j = s \end{cases}$$

V. V. Bolotin 从方程 (2.1)、(2.2) 出发, 导出了在初始应力状态下物体受扰后变形和应力所满足的方程^[6]. 在微小扰动假设下, 方程可线性化为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \sigma_{is}}{\partial x_i} + X_s + \Delta X_s = \rho \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

边界条件为

$$P_s + \Delta P_s = \left(\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + \sigma_{is} \right) n_i \quad (i, j, s=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

其中, \bar{u}_s , $\bar{\sigma}_{ij}$, \bar{P}_s 和 \bar{X}_s 分别表示初始位移, 应力, 面力和体力; u_s , σ_{ij} , P_s 和 X_s 分别表示由于扰动产生的位移, 应力, 面力和体力; ΔP_s 和 ΔX_s 分别表示由于扰动引起的初始面力和体力的变化; $-\rho \partial^2 u_s / \partial t^2$ 则表示由于扰动而产生的惯性力。

对于梁我们这样建立空间坐标系, 取坐标 x_2 , x_3 分别为梁横截面的惯性主轴, x_1 则与梁的纵向主轴重合, 并假设被扰运动发生在 x_1 - x_3 平面内。

考虑到梁的变形特性, 我们假设被扰位移 u_1 和 u_3 取下列形式

$$u_1 = u(x_1, t) + x_3 \phi(x_1, t) + v_1(x_3, t) \quad (2.5)$$

$$u_3 = w(x_1, t) + v_3(x_1, x_3, t) \quad (2.6)$$

其中, u 和 w 分别可看作梁截面沿轴向和横向的平均扰动位移, ϕ 看作横截面相对于中性轴的平均转角, 且可表示为

$$u = \frac{1}{A} \iint u_1 dx_2 dx_3, \quad w = \frac{1}{A} \iint u_3 dx_2 dx_3, \quad \phi = \frac{1}{I} \iint x_3 u_1 dx_2 dx_3 \quad (2.7)$$

其中,

$$A = \iint dx_2 dx_3$$

为梁的横截面积;

$$I = \iint x_3^2 dx_2 dx_3$$

为截面对 x_2 轴的惯性矩; v_1 则表示横截面的翘曲. 由方程 (2.5)~(2.7) 易推知

$$\iint v_1 dx_2 dx_3 = \iint v_3 dx_2 dx_3 = \iint x_3 v_1 dx_1 dx_3 = 0 \quad (2.8)$$

对于横向各向同性梁, 我们假设被扰动的应力-位移关系满足线性弹性规律

$$\sigma_{11} = E \partial u_1 / \partial x_1 \quad (2.9)$$

$$\sigma_{13} = \lambda^2 G (\partial u_1 / \partial x_3 + \partial u_3 / \partial x_1) \quad (2.10)$$

其中, E 为平面弹性模量; G 为横向剪切模量; λ^2 为 Mindlin 剪切修正因子, 对此 Mindlin 和 Deresiewicz 曾讨论过并给以正确的定义^[7], 这里 λ^2 将取 $\pi^2/12$. 对于各向同性材料则有 $\lambda^2=1$.

为了便于导出方程, 我们将方程(2.3)写成更方便的形式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_i} + X_1 + \Delta X_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_i} + X_2 + \Delta X_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} + X_3 + \Delta X_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

$$(i, j=1, 2, 3)$$

将方程(2.11)乘以 $dx_2 dx_3$, 方程(2.13)乘以 $dx_2 dx_3$, 方程(2.11)乘以 $x_3 dx_2 dx_3$, 再分别沿整个梁的横截面积分, 并利用边界条件(2.4)和关系式(2.5)~(2.10), 我们得到在任意初始应力作用下横向各向同性 Timoshenko 梁的运动方程^[8]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + KAG\lambda^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + R_3 = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + M_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \phi Q_1 \right) + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + R_1 = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + M_1^* \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \phi Q_1^* \right) - Q_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - Q_1^* \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - N_3 \phi \\ & + EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - KAG\lambda^2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + R_1^* = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中, N_1 , M_1 , M_1^* , Q_1 , Q_1^* 和 N_3 分别表示初始应力的合力. 它们被定义为

$$N_1 = \iint \bar{\sigma}_{11} dx_2 dx_3, \quad M_1 = \iint x_3 \bar{\sigma}_{11} dx_2 dx_3, \quad Q_1 = \iint \bar{\sigma}_{13} dx_2 dx_3$$

$$M_1^* = \iint x_3^2 \bar{\sigma}_{11} dx_2 dx_3, \quad Q_1^* = \iint x_3 \bar{\sigma}_{13} dx_2 dx_3, \quad N_3 = \iint \bar{\sigma}_{33} dx_2 dx_3$$

