应用数学和力学，第11卷第5期(1990年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

旋转壳的抗扭刚度

钱 伟 长

(上海工业大学；上海市应用数学和力学研究所，1989年9月4日收到)

摘　要

本文列出了旋转壳在包括扭转在内的轴对称变形下的一般平衡方程，并证明了旋转对称壳内的剪应力独立于壳内其它薄膜和弯曲应力.

本文求解了只考虑薄膜应力的扭转问题，也求解了考虑弯曲扭应力在内的扭转问题，并指出了在薄壳中，抗扭刚度的主要部份来源于薄膜应力.

一、引　论

环壳和波纹壳的抗扭刚度在机械零件设计上都是连接件的重要问题，但并未系统研究过.这些壳都是旋转对称壳.扭转变形也是轴对称变形，但一般研究旋转壳的轴对称变形变形问题时，都假设壳内没有剪应力.H. Reissner(1912)[1]，H. Wissler(1916)[2]，E. Meissner(1913, 1916)[3]，F. Töeke(1938)[4]，R. A. Clark(1950)[5]，В. В. Новожилов(1951)[6]，等理论都是这样处理的.作者(1929)[7]所研究的轴对称圆环壳方程也是在假设剪应力等于零的条件下进行的.所以，这些理论都不能用来研究旋转对称壳的扭转问题.

扭转问题的应力也是轴对称的，但壳内的子午线截面和环向截面内的剪应力都不等于零.本文将从最小位能原理出发，研究旋转对称壳包括扭转在内的轴对称变形所满足弹性平衡方程式.我们将指出，轴对称扭转所生的应力和轴对称其它变形所生的应力是各不相扰，互相独立的.从此，我们求得了旋转对称壳在两端面扭矩作用下的平衡方程.

事实上证明扭矩所产生的薄膜剪应力，是抗扭应力的主要部份，弯曲扭应力只是微量的修正.我们研究了各种旋转壳、如环壳和波纹壳的抗扭刚度.包括薄膜理论的抗扭刚度和弯曲理论的抗扭刚度.前者是抗扭刚度的主要部份，后者只是修正.

二、旋转壳轴对称变形的一般平衡方程

对于壳的小挠度理论而言，如果取中面上的高斯坐标系(α_1, α_2)，其微元线段可以用下式表示（图1）

$$ds^2=A_1^2d\alpha_1^2+A_2^2d\alpha_2^2 \tag{2.1}$$

其中 A_1, A_2为有关的中面坐标尺度，并设R_1, R_2为中面坐标的曲率半径．所有A_1, A_2, R_1, R_2都是α_1, α_2的函数．而且根据微分几何，它们满足高斯-柯达兹(Gauss-Codazzi)方程[8]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{R_2}\right)=\frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{R_1}\right)=\frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} \tag{2.2a,b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)=-\frac{A_1A_2}{R_1R_2} \tag{2.2c}$$

根据克希霍夫的薄壳古典假定．设u, v, w为位移分量，则中面应变和位移的关系为[9]

$$\left.\begin{aligned}
e_{11}&=\frac{1}{A_1}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v+\frac{A_1}{R_1}w\right]\\
e_{12}=e_{21}&=\frac{1}{2}\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{v}{A_2}\right)+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u}{A_1}\right)\right]\\
e_{22}&=\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u+\frac{A_2}{R_2}w\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2.3a,b,c}$$

中面曲率变化($k_{11}, k_{22}, k_{12}=k_{21}$)和位移的关系为

$$\left.\begin{aligned}
k_{11}=&\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u}{R_1}\right)\\
&+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{v}{R_2}\right)\\
k_{22}=&\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{v}{R_2}\right)\\
&+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u}{R_1}\right)\\
k_{12}=k_{21}=&\frac{1}{2}\left\{\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{v}{R_2}\right)\right]\right.\\
&\left.+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u}{R_1}\right)\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{2.4a,b,c}$$

