

# 为什么在太阳系中至今尚未找到 一颗逆行行星

汪家诩

(浙江大学, 1988年5月30日收到)

## 摘要

本文用圆型限制三体问题的Jacobi积分来建立一个测检函数, 用于确定测试质点作类行星运动时能否长留于一个确定的区域(可称为稳定域). 经用电子计算机检定, 对于质点作准圆形轨道的情况下, 质点作类逆行行星运动的稳定域远小于质点作类顺行星运动的稳定域. 这说明了逆行行星存在的可能性很小.

## 一、圆型限制三体问题的Jacobi积分

除了水星和冥王星以外, 太阳系中各大行星的偏心率 $e$ 及轨道面对黄道面的倾角 $i$ 都很小, 因此它们的轨道可以近似地看成同平面中的同心圆. 设想有一个质量 $m$ 为无限小的质点 $q$ 在某一行星 $P$ 附近运动, 那么这质点在太阳和行星 $P$ 的引力场中的运动是个限制三体问题. 如果行星 $P$ 的轨道是个圆, 那么质点 $m$ 的运动存在着下列Jacobi积分<sup>[1]</sup>.

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{GMm}{\sqrt{(x+aU)^2 + y^2 + z^2}} \\ & - \frac{GM_p m}{\sqrt{(x-a+aU)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = h \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中  $M$ 和 $M_p$ 分别是太阳 $S$ 和主行星 $P$ 的质量,  $a=SP$ , 原点 $O$ 是太阳和主行星的公共质心,  $x$ 轴穿过 $S$ 和 $P$ ,  $U=M_p/(M+M_p)$ ,  $h$ 是积分常数,  $\omega$ 是行星 $P$ 绕 $O$ 的角速度. 令

$$x=aX, \quad y=aY, \quad z=aZ$$

将(1.1)除以 $ma^2\omega^2$ , 并应用Kepler第三定律

$$a^3\omega^2 = G(M+M_p) \quad (1.2)$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2\omega^2} - \frac{1-U}{\sqrt{(X+U)^2 + Y^2 + Z^2}} \\ & - \frac{U}{\sqrt{(X-1+U)^2 + Y^2 + Z^2}} - \frac{X^2 + Y^2}{2} = H \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中

$$H = h/ma^2\omega^2$$

令

$$V = -\frac{1-U}{\sqrt{(X+U)^2 + Y^2 + Z^2}} - \frac{U}{\sqrt{(X-1+U)^2 + Y^2 + Z^2}} - \frac{X^2 + Y^2}{2} \quad (1.4)$$

$$T_r = (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)/2\omega^2 \quad (1.5)$$

其中  $V$  的物理意义是包括末项离心势位能在内的位函数,  $T_r$  是相对于转动坐标系的动能表式。则(1.3)可写成能量积分的形式

$$T_r + V = H \quad (1.6)$$

由(1.4)知道  $V$  在  $(-U, 0, 0)$  和  $(1-U, 0, 0)$  是两个奇点。不过事实上这奇点是不会出现的。因为太阳和行星都有一定的大小, 质点不可能进入太阳和行星的内部。

$V$  在  $x$  轴上的值可由下式计算

$$V_s = -\frac{1-U}{|X+U|} - \frac{U}{|X-1+U|} - \frac{X^2}{2} \quad (1.7)$$

太阳系中, 质量最大的行星是木星, 它的  $U$  约为  $U = 9.53864 \times 10^{-4}$ 。其他行星的  $U$  更小了。木星的  $(X, V_s)$  曲线如图 1 所示。令

$$\frac{dV_s}{dx} = \frac{1-U}{(x+U)^2} + \frac{U}{(X-1+U)^2} - X = 0 \quad (1.8)$$

