

# 弹性力学平面问题的精确元法

叶开沅 纪振义

(兰州大学) (安徽建筑工业学院)

(1989年9月16日收到)

## 摘 要

本文在阶梯折算法<sup>[1]</sup>和精确解析法<sup>[2]</sup>的基础上, 提出构造有限元的新方法——精确元法。该方法不用一般变分原理, 可适用于任意变系数正定和非正定偏微分方程。利用该方法得到弹性力学平面问题的一个非协调任意四边形单元, 它具有八个自由度。由于没有采用雅可比变换, 该单元可以蜕化为三角形单元, 在工程中使用起来较为方便。文中给出收敛性证明。文末给出算例, 位移和应力均给出较好的结果, 在单元的节点上有较好的数值精度。

## 一、引 言

弹性力学平面问题的有限元单刚矩阵的推导一般采用最小势能原理, 对于任意的四边形单元, 需采用等参单元, 并要雅可比变换。在[3]中, 用双线性插值给出8自由度矩形单元。[4]中用双二次多项式给出18自由度矩形单元, 用双三次多项式给出32自由度的矩形单元, 还分别给出16和24个自由度的矩形单元。

本文则用一个新方法——精确元法推导弹性力学平面问题的四边形单元。该方法不用一般变分原理, 可适用于任意变系数正定和非正定偏微分方程。利用这个方法, 得到一个八自由度四边形单元。与一般四边形单元相比, 在节点上可直接得到应力值, 并具有较好的数值精度。由于没有采用一般的等参单元技术, 因此不需要雅可比变换, 可把本文的四边形单元蜕化成三角形单元使用, 而不出现奇异刚度矩阵。文中给出收敛性证明。

文末给出算例, 算例表明, 利用本文的方法, 所得到的结果收敛于精确解, 证明了本文理论的正确性。

## 二、八自由度平面应力单元

对非均匀弹性力学平面应力问题, 它的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x h(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy} h(x, y)}{\partial y} + f_x(x, y) h(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy} h(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y h(x, y)}{\partial y} + f_y(x, y) h(x, y) &= 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

位移和应力之间的关系

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(x,y)}{1-\nu^2(x,y)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(x,y) & 0 \\ \nu(x,y) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(x,y)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上}) \quad (2.2)$$

式中

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  为应力分量;  $u$ ,  $v$  为  $x$  和  $y$  方向的位移分量;  $f_x$  和  $f_y$  为  $x$  和  $y$  方向的体力分量;  $E(x,y)$ ,  $\nu(x,y)$  和  $h(x,y)$  为弹性模量, 泊松比和平面的厚度;  $\Omega$  为平面所占的空间.

利用精确元法, 把平面分成  $N$  个四边形单元, 在第  $i$  个单元  $\Omega_i$  上, 方程(2.1)转化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu_i}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu_i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_{xi} h_i &= 0 \\ \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu_i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu_i}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + f_{yi} h_i &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{在 } \Omega_i \text{ 上}) \quad (2.3)$$

方程(2.2)转化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_i}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{在 } \Omega_i \text{ 上}) \quad (2.4)$$

式中  $E_i$ ,  $h_i$ ,  $\nu_i$ ,  $f_{xi}$  和  $f_{yi}$  分别是  $E(x,y)$ ,  $h(x,y)$ ,  $\nu(x,y)$ ,  $f_x(x,y)$  和  $f_y(x,y)$  在单元形心处的值.

我们构造一个任意四边形单元, 它的节点位于单元的边中点上, 节点的位移和内力参数如图 1 所示. 图中  $u_{ni}$  和  $v_{ni}$  分别是单元第  $i$  边法向和切向位移.  $\sigma_{ni}$  和  $\tau_{ni}$  是第  $i$  边法向正应力和切向剪应力.

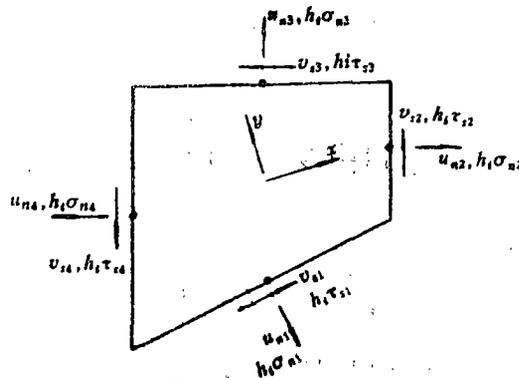


图 1 四边形平面应力单元

我们不难得到满足(2.3)的解为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2xy}{1+\nu_i}(3-\nu_i) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2xy}{1+\nu_i}(3-\nu_i) & 1 & x & y & x^2+y^2 \end{Bmatrix} \{C\}$$

$$- \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu_i^2}{4E_i} f_{xi} \left( x^2 + \frac{2y^2}{1-\nu_i} \right) \\ \frac{1-\nu_i^2}{4E_i} f_{yi} \left( y^2 + \frac{2x^2}{1-\nu_i} \right) \end{Bmatrix} = [\phi(x, y)]\{C\} + \{P(x, y)\}$$

$$\{C\} = \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_7 \ C_8\}^T \quad (2.5)$$