K 为 Timoshenko 剪切系数, 它与梁的横截面形状有关, 根据 Cowper 的定义^[9]

$$K = \frac{2(1+\nu)I}{\nu(I_1 - I)/2 - \frac{A}{I} \iint x_3(\chi + x_3 x_3^2) dx_2 dx_3}$$

其中, ν 为泊松比;

$$I_1 = \iint x_3^2 dx_2 dx_3$$

$\chi(x_2, x_3)$ 是一个满足一定的横截面边界条件的简谐函数, 对不同截面形状的 χ 可以从一般的教科书中查到^[10]. R_1 , R_1^* 和 R_3 分别被定义为

$$R_1 = \oint (P_1 + \Delta P_1) ds + \iint (X_1 + \Delta X_1) dx_2 dx_3$$

$$R_1^* = \oint x_3 (P_1 + \Delta P_1) ds + \iint x_3 (X_1 + \Delta X_1) dx_2 dx_3$$

$$R_3 = \oint (P_3 + \Delta P_3) ds + \iint (X_3 + \Delta X_3) dx_2 dx_3$$

其中, ds 为横截面边界上的弧单元; R_1 则代表作用在单位长度梁上的轴向荷载的总增量; R_3 代表作用在单位长度梁上横向荷载的总增量. 我们注意到方程(2.14)~(2.16)是耦合的, 基本未知数是 u , w 和 ϕ .

作为方程(2.14)~(2.16)的特例, 当初始应力不存在时, 即 $N_1 = M_1 = M_1^* = Q_1 = Q_1^* = N_3 = 0$, 方程(2.15)退化为独立方程

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + R_1 = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

方程(2.17)表示横向各向同性梁的轴向运动方程. 我们注意到它与各向同性梁的轴向运动方程是完全一样的. 而方程(2.14)、(2.16)则退化为

$$KAG\lambda^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + R_3 = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - KAG\lambda^2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + R_1^* = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

这两个耦合的方程为横向各向同性 Timoshenko 梁的横向振动方程. 对于各向同性材料 $\lambda^2 = 1$, 方程(2.18)、(2.19)有下列形式

$$KAG \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + R_3 = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - KAG \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + R_1^* = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

方程(2.20)、(2.21)即为各向同性 Timoshenko 梁的基本方程. 我们也可以从方程(2.20)、(2.21)中消去 ϕ , 并令 $R_1^* = 0$, $R_3 = 0$, 则得方程

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{KG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2} + \frac{I \rho^2}{KG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.22)$$

这就是我们熟知的 Timoshenko 梁的运动方程^[11].

三、方程的应用

作为第一个例子, 我们研究横向各向同性梁受到初始轴向力作用的情形. 设 $\bar{\sigma}_{11}$ 为常数, 则对应的初始应力的合力为

$$N_1 = \iint \bar{\sigma}_{11} dx_2 dx_3 = \text{const}, \quad M_1 = M_1^* = Q_1 = Q_1^* = N_3 = 0$$

为方便起见, 设 $N_1 = P$, 则方程(2.14)~(2.16)变为

$$(KAG\lambda^2 + P) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + KAG\lambda^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$(EA + P) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

$$I(E + P/A) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - KAG\lambda^2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

1. 纵向振动

方程(3.2)是个独立方程, 它描述横向各向同性梁在初始轴向力作用下的纵向振动, 若考虑边界条件

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0, l} = 0$$

我们可假设方程(3.2)的解为

$$u = u_n \cos \frac{n\pi}{l} x \exp[i\omega_n t] \quad (3.4)$$

将式(3.4)代入方程(3.2)得

$$\omega_n^2 = \left(1 + \frac{P}{EA} \right) \frac{E}{\rho} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$$

或
$$\left(\frac{\omega_n}{\omega_n}_0 \right) = \left(1 + \frac{P}{EA} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