薄膜力$N_{11}, N_{22}, N_{12}=N_{21}$和弯矩$M_{11}, M_{22}, M_{12}=M_{21}$可以写成

$$\left.\begin{aligned}
&N_{11}=B(e_{11}+\nu e_{22}), && M_{11}=-D(k_{11}+\nu k_{22})\\
&N_{22}=B(e_{22}+\nu e_{11}), && M_{22}=-D(k_{22}+\nu k_{11})\\
&N_{12}=N_{21}=B(1-\nu)e_{12}, && M_{12}=M_{21}=-(1-\nu)Dk_{12}
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中B为抗拉刚度，D为拉弯刚度．

$$B=\frac{Eh}{1-\nu^2},\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.6}$$

于是一般薄壳的最小位能原理的泛函可以写成

$$\begin{aligned}
\Pi=&\frac{1}{2}\iint B[(e_{11}+e_{22})^2-2(1-\nu)(e_{11}e_{22}-e_{12}^2)]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\\
&+\frac{1}{2}\iint D[(k_{11}+k_{22})^2-2(1-\nu)(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2
\end{aligned}$$

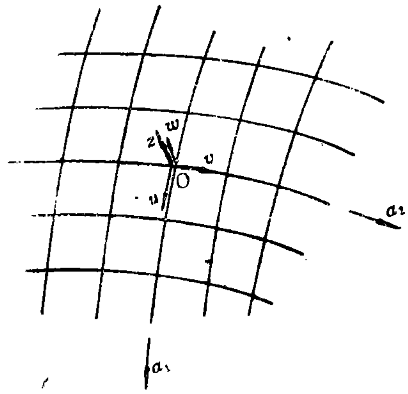

图1 中面上的高斯坐标系（α_1, α_2为中面上的正交曲线坐标，z为垂直中于面的坐标）

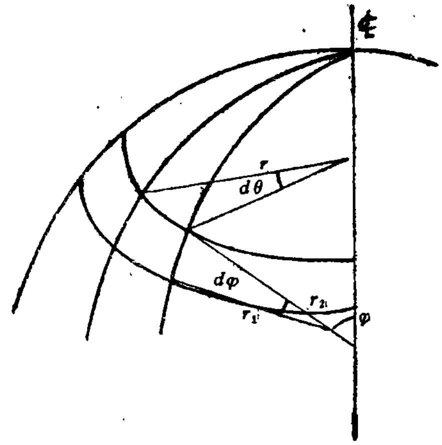

图2 旋转壳的坐标

$$-\iint qwA_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+\text{边界已给外力所作的功} \tag{2.7}$$

其中 q为中面所受分布外力（垂直），和z方向相同者为正。其变分为

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&\iint[N_{11}\delta e_{11}+N_{22}\delta e_{22}+2N_{12}\delta e_{12}]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\\&-\iint[M_{11}\delta k_{11}+M_{22}\delta k_{22}+2M_{12}\delta k_{21}]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\\&-\iint q\delta wA_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+\text{边界已知外力对变分位移所作之功}\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于旋转壳而言，取坐标$\alpha_1=\varphi$，$\alpha_2=\theta$（图2）。有关线元为

$$ds^2=r_1^2d\varphi^2+r^2d\theta^2 \tag{2.9}$$

于是有

$$A_1=r_1,\quad A_2=r;\quad R_1=r_1,\quad R_2=r_2=\frac{r}{\sin\varphi} \tag{2.10}$$

其中 r_2和r的关系为

$$r_2=\frac{r}{\sin\varphi} \tag{2.11}$$

由于r_1，r_2，r都只是φ的函数，Gauss-Codazzi方程（2.2b,c）自动适合，(2.2a)给出

$$\frac{dr}{d\varphi}=r_1\cos\varphi \tag{2.12}$$

如果变形也是轴对称的，所以，我们取

$$u=u(\varphi),\quad v=v(\varphi),\quad w=w(\varphi) \tag{2.13}$$

于是（2.3）为

$$\left.\begin{aligned}&e_{11}=\frac{1}{r_1}\left(\frac{du}{d\varphi}+w\right),\qquad k_{11}=\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r_1}\left(\frac{dw}{d\varphi}-u\right)\\&e_{22}=\frac{1}{r_2}(u\operatorname{ctg}\varphi+w),\qquad k_{22}=\frac{\cos\varphi}{rr_1}\left(\frac{dw}{d\varphi}-u\right)\\&e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\frac{r}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r}\right),\quad k_{12}=k_{21}=-\frac{1}{2}\frac{r}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{rr_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