解上式可得到图 1 上的  $V_s$  的三个极大值点:  $L_1, L_2$  和  $L_3$ 。它们是万有引力和离心力的平衡点, 亦称 Lagrange 点。它们的  $X$  坐标由下列三式求出

$$X_1 = 1-U - \left( \alpha - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{9} + \dots \right) \quad (1.9)$$

$$X_2 = 1-U + \left( \alpha + \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{9} + \dots \right) \quad (1.10)$$

$$X_3 = -1-U + \frac{7\alpha^3}{4+12\alpha^3} \quad (1.11)$$

式中  $\alpha = [U/\{3(1-U)\}]^{1/3} \quad (1.12)$

另有两个 Lagrange 点, 它们在  $XOY$  平面上与  $S$  和  $P$  成等边三角形的顶点:

$$L_4: \left( \frac{1}{2} - U, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad L_5: \left( \frac{1}{2} - U, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

迴绕着这两点有两个小行星群, 天体力学家们已对它们有大量研究, 但对本题内容不起作用, 因此略去不谈。

应用木星的  $U$ , 自(1.12)算得  $\alpha = 0.068274$ ,  $X_1 = 0.932361$ ,  $X_2 = 1.068838$ ,  $X_3 = -1.0003974$  将上列  $X$  代入(1.7), 可得  $L$  点的位能

$$V_1 = -1.51938, \quad V_2 = -1.518744, \quad V_3 = -1.500477$$

$V_i (i=1, 2, 3)$  在  $X$  轴上是极大值, 对  $Y$  方向却为极小值, 对  $XOY$  面上的  $V$  来说是鞍点。

对于木星,  $L_4$  的坐标为  $(0.499046, 0.8660254)$ , 由(1.4)算得  $V_4 = -1.499235 = V_5$ 。五个  $L$  点的大小顺序为  $V_4 = V_5 > V_3 > V_2 > V_1$ 。各行星的  $V_i$  的大小随  $U$  而变, 但各行星的五个  $L$  点的  $V$  的大小顺序仍保持不变。

现在讨论  $U \rightarrow 0$  的极限情况。此时

$$V = -\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} - \frac{X^2 + Y^2}{2} \quad (1.13)$$

当  $U \rightarrow 0$  时有  $\alpha \rightarrow 0$ , 于是  $X_1 = X_2 \rightarrow 1$ ,  $X_3 \rightarrow -1$ ,  $L_4: (1/2, \sqrt{3}/2)$ 。由此用(1.13)算得五个  $L_i$  点的  $V_i$  都是  $-1.5$ 。这极限情况有应用的价值。但是对于真正的  $U=0$ , 这五点  $L$  都消逝了。而  $V$  的形状如环形山。

## 二、Hill曲面和Hill曲线

对于 $H$ 为某一常数时，方程(1.3)确定了在空间的一个曲面。如果 $T_r=0$ ，这曲面称为Hill曲面。任一平面与这曲面的交线称为Hill曲线。

现在要作出 $H=V_1$ 的图线。为此在图1中的 $L_1$ 点作水平线 $V=V_1$ ，交曲线于 $a, b, c$ 和 $d$ 四点。它们的 $X$ 坐标可自下式求得

$$V_1 = -\frac{1-U}{|X+U|} - \frac{U}{|X-1+U|} - \frac{X^2}{2}$$

为

$$X_a = -1.116745, \quad X_b = -0.892443, \quad X_c = 1.057194, \quad X_d = 1.081996$$