其中, $(\omega_n)_0 = (n\pi/l) \sqrt{E/\rho}$ 为零初始应力状态下梁纵向振动的固有频率。

由式(3.5)可知, 初始轴向拉力使杆的固有频率增大 (P 取正值); 初始轴向压力使杆的固有频率减小 (P 取负值), 且当轴向压力等于 EA 时, $\omega_n = 0$, 此时轴向压力 P 达到它的临界屈曲值。

2. 弯曲振动

相互耦合的方程(3.1)、(3.3)描述了横向各向同性梁在初始轴向力作用下的弯曲振动, 为讨论方便, 引入以下无量纲量

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad T^2 = \frac{I}{Al^2}, \quad Q = \frac{Pl^2}{EI}, \quad D = \frac{E}{KG\lambda^2}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho Al^4}{EI} \omega^2$$

并且假设

$$w = W(\xi) \exp[i\omega t], \quad \phi = \Phi(\xi) \exp[i\omega t]$$

则方程(3.1)、(3.3)可化为

$$(1 + T^2 Q D) W'' + T^2 \Omega^2 D W + l \Phi' = 0 \quad (3.6)$$

$$-T^2 D (1 + T^2 Q) \Phi'' + (1 - T^4 \Omega^2 D) \Phi + l^{-1} W' = 0 \quad (3.7)$$

其中, “'”表示对 ξ 求导, 从方程(3.6)、(3.7)中消去 Φ 或 W 得方程

$$aW^{(4)} + bW'' + cW = 0 \quad (3.8)$$

$$a\Phi^{(4)} + b\Phi'' + c\Phi = 0 \quad (3.9)$$

其中, $a = (1 + T^2Q)(1 + T^2QD)$, $b = T^2\Omega^2(1 + D) - (1 - 2T^4\Omega^2D)Q$, $c = (T^4\Omega^2D - 1)\Omega^2$

对于梁的典型端点, 有边界条件

$$\text{i) 简支端: } W = 0, \Phi' = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{ii) 固定端: } W = 0, \Phi = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{iii) 自由端: } \Phi' = 0, W'/l - \Phi = 0 \quad (3.12)$$

利用合适的边界条件(3.10)~(3.12), 求解方程(3.8)、(3.9), 则可得横向各向同性梁在初始轴向力作用下的固有频率和模态。

本文将以简支梁为例讨论它的横向振动问题。

对于不同数值的 a 、 b 、 c , 方程(3.8)、(3.9)可能有不同形式的解。因而除了弯曲振动的模态之外, 还可能预见出现剪切模态。一些研究指出剪切模态的出现是 Timoshenko 梁理论的不可避免的推论^{[12][13]}。正如在 Mindlin 板理论中还会推出沿厚度方向的扭转模态和剪切模态一样, 它没有任何物理意义。所以本文只讨论有意义的弯曲振动模态。

当 $a > 0$, $c < 0$ 时, 方程(3.8)、(3.9)的解为

$$W(\xi) = A_1 \text{ch} a \xi + A_2 \text{sh} a \xi + A_3 \cos \beta \xi + A_4 \sin \beta \xi \quad (3.13)$$

$$\Phi(\xi) = a_1 \text{sh} a \xi + a_2 \text{ch} a \xi + a_3 \sin \beta \xi + a_4 \cos \beta \xi \quad (3.14)$$

其中, $a = [(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a]^{1/2}$, $\beta = [(b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a]^{1/2}$

对于简支梁, 考虑边界条件(3.10), 由式(3.13)、(3.14)可得频率方程

$$\sin \beta = 0 \quad (3.15)$$

对应的弯曲振动的模态为

$$W_n(\xi) = A_n \sin \beta_n \xi, \Phi_n(\xi) = -(\beta_n l)^{-1} [\beta_n^2 (1 + T^2 Q D) - T^2 \Omega_n^2 D] A_n \cos \beta_n \xi$$