通过分部积分 (2.8) 式可以化为

$$\delta\Pi=+\int\left\{-\frac{d}{d\varphi}(N_{11}r)+N_{22}r_1\cos\varphi+\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}(M_{11}r)\right.$$
$$\left.-M_{22}\cos\varphi\right\}\delta u2\pi d\varphi+\int\left\{N_{11}r+N_{22}r_1\cos\varphi+\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}(rM_{11})\right.$$
$$\left.-\frac{d}{d\varphi}(M_{22}\cos\varphi)-qr_1r\right\}\delta w2\pi d\varphi+\int\left\{-\frac{1}{r}\frac{d}{d\varphi}(N_{12}r^2)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{rr_2}\frac{d}{d\varphi}(M_{12}r^2)\right\}\delta v2\pi rd\varphi+\text{有关端边界上的诸项.}\qquad(2.15)$$

当Π为极值时，δu，δw，δv任意的，所以，从 (2.15) 得下列平衡方程.

$$-\frac{d}{d\varphi}(N_{11}r)+r_1N_{22}\cos\varphi+\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}(M_{11}r)-M_{22}\cos\varphi=0\qquad(2.16a)$$

$$N_{11}r+N_{22}r_1\cos\varphi+\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}(rM_{11})-\frac{d}{d\varphi}(M_{22}\cos\varphi)-qr_1r=0\qquad(2.16b)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{d\varphi}(N_{12}r^2)+\frac{1}{r_2r}\frac{d}{d\varphi}(M_{12}r^2)=0\qquad(2.16c)$$

在这三个平衡方程中，很容易看到 (2.16c) 式是一个独立的求解N_{12}，M_{12}的方程式. 因为N_{12}，M_{12}对轴对称变形的问题而言，都只是v的函数. 所以，(2.16c)就是求解v，从而求解抗扭刚度的微分方程. (2.16a)，(2.16b)中N_{11}，N_{22}，M_{11}，M_{22}诸内力素都和v无关，只是u，w的函数，这两个方程就是求解不包括扭转在内的轴对称变形问题的方程. 我们的结论是对于一般的旋转壳的轴对称问题而言，扭转变形和不是扭转的变形是互相独立的，扭转变形只和$v(\varphi)$有关，由 (2.16c) 求解. 不是扭转的轴对称变形，是$u(\varphi)$和$w(\varphi)$所决定的，由 (2.16a, b) 两式求解.

三、扭转变形的薄膜解

在很薄的旋转壳中，N_{12}比M_{12}大得很多，亦即弯曲扭矩可以略去. 这是经典的薄膜解的基本假定，(2.16c)式在薄膜假定下可以略去M_{12}项而写成

$$\frac{d}{d\varphi}(N_{12}r^2)=0\qquad(3.1)$$

或积分后，为

$$N_{12}r^2=\text{常数}\qquad(3.2)$$

现在让我们考虑旋转壳被垂直于轴的平面所切开的一个截面. 这个截面是一个厚度为h的圆圈，它的中线圆半径为r，剪力N_{12}对轴心的力矩为rN_{12}. 这是中线圆上单位长度的剪力N_{12}对r的力矩，整个圆周长度为$2\pi r$，于是这个圆环截面上的剪力对轴心的总力矩，即扭矩为

$$M(\text{扭矩})=2\pi r^2N_{12}=\text{常数}\qquad(3.3)$$

这和 (3.2) 式是一致的. 亦即是说，这里只考虑了剪力所产生的扭矩，对于弯曲扭矩M_{12}作用在这个截面上所产生的扭矩完全略去了. 由于

$$N_{12}=B(1-\nu)e_{12}=\frac{1}{2}B(1-\nu)\frac{r}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r}\right) \tag{3.4}$$

所以(3.3)给出

$$\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r}\right)=\frac{M}{B(1-\nu)\pi r^3} \tag{3.4$'$}$$

所以，积分得

$$\frac{v}{r}=\int_{\varphi_A}^{\varphi}\frac{Mr_1}{\pi B(1-\nu)\pi r^3}d\varphi+\frac{v_A}{r_A} \tag{3.5}$$