这样我们可自图1和图2上定义出三个区域：属于主行星 $P$ 的内行星区，卫星区和外行星区。图2就是对于木星的 $H=V_1$ 的Hill曲线。

若在内行星区的星体它的相对动能 $T_r < V_1 - V$ 则它将长期停留在这区中，除非有系外星

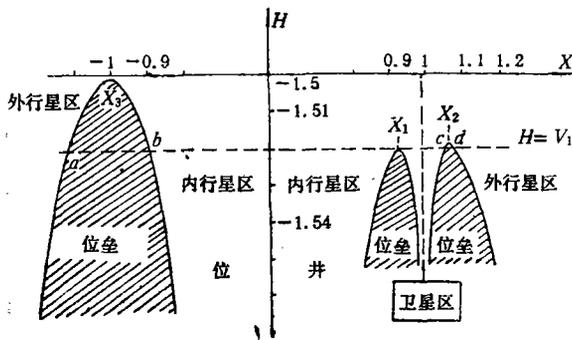


图1 对于木星的 $(X, V)$ 曲线

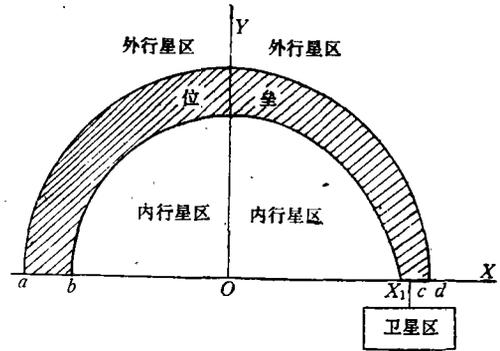


图2 对于木星以 $H=V_1$ 在平面 $(X, Y)$ 上的Hill曲线

体的侵入，扰乱了原有力学体系。同样在卫星区中 $V+T_r < V_1$ 的卫星亦将永远留在卫星区。对于 $V_1 < V+T_r < V_2$ 的星体有可能出现内行星和卫星作相互转变。对于 $V+T_r > V_2$ 的星体，将成为外行星。

因 $U$ 很小，在离 $L_1$ 较远的地方，我们可以略去(1.3)中的 $U$ 。令 $r^2 = X^2 + Y^2$ ，则 $T_r=0$ 时的(1.3)可写为

$$-\frac{1}{\sqrt{r^2+Z^2}} - \frac{r^2}{2} = V_1$$

自上式解出 $Z^2$ ，得

$$Z^2 = \left( V_1 + \frac{r^2}{2} \right)^{-2} - r^2 \quad (2.1)$$

自上式看出，远离 $L_1$ 点的Hill曲面可近似地看成一个迴转曲面。这曲面对 $XOY$ 平面成对称。其最高点的 $Z$ 值可令(2.1)中 $r=0$ 算得。对木星则有 $Z_{max} = -1/V_1 = 0.65816$ 。所以内行星藏于扁盒形空间内。对木星这盒的扁度为

$$2 \times 0.65816 / (0.89244 + 0.93236) = 0.72135$$

如图3中的点线所示。

我们知道在内行星区的天体对转动坐标系不可能是静止着的，即有 $T_r \neq 0$ 。因此内行星存在的区域更要变小。这是本文内容的观点不同于Hill理论的主要观点。

### 三、质点对于转动坐标系的相对动能表示式

当测试质点远离 $L_1$ 点的时候, 它的运动轨道看作“以太阳为焦点的一个椭圆”具有高度的准确性. 设质点运动的轨道的半长径为 $a_i$ , 它的平均角速度为 $\omega_i$ , 那么它在远日点的绝对速度可表为

$$v_a^2 = G(M+m) \left( \frac{2}{a_i(1+e)} - \frac{1}{a_i} \right) = a_i^3 \omega_i^2 \frac{1-e}{a_i(1+e)}$$

所以 
$$v_a = a_i \omega_i \sqrt{(1-e)/(1+e)} \quad (3.1)$$

质点在转动坐标系的牵连速度为

$$v_e = \omega a \sqrt{X^2 + Y^2} = \omega a r$$

现在我们选择所要检定的情况是“质点的远日点的位置正好在节线的垂线上”, 这时质点的 $\vec{v}_a$ 和 $\vec{v}_e$ 的方向互相平行. 对于顺行运动, 则有

$$v_r = v_a - v_e = a_i \omega_i \sqrt{(1-e)/(1+e)} - \omega a X$$

式中 $r = X$ . 令 $K = \sqrt{(1-e)/(1+e)}$ , 则有

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{m}{2} (v_a - v_e)^2 / m a^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} (a_i \omega_i K - \omega a X)^2 / a^2 \omega^2 \end{aligned}$$

对于逆行行星, 则有 $v_r = v_a + v_e$ .