利用(2.5)式作位移的插值函数, 当图1中的位移和应力参数在单元之间的节点上连续时, 代入给定的边界条件, 所得到的解将收敛于精确解。我们定义

$$\{\delta_i\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T \quad (2.6)$$

代入已知的节点坐标, 利用(2.5)可得

$$\{\delta_i\} = [\phi_0]\{C\} + \{P_0\}$$

从而可求得

$$\{C\} = [\phi_0]^{-1}\{\delta_i\} - [\phi_0]^{-1}\{P_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\phi(x, y)][\phi_0]^{-1}\{\delta_i\} - [\phi(x, y)][\phi_0]^{-1}\{P_0\} + \{P(x, y)\} \quad (2.7)$$

从(2.4)和(2.5), 我们可以得到

$$\begin{Bmatrix} h_i \sigma_x \\ h_i \sigma_y \\ h_i \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\left[1 - \frac{\nu_i}{1-\nu_i}(3-\nu_i)\right]x & 0 & 0 & \nu_i \\ 0 & \nu_i & 0 & 2\left(\nu_i - \frac{3-\nu_i}{1+\nu_i}\right)x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_i}{2} & (1-\nu_i)\left(1 - \frac{3-\nu_i}{1+\nu_i}\right)y & 0 & \frac{1-\nu_i}{2} & 0 \end{bmatrix} \{C\} - \frac{h_i}{2} \begin{Bmatrix} f_{xi}x + \nu_i f_{yi}y \\ f_{yi}y + \nu_i f_{xi}x \\ f_{xi}y + f_{yi}x \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

因为

$$\begin{aligned} u_n &= u \cos \theta + v \sin \theta \\ v_n &= -u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \{\delta_i\} &= [\theta]\{\delta\} \\ \{\delta\} &= \{u_{n1} \ v_{n1} \ u_{n2} \ v_{n2} \ u_{n3} \ v_{n3} \ u_{n4} \ v_{n4}\}^T \end{aligned}$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} [\theta_1] & & & \\ & [\theta_2] & 0 & \\ & & [\theta_3] & \\ & 0 & & [\theta_4] \end{bmatrix}, \quad [\theta_i] = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

这里 $\theta_i$ 表示第 $i$ 个边上, 外法线与 $x$ 轴的夹角. 此外在单元边界上

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2\theta + 2\tau_{xy} \cos\theta \sin\theta + \sigma_y \sin^2\theta \\ \tau_s &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

利用(2.7)~(2.10), 可得

$$\{F_n\} = [K_i] \{\delta\} - \{R_i\}$$

式中矢量

$$\{F_n\} = \{l_1 h_1 \sigma_{n1} \quad l_1 h_1 \tau_{s1} \quad l_2 h_1 \sigma_{n2} \quad l_2 h_1 \tau_{s2} \quad l_3 h_1 \sigma_{n3} \quad l_3 h_1 \tau_{s3} \quad l_4 h_1 \sigma_{n4} \quad l_4 h_1 \tau_{s4}\}^T \quad (2.11)$$

这里 $l_m$ 是单元第 $m$ 个边的边长,  $[K_i]$ 和 $\{R_i\}$ 分别是第 $i$ 个单元的刚度矩阵和节点载荷向量. 可以证明, 总刚度矩阵是一个与正定对称阵相差一个小量的非对称阵. 它可以由普通的全带宽高斯消去法或波前法<sup>[5]</sup>进行求解.

### 三、收敛性证明

我们把(2.1)和(2.3)写成算子形式

$$By = f, \quad \bar{B}_i u = f_i \quad (\text{在 } \Omega_i \text{ 上}) \quad (3.1)$$

这里

$$y = \{u \ v\}^T, \quad \bar{y} = \{\bar{u} \ \bar{v}\}^T$$

$\bar{y}$ 表示用本文的方法求得的解. 注意 $B$ 和 $\bar{B}_i$ 是线性算子, 因此内积

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, By - \bar{B}_i \bar{y}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \varphi, By - \sum_e \bar{B}_e \bar{y} \right) = 0 \quad (3.2)$$