其中 v_A/r_A 为积分常数，相当于 v/r 在截面A处的值。我们必须指出，v/r 为截面的转角，$\frac{v}{r}-\frac{v_A}{r_A}$ 为截面 φ 相对于截面φ_A的相对扭角ψ

$$\psi=\left[\int_{\varphi_A}^{\varphi}\frac{r_1}{r^3}d\varphi\right]\frac{M}{\pi B(1-\nu)} \tag{3.6}$$

所以抗扭刚度 C 可以写成

$$C(\text{抗扭刚度})=\frac{M}{\psi}=\frac{\pi B(1-\nu)}{\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{r_1}{r^3}d\varphi} \tag{3.7}$$

现在让我们考虑几个特例：

（甲）球壳的抗扭刚度（图3）

$$C=\frac{a^2\pi B(1-\nu)}{\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}} \tag{3.8}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\ln\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi_0}^{\varphi} \tag{3.8$'$}$$

（乙）圆环壳的抗扭刚度（图4）

$$C=\frac{R^3\pi B(1-\nu)}{a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^3}} \tag{3.9}$$

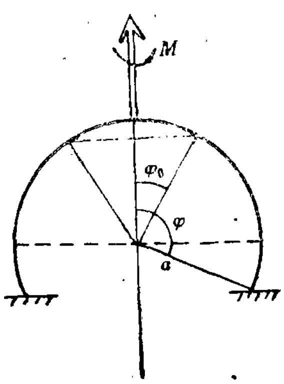

图3 球壳的扭转

$(r_1=a, r=a\sin\varphi)$

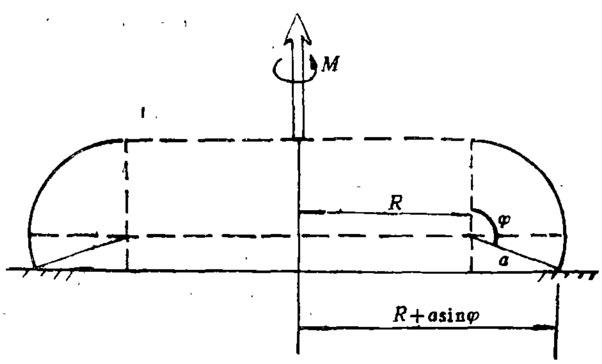

图4 圆环壳的抗扭刚度

（丙）反圆环壳的抗扭刚度（图5）

$$C=\frac{R^3\pi B(1-\nu)}{a\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\left(1-\frac{a}{R}\sin\varphi'\right)^3}} \tag{3.10}$$

（丁）半圆弧波纹壳的抗扭刚度（图6）

半圆弧波纹壳由半圆弧环壳和反半圆弧环壳交替联接组成。设每一交替为一节，半圆弧波纹壳由 n 节组成。

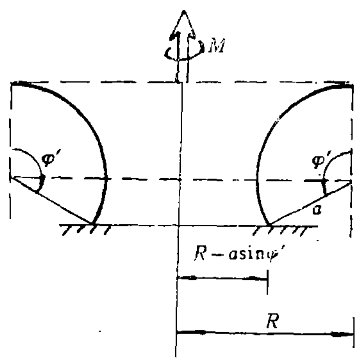

图5 反圆环壳的抗扭刚度

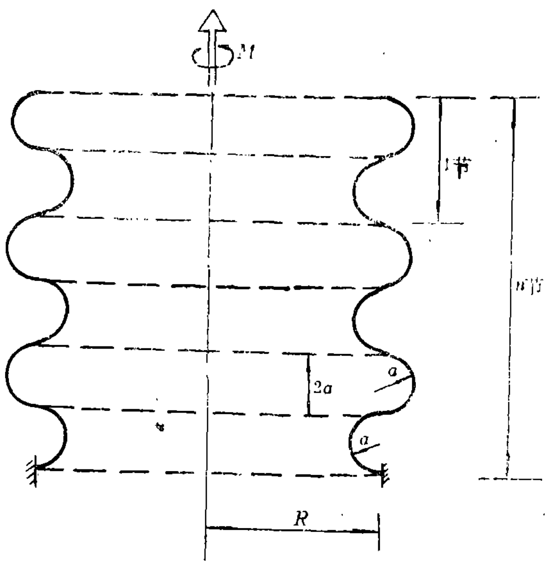

图6 波纹壳的抗扭刚度

$$C=\frac{R^3\pi B(1\nu)}{na\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{(1+\frac{a}{R}\sin\varphi)^3}+\frac{1}{(1-\frac{a}{R}\sin\varphi)^3}\right]d\varphi} \tag{3.11}$$