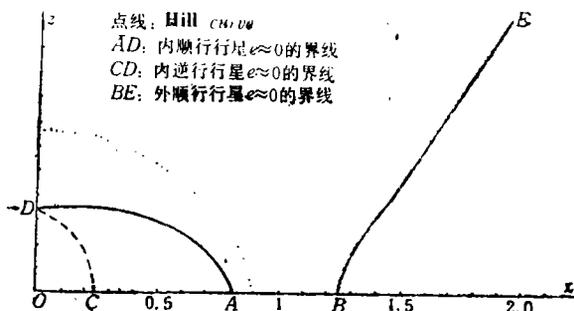


图3 关于木星的四条特性曲线

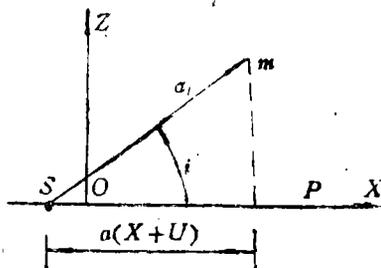


图4 测试点的远日点在 $XOZ$ 面内的位标

设质点的轨道面与 $XOY$ 面的倾角为 $i$ , 则由图4得

$$a_i \cos i = a(X+U)$$

再应用Kepler第三定律关系式, 我们有

$$\frac{a_i^3 \omega_i^2}{a^3 \omega^2} = \frac{G(M+m)}{G(M+M_p)} \approx \frac{M}{M+M_p} = 1-U$$

应用上式可得顺行质点的相对动能表式为

$$T_{r,(a)} = \left[ K \sqrt{\frac{(1-U) \cos i}{X+U}} - X \right]^2 / 2 \quad (3.2)$$

显然质点逆行时, 它的相对动能 $T_{r,(B)}$ 的表式为

$$T_{r,(B)} = \left[ K \sqrt{\frac{(1-U) \cos i}{X+U}} + X \right]^2 / 2 \quad (3.3)$$

## 四、判别质点能否在稳定域中久留的测试函数

我们研究目标集中在主行星的引力对于其内行星和外行星的影响上。这样这两类行星的  $a_i \neq a$ ，因此  $\omega_i \neq \omega$ 。（这条件就排除了对  $L_4$  和  $L_5$  点附近的小行星的研究）。这样质点经  $t = 2\pi/(\omega - \omega_i)$  的时间里绕转动坐标转了一圈。我们可以选质点的远日点正好在  $XOZ$  平面内的情况来作出判别。对于内行星令  $H = V_1$  作标准；对外行星改用  $H = V_2$ 。现在用下列函数  $F$  作为鉴定一个质点在某主行星引力影响下的测试函数： $F = T_r + V - V_1$

$$F = \frac{1}{2} \left[ K \sqrt{\frac{(1-U)\cos i}{X+U}} - X \right]^2 - \frac{1-U}{\sqrt{(X+U)^2 + Z^2}} - \frac{U}{\sqrt{(X-1+U)^2 + Z^2}} - \frac{X^2}{2} = V_1 \quad (4.1)$$

## (A) 对已知小行星的验证

(i) 对2号小行星Pallas的验证<sup>[9]</sup>——它是木星的内行星， $a_i = 2.7718 \text{ Au}$ ，除以木798星的  $a$ ，得  $R = 0.53275$ ， $e = 0.234$ ， $i = 34^\circ.798$ ，对黄道。换算成对木星的轨道面： $i = 34^\circ.798 - 1^\circ.305 = 33^\circ.493$ 。

则

$$X = R \cos i, \quad Y = 0, \quad Z = R \sin i$$

算得

$$F = -0.0841 < 0. \quad \text{凡 } F < 0 \text{ 可以长留在域内，若 } F > 0, \text{ 则质点有机会可以逸出域。}$$

(ii) 719号Albert—— $a_i = 0.49689$ ， $e = 0.5406$ ， $i = 9^\circ.52$ （其中  $a, i$  已经折算了）。算得  $F = -0.548 < 0$ ，亦属稳定。

(B) 用逐次逼近法求  $F \approx 0$  的  $R$  值

用电子计算机打入适当的  $R$  值到  $F$  中。对内行星区  $R$  很小时恒得  $F < 0$ 。增大  $R$  可能得  $F > 0$ 。如此逐次逼近，使  $F \rightarrow 0$ ，达得所要求  $R$  的位数为止。这样我们得出了表1的结果。在图3中实线  $AD$  是准圆形轨道（用  $e \approx 0$  表示）的最大半径的界限。