式中

$$\varphi = \{u^* \ v^*\}^T$$

是索伯列夫空间 $W_2^1$ 中的一个任意元素, 利用分部积分, 我们可得

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, By - \bar{B}_i \bar{y}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \varphi, y - \bar{y}) \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{\partial \Omega_i} [u^* (h \sigma_n - h_i \bar{\sigma}_n) + v^* (h \tau_s - h_i \bar{\tau}_s) \\ &- \sigma_n^* h (u_n - \bar{u}_n) - \tau_s^* h (v_s - \bar{v}_s)] ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

上标\*表示算子 $B$ 的共轭算子或共轭边界条件, 这里假定 $\sigma_n^*$ 和 $\tau_s^*$ 是连续的. 利用单元之间的连续条件, 已知边界条件, 并让未知边界条件对应的共轭边界条件为零, 从(3.3)可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \varphi, y - \bar{y}) = 0 \quad (3.4)$$

根据 Hilbert-伴随算子逆定理, 当 $B$ 给定的边界条件有逆算子 $B^{-1}$ 存在时,  $B^*$ 在零共轭边界条件下也有逆, 特别地

$$B^* \varphi = y - \bar{y} \quad (3.5)$$

时, 有唯一解  $\varphi \in W_1^{(1)}(\Omega)$ , 使  $\sigma_i^*$  和  $\tau_i^*$  在单元边界上连续, 因此我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (y - \bar{y})^2 d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

在子空间  $\Omega - \Omega_e$  中, 利用(3.6), 连续条件, 边界已知条件及未知边界条件对应的零共轭边界条件, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - \Omega_e} (\varphi, B\bar{y} - \bar{B}\bar{y}) d\Omega = & - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_e} [u^*(\bar{\sigma}_n h - \bar{\sigma}_n h_i) \\ & + v^*(\bar{\tau}_n h - \bar{\tau}_n h_i) - \sigma_i^* h(u_n - \bar{u}_n) - \tau_i^* h(v_n - \bar{v}_n)] ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

这里  $e$  是  $\Omega$  中任一个单元, 由  $u_i^*$ ,  $v_i^*$ ,  $\sigma_i^*$  和  $\tau_i^*$  的任意性, 我们可得

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}_n = u_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{v}_n = v_n, & \quad \text{在第 } i \text{ 个单元节点上} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} h_i \bar{\sigma}_n = h(x, y) \sigma_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} h_i \bar{\tau}_n = h(x, y) \tau_n, & \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

至此, 收敛性已被证明。

当  $N \rightarrow \infty$  时, 可以证明总刚矩阵趋近于一个正定矩阵。现证明如下:

令  $\varphi = \bar{y}$ , 我们可以得到

$$(\bar{y}, \bar{B}\bar{y})_{\Omega} = - \int_{\Omega} h_e U d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} h_e (\bar{\sigma}_n \bar{u}_n + \bar{\tau}_n \bar{v}_n) ds = 0 \quad (3.9)$$

这里  $\bar{y}$  是(3.3)的基本解以及

$$U = \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \bar{\tau}_{xy} \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)$$

因  $\bar{B}$  是一个正算子, 因此

$$U > 0 \quad (3.10)$$

从(3.9)和(3.10), 我们可得

$$\sum_e \int_{\partial\Omega_e} h_e (\bar{\sigma}_n \bar{u}_n + \bar{\tau}_n \bar{v}_n) ds = \sum_e \{ \{\delta\}^T [K_e] \{\delta\} \} + O(\Delta l_{\max}) > 0 \quad (3.11)$$

式中  $\Delta l_{\max}$  是单元的最大边长。因为对任意的  $\{\delta\}$ , (3.11) 均成立, 因此我们得到当  $N \rightarrow \infty$  时, 总刚矩阵趋近于一个正定矩阵。

## 四、算 例

**算例1** 一个悬臂梁, 如图1所示。它的长度  $a=10$ , 高  $b=2$ , 弹性模量  $E=1500$  和泊松比  $\nu=0.3$ , 在端部受竖向载荷

$$P(y) = 225(1 - y^2)$$

作用, 利用载荷的反对性, 仅取梁的一半进行计算。表1给出  $1 \times 5$ ,  $2 \times 5$  和  $3 \times 5$  网格划分时, 位移和应力的计算结果。表1还给出当四边形单元蜕化为三角形单元时, 悬臂梁位移计算结果。它的网格划分如图3所示。悬臂梁的精确解为