依此类推，可以用计算其它截面的旋转壳的抗扭刚度。

四、考虑弯曲扭应力在内的扭转方程

如果弯曲扭矩M_{12}考虑在内，则扭矩平衡方程应该是(2.16c)，经简化后可以写成

$$-\frac{d}{d\varphi}(N_{12}r^2)+\frac{1}{r_2}\frac{d}{d\varphi}(M_{12}r^2)=0 \tag{4.1}$$

它也可以写成

$$-\frac{d}{d\varphi}(N_{12}r^2)+\frac{d}{d\varphi}\left(M_{12}\frac{r^2}{r_2}\right)-M_{12}rr_1\cos\varphi\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=0 \tag{4.2}$$

让我们用扭矩（轴向）平衡的观念来认识（4.2）式。图 7 中可以看到在$\varphi=$常数的截面上，有两个轴向扭矩的合力：（1）剪力 N_{12} 的绕轴扭矩的总和，它是 $2\pi N_{12}r^2$；（2）分布弯曲扭矩的轴向分量的合扭矩，它是$2\pi M_{12}\sin\varphi\ r$，或为$2\pi M_{12}r^2/r_2$扭矩平衡的概念要求

$$\frac{d}{d\varphi}\left(2\pi N_{12}r^2-2\pi M_{12}\frac{r^2}{r_2}\right)=0 \tag{4.3}$$

或

$$\frac{d}{d\varphi}(N_{12}r^2)-\frac{d}{d\varphi}\left(M_{12}\frac{r^2}{r_2}\right)=0 \tag{4.4}$$

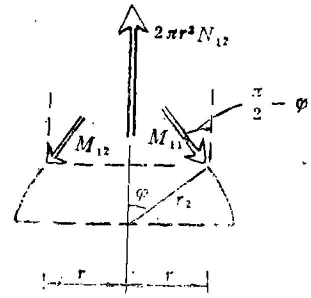

图7 绕轴扭矩的矢量和

这就是(4.2)式的第一第二两项。这指出(4.2)的第三项从平衡概念看是多余的。其实，我们应该注意到，在壳的一般理论中，为了使$N_{12}=N_{21}$，$M_{12}=M_{21}$，我们引进了一些**对称化假定**。其实由于坐标线$\theta=$常数和$\varphi=$常数的曲率半径不相等，M_{12}和M_{21}是不可能对称的。这个对称化假定长期以来一直是壳体基本理论的争论之一。这个假定在(4.2)中暴露了它的明显缺点。我们在这里不准备对此作详细讨论。但在处理本物理题时，我们将采用(4.4)式，而放弃(4.2)式。

将(4.4)式积分一次

$$N_{12}r^2-M_{12}\frac{r^2}{r_2}=\text{常数} \tag{4.5}$$

这就是总轴向扭矩守恒($M=$总扭矩)。

$$\frac{M}{2\pi}=-M_{12}\frac{r^2}{r_2}+N_{12}r^2=\text{常数} \tag{4.6}$$

或

$$\frac{M}{\pi}=(1-\nu)D\frac{r^3}{r_1r_2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{rr_2}\right)+(1-\nu)B\frac{r^3}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r}\right) \tag{4.7}$$

或

$$\frac{M}{\pi(1-\nu)B}\frac{r_1}{r^3}=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{h^2}{12r_2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{rr_2}\right) \tag{4.8}$$