展开频率方程(3.15)可得到在初始轴向力作用下的梁的频率

$$\Omega_n = [(e \mp \sqrt{e^2 - 4f})/2]^{1/2} \quad (3.16)$$

其中, $e = (T^4 D)^{-1} + n^2 \pi^2 [(1 + D^{-1})T^{-2} + 2Q]$

$$f = n^2 \pi^2 (T^4 D)^{-1} [(1 + QT^2 D)(1 + QT^2) n^2 \pi^2 + Q]$$

方程(3.16)给出了频率 Ω_n 与轴向力 Q 的关系。图 1 给出了第一阶固有频率 Ω_1 与 Q 的关系。对于横向各向同性材料, 平面弹性模量 E 和横向剪切模量 G 之比值 E/G 很大, 通常在 20 至 50 之间。这里, E/G 取我们感兴趣的范围, $\lambda^2 = \pi^2/12$, $K = 0.8459$ (矩形截面)。由图 1 可看出轴向拉力使梁横向振动的固有频率升高; 轴向压力使固有频率下降。

3. 屈曲问题

当轴向压力足够大时, Ω_1 将变为零, 我们说此时梁处于屈曲状态。为方便, 令 $N_1 = -P$, $P > 0$ 则方程(3.1)~(3.3)变为

$$(KAG\lambda^2 - P) \frac{d^2 w}{dx_1^2} + KAG\lambda^2 \frac{d\phi}{dx_1} = 0 \quad (3.17)$$

$$I(E - P/A) \frac{d^2 \phi}{dx_1^2} - KAG\lambda^2 \left(\phi + \frac{dw}{dx_1} \right) = 0 \quad (3.18)$$

从方程(3.17)、(3.18)中消去 ϕ 得

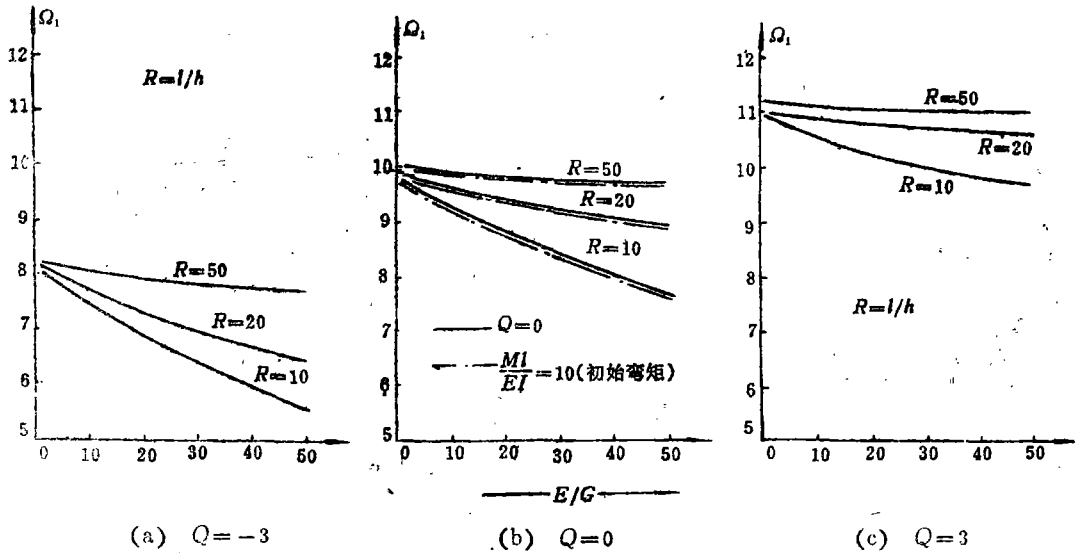


图1 第一阶频率与E/G关系图

$$\frac{d^4 w}{dx_1^4} + \theta^2 \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0 \quad (3.19)$$

其中, $\theta^2 = \frac{KA^2 G \lambda^2 P}{I(EA - P)(KAG \lambda^2 - P)}$

对于 $EA > P, KAG \lambda^2 > P$, 方程(3.19)有通解

$$w(x_1) = b_1 \cos \theta x_1 + b_2 \sin \theta x_1 + b_3 x_1 + b_4 \quad (3.20)$$

并由方程(3.17)可得

$$\phi(x_1) = \theta(b_1 \sin \theta x_1 - b_2 \cos \theta x_1)(1 - P/KAG \lambda^2) - b_3 \quad (3.21)$$