$$\sigma_x = 450(10 - x)y, \quad \sigma_y = 0$$

$$v_A = 108.75$$

**算例2** 为一厚壁圆筒, 如图4所示。它的弹性模量  $E=1000$ , 泊松比  $\nu=0.3$ 。圆筒

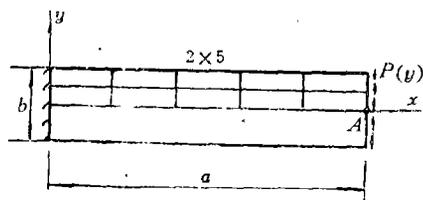


图2 一个悬臂梁

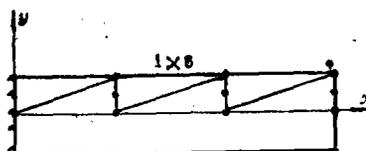


图3 畸变单元的网格划分

表 1

悬臂梁的位移和应力

	$y$	0.1667	0.25	0.5	0.75	0.8333
1×5	$\sigma_x(x=0)$			2898(33%)		
	$v(x=10)$			135(30%)		
2×5	$\sigma_x(x=0)$		1173(4.3%)		3556(5.4%)	
	$v(x=10)$		110.2(6.2%)		110.1(6.2%)	
3×5	$\sigma_x(x=0)$	760.5(1.4%)		2281(1.4%)		3873(3.3%)
	$v(x=10)$	107.9(4%)		107.8(4%)		107.8(4%)
1×6	$v(x=3.33)$		11.7(-1.3%)		11.8(-0.4%)	
	$v(x=10)$		106.3(2.5%)		106.9(3.04%)	

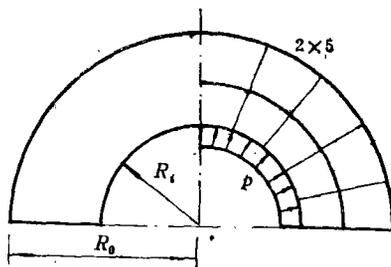


图4 受内压作用的厚壁圆筒

表 2

厚壁圆筒的位移和内力

$r$		100	110	120	125	130	150	170	175	180	190	200
$u_r$	2×5	19.19			17.31		14.47		13.10			12.95
	5×10	19.47	18.05	17.06		16.41	14.86	14.22		13.69	13.39	13.20
	精确解	19.67	18.32	17.24	16.78	16.37	15.05	14.16	13.99	13.82	13.56	13.33
$\sigma_r$	2×5	100					18.31					0
	5×10	100		58.25						8.080		0
	精确解	100		59.25			25.59			7.818		0
$\sigma_\theta$	2×5				126.0				77.42			
	5×10		145.3			112.7	92.43	80.23			70.50	
	精确解		143.5		118.6	112.2	92.59	79.46	76.87		70.26	

内半径 $R_i=100$ ，外半径 $R_o=200$ ，筒壁内侧受均布内压 $p=100$ 作用。网格划分为 $2 \times 5$ 和 $5 \times 10$ 。它的径向位移 $u_r$ ，径向应力 $\sigma_r$ 和周向应力 $\sigma_\theta$ ，计算结果列于表2，并与精确解作了比较。

以上算例表明，由精确元法，获得的结果收敛于精确解。由四边形单元蜕化成三角形单元时，也能得到较好的结果，还表明了本文理论的正确性。

## 参 考 文 献

- [1] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解, IV、非均匀变厚度梁的弯曲, 稳定和自由振动, 兰州大学学报, 力学专号, 1 (1979), 133—157.
- [2] 纪振义、叶开沅, 任意变系数微分方程的精确解析法, 应用数学和力学, 10, 10 (1989), 841—852.
- [3] Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, and L. C. Topp, Stiffness and deflection analysis of complex structures, *Journal of Aeronautical Sciences*, 23, 9 (1956), 805.
- [4] Ergatodis, J. G., B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, Curved, isoparametric, quadrilateral elements for finite element analysis, *International Journal of solids and structures*, 4, 1 (1968), 31.
- [5] P. Hood, Frontal solution program for unsymmetric matrices, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976), 379—399.

## An Exact Element Method for Plane Problem

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Industry College, Hefei)

## Abstract

In this paper, based on the step reduction method<sup>[1]</sup> and exact analytic method<sup>[2]</sup>, a new method—exact element method for constructing finite element, is presented. Since the new method doesn't need the variational principle, it can be applied to solve non-positive and positive definite partial differential equations with arbitrary variable coefficient. By this method, a quadrilateral noncompatible element with 8 degrees of freedom is derived for the solution of plane problem. Since Jacobi's transformation is not applied, the present element may degenerate into a triangle element. It is convenient to use the element in engineering. In this paper, the convergence is proved. Numerical examples are given at the end of this paper, which indicate satisfactory results of stress and displacements can be obtained and have higher numerical precision in nodes.