对于圆环壳而言，上式可以化为

$$\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)\left[\frac{h^2}{12R^2}\sin^2\varphi+\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^2\right]\frac{d\Phi}{d\varphi}$$

$$+\frac{h^2}{12R^2}\cos\varphi\sin\varphi\Phi-\frac{Ma}{\pi(1-\nu)BR^3}=0 \tag{4.9}$$

$$\Phi=\frac{v}{R+a\sin\varphi} \tag{4.10}$$

称$P(\varphi)$为

$$P(\varphi)=\frac{h^2}{12R^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\frac{a}{R}\sin\varphi}\frac{1}{\left[\frac{h^2}{12R^2}\sin^2\varphi+\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^2\right]} \tag{4.11}$$

于是(4.9)可以写成

$$\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)\left[\frac{h^2}{12R^2}\sin^2\varphi+\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^2\right]$$

$$\cdot\exp\left[-\int_0^{\varphi}P(\varphi')d\varphi'\right]\frac{d}{d\varphi}\left[\exp\left[\int_0^{\varphi}P(\varphi')d\varphi'\right]\Phi\right]$$

$$=\frac{Ma}{\pi(1-\nu)BR^3} \tag{4.12}$$

积分，得

$$\Phi=\exp\left[-\int_0^{\varphi}P(\varphi')d\varphi'\right]\frac{Ma}{\pi(1-\nu)BR^3}$$

$$\cdot\int_0^{\varphi}\frac{\exp\left[\int_0^{\varphi}P(\varphi')d\varphi'\right]d\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)\left[\frac{h^2}{12R^2}\sin^2\varphi+\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^2\right]} \tag{4.13}$$

我们假设$\varphi=0$这个截面是固定的，即$v(0)=0$。

抗扭刚度为

$$C=\frac{M}{\Phi}$$

$$=\frac{R^3\pi B(1-\nu)}{a\int_0^{\varphi}\frac{\exp\left[\int_0^{\varphi}P(\varphi')d\varphi'\right]d\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)\left[\frac{h^2}{12R^2}\sin^2\varphi+\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^2\right]}}\exp\left[\int_0^{\varphi}P(\varphi')d\varphi'\right] \tag{4.14}$$

在一般情况下，$h^2/(12R^2)\ll 1$，(4.11)可以略去$h^2/(12R^2)$，

$$P(\varphi)\approx\frac{h^2}{12R^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^3} \tag{4.15}$$

而且

$$\int_0^{\varphi}P(\varphi)d\varphi\approx\frac{h^2}{12R^2}\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi d\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^3}=\frac{h^2}{24R^2}\frac{\sin^2\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^2} \tag{4.16}$$

所以圆环壳的抗扭刚度可以近似写成

$$C\approx\frac{M}{\Phi}\approx\frac{R^3\pi B(1-\nu)}{a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right)^3}}\exp\left[\frac{h^2}{24R^2}\frac{\sin^2\varphi}{\left[1+\frac{a}{R}\sin\varphi\right]^2}\right] \tag{4.17}$$

把 (3.9) 式和 (4.17) 式相比，很易看到薄膜解的抗扭刚度是主要部份。(4.17) 式的指数部份只是一个很接近于 1 的修正系数。

参 考 文 献

[1] Reissner, H., *Muller-breslau-festschrift*, Leipzig (1912), 181.

[2] Wissler, H., *Festigkeitberechung von Ringsflachen*, Promotionarbeit, Zurich (1916).

[3] Meissner, E., *Physik. Zeits.*, **14** (1913), 343; *Vierteljahrssch Naturforsch Gas*, Zurich, **60** (1915), 23.

[4] Tolke, F., *Ingenieur Archiv.*, 9 (1938), 282.

[5] Clark, R. A., *J. of Math. and Physics*, **29** (1950), 146—178.

[6] Новожилов В. В.,《薄壳理论》(北京石油学院译)，科学出版社 (1951).

[7] 钱伟长，清华大学学报，**19**，1 (1929)，27—47.

Torsional Rigidity of Shells of Revolution

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In this paper, the general equations of equilibrium for axisymmetrical deformation including the torsional deformation of revolutional shells are derived. It is shown that the shearing sress distribution due to torsion is independent of other stress components including those of membrane stress and bending stress.

In this paper, the torsional deformation is considered to be represented by membrane action only, and also by the combined action of bending membrane deformation. It is shown that the main contribution of torsional rigidity is that related to membrane action.