对于简支梁, 由边界条件(3.10)可得梁的屈曲系数

$$\frac{Pl^2}{EI} = \frac{Al^2}{2I} (e_1 - \sqrt{e_1^2 - 4f_1}) \quad (3.22)$$

其中, $e_1 = 1 + K \lambda^2 \left(\frac{G}{E}\right) + K \lambda^2 \left(\frac{G}{E}\right) \left(\frac{Al^2}{I \pi^2}\right), f_1 = K \lambda^2 \left(\frac{G}{E}\right)$

类似地对两端固支的梁可得屈曲系数为

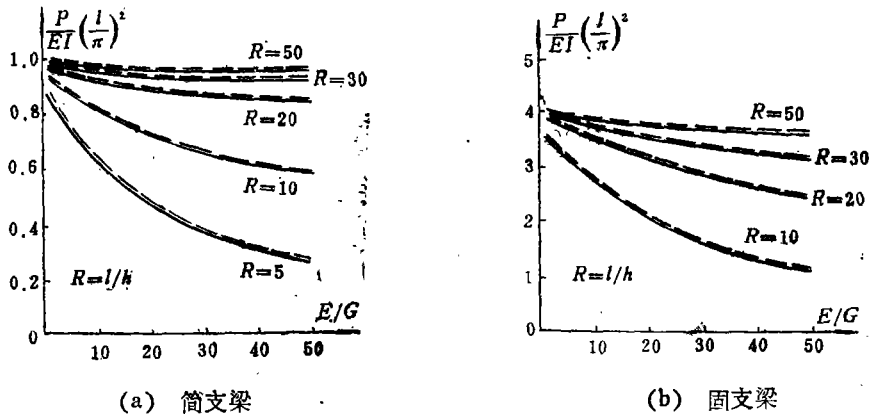
$$\frac{Pl^2}{EI} = \frac{Al^2}{2I} (e_2 - \sqrt{e_2^2 - 4f_2}) \quad (3.23)$$

其中, $e_2 = 1 + K \lambda^2 \left(\frac{G}{E}\right) + \frac{K \lambda^2}{4} \left(\frac{G}{E}\right) \left(\frac{Al^2}{I \pi^2}\right), f_2 = K \lambda^2 \left(\frac{G}{E}\right)$

我们分别绘出简支梁和固支梁的屈曲系数与比值E/G的关系图(图2)。仍取 $\lambda^2 = \pi^2/12$, K取0.8459。为了比较, 我们用虚线表示 Brunelle 在相同边界条件下的屈曲系数。从图中可以看出, 对于矩形截面梁, 两者的结果是接近的。

第二个例子我们将讨论简支梁在均匀初始弯曲应力作用下的动力特性。见图3所示, 有 $\bar{\sigma}_{11} = 2x_3 \sigma_M/h$, 对应的初始应力状态为

$$N_1 = 0, M_1 = 2I \sigma_M/h = M, M_1^* = Q_1 = Q_1^* = N_3 = 0$$



— 本文结果, ---- Brumelle 结果

图 2 横向各向同性梁的屈曲系数

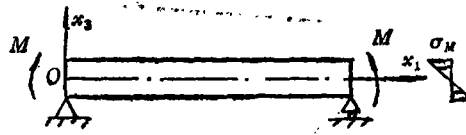


图 3

则方程(2.14)~(2.16)可简化为

$$KAG\lambda^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.24)$$

$$M \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - KAG\lambda^2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

方程(3.24)~(3.26)是相互耦合的, 我们可假设满足边界条件(3.10)的解为

$$w = B_1 \sin \frac{n\pi}{l} x \exp[i\omega t], \quad \phi = B_2 \cos \frac{n\pi}{l} x \exp[i\omega t], \quad u = B_3 \cos \frac{n\pi}{l} x \exp[i\omega t] \quad (3.27)$$

将式(3.27)代入方程(3.24)~(3.26)有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

其中, $a_{11} = KAG\lambda^2 \gamma^2 - \rho A \omega^2$, $a_{12} = a_{21} = KAG\lambda^2 \gamma$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{22} = EI\gamma^2 + KAG\lambda^2 - \rho I \omega^2$, $a_{23} = a_{32} = M\gamma^2$, $a_{33} = EA\gamma^2 - \rho A \omega^2$, $\gamma = n\pi/l$

要使方程(3.28)有非零解, 必须使它的系数行列式为零, 则得频率方程

$$T^2 \Omega^6 + C_1 \Omega^4 + C_2 \Omega^2 + C_3 = 0 \quad (3.29)$$

其中, $C_1 = (2 + D^{-1})(n\pi)^2 + (DT^2)^{-1}$
 $C_2 = (n\pi)^2 [(1 + 2D^{-1})(n\pi)^2 T^{-2} + (DT^4)^{-1} - (MI)^2 (EI)^{-2} n\pi]$
 $C_3 = (n\pi)^6 [T^{-2} - (MI)^2 (EI)^{-2} (DT^2)^{-1}]$

根据方程(3.29)我们可得系统固有频率与 E/G 的关系图。图1(b)中的点划线即为初始弯矩作用下系统基频与 E/G 的关系曲线。结果表明,初始弯矩对固有频率的影响是很小的。

四、结 论

上述的讨论表明了初始应力对梁的静力与动力特性有着不可低估的影响。通常梁的横向振动用简单的 Euler-Bernoulli 梁理论来描述,它略去了梁质量的转动惯量和剪切变形的影响。当梁的截面尺寸对固有频率的影响不能忽略或当考虑高阶模态时,简单梁理论将产生较大的误差。方程(2.14)~(2.16)是由非线性弹性理论基本方程推出,它不仅包含转动惯量和剪切变形的影响,而且还体现了剪切系数 K 的影响,因而它是描述任意初始应力状态下 Timoshenko 梁的更为严格更一般的运动方程,而且我们可以很方便地用本文导出的方程讨论任意初始应力状态下的静力、动力问题。

由前面的例子又可看出,不论是振动问题还是屈曲问题都与剪切系数 K 有关,而 K 取决于横截面的形状。Brunelle 的讨论仅限于初始轴向力作用,并且没有考虑 K 的影响^[4]。对于常见梁如矩形截面梁 $K=0.8459$,圆形截面梁 $K=0.886$,这时 Brunelle 的结果与本文相接近;而空心截面梁如圆环 $K=0.5306$,正方形框 $K=0.4355$,由表达式(3.16), (3.22), (3.23)容易看出,不涉及 K 的讨论可能导致大的误差。

参 考 文 献

- [1] Biot, M. A., Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress, *Phil. Mag.*, 27 (1940), 468—489.
- [2] Biot, M. A., Increase of torsional stiffness of a prismatical bar due to axial tension, *J. Applied Physics*, 10 (1939), 860—864.
- [3] Herrmann, G. and A. E. Armenakas, Vibrations and stability of plates under initial stress, *Trans. ASCE*, 127, Part I (1962), 458—487.
- [4] Brunelle, E. J., The statics and dynamics of a transversely isotropic Timoshenko beam, *J. Composite Materials*, 4, (1970), 404—416.
- [5] Novozhilov, V. V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, Graylock Press, Rochester, N. Y. (1953).
- [6] Bolotin, V. V., *Non-Conservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Macmillan, New York (1963).
- [7] Mindlin, R. D. and H. Deresiewicz, Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams, *Proc. of the 2nd U. S. National Congress of Applied Mechanics* (1954), 175.
- [8] Wang, J. Y. and N. G. Stephen, Effect of initial stress on vibration and buckling of a Timoshenko beam, *Proc. of ICMDEA* (1988).
- [9] Cowper, G. R., The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Trans. ASME, J. of Applied Mechanics*, 33 (1966), 335—340.
- [10] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y. (1956).
- [11] Timoshenko, S. and D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, 4th Edition, John Wiley & Sons (1974).

- [12] Levinson, M., Free vibrations of a simply supported rectangular plate: an exact elasticity solution, *J. Sound and Vibration*, **98**, 2 (1985), 289—298.
- [13] Stephen, N. G., The second frequency spectrum of Timoshenko beams, *J. Sound and Vibration*, **80** (1982), 578—582.

Transversely Isotropic Beam under Initial Stress

Wang Jin-ying Lü Zhong-da

(Xi'an Highway Institute, Xi'an)

Abstract

Starting from Novozhilov's nonlinear equations of elasticity by appropriate simplification and integration over the beam cross section, a linearized set of equations for a transversely isotropic beam under initial non-uniform state of stress is obtained. In the absence of initial stress, the obtained equations are reduced to well-known Timoshenko beam equations.

These equations are applied to investigate the vibration and buckling characteristics of a transversely isotropic beam under uniform initial axial force and bending moment.