表 1

i	逆行(内) R	顺行内行星 R		顺行外行星 R(e≈0)	
	e≈0	e≈0	e=0.05	i	R
0°	0.24707	0.81389	0.8162	0°	1.243
10°	0.2476	0.75337	0.7553	5°	1.281
20°	0.2505	0.66215	0.6638	10°	1.377
30°	0.25503	0.58143	0.5829	15°	1.516
40°	0.2614	0.51527	0.5165	20°	1.702
50°	0.27008	0.46180	0.4629	25°	1.938
60°	0.2811	0.41873	0.4197	30°	2.244
70°	0.2954	0.38422	0.3851	35°	2.638
80°	0.3143	0.35793	0.3587	40°	3.161
88°	0.3483	0.35701	0.3577	45°	3.869
89°	0.3685	0.37338	0.3740	50°	4.862
90°	0.6578	0.65788	0.6578		

从表中看出,在  $i=90^\circ$  附近  $R$  反而增大,这是由于  $T_r$  中的  $R \cos i > U$  变成  $R \cos i < U$  所致. 这情况只产生在  $Z$  轴附近,由于  $F$  是用逐点计算的. 事实上我们要的是整个轨道. 所以对表中最后三个角度取  $R$  值约为 0.357 即可. 因为质点可由其惯性冲过小区域而不受显著影响.

## 五、用电子计算机作图法

由于一般  $U$  都很小,我们可以略去  $F$  中的  $U$ , 得到  $F=0$  的方程

$$(\sqrt{R})^3 + \frac{V_1}{K \cos i} R + \frac{2-K^2}{2K \cos i} = 0 \quad (5.1)$$

上式是  $\sqrt{R}$  的三次方程式,它有三个实根. 可将这三个根写成下列形式:

$$\sqrt{R} = \frac{|V_1|}{3K \cos i} \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{\theta}{3} + 120^\circ h \right) \right] \quad (h=0, 1, 2) \quad (5.2)$$

式中

$$\theta = \cos^{-1} \left[ 1 + \frac{27(2-K^2)}{4(V_1)^3} K^2 \cos^2 i \right] \quad (5.3)$$

应用上列两式,我们可以用电子计算机直接描绘出  $(i, R)$  的图线. 只是精确度没有逐次逼近法大. 例如对木星,  $V_1 = -1.51938$ ,  $e=0$   $h=2$  就可画出顺行内行星的临界曲线如图5, 它和图3中实线相同. 如用  $h=0$ , 则得外行星的顺行圆形轨道的临界曲线  $BE$ .

试比较表1中  $e \approx 0$  及  $e=0.05$  两行, 对于有相同  $i$  的  $R$  数据, 可以看出: 增大  $e$ , 可以增大行星的稳定域. 这样对最大的  $e=1$  得  $T_r=0$ . 此时稳定域扩充到 Hill 曲线. 即由图3的  $AD$  线扩充到以点线为界. 事实上在太阳系不会有很多天体它们有较大的  $e$ , 否则它们的轨道有很多交点, 经长时间后它们之间就会发生碰撞. 经  $10^9$  年的演化, 我们的太阳系目前基本上是稳定的, 因为各大行星的  $e$  和  $i$  都很小而且各轨道的间距近似地适合 Bode 定则. 值得注意, 对于三体问题, 不可能存在着圆形轨道. 因为圆形轨道只有在中心力场才成立. 所以我们用  $e \approx 0$  表示接近于圆形的轨道. 我们可以称它为准圆形轨道.

内行星轨道的最大半长径  $R=X_1$ , 此时  $i=0$  及  $T_r=0$ . 因此

$$K \sqrt{\frac{1-U}{X+U}} - X = 0 \quad \text{即} \quad K = X \sqrt{\frac{X+U}{1-U}}$$

对木星由此算得  $K=0.901167$ , 因而  $e=0.10369$ . 这是对应用于木星内行星的最大半长径  $X_1$  的最大偏心率. 对于小一些的  $R$ ,  $e$  值还可增大.

## 六、逆行准圆形轨道内行星的稳定域

对于逆行行星的  $T_r$  应该用 (3.3). 由此用逐次渐近法求得  $e \approx 0$  情况下的表1中“逆行(内)”的数据. 对于  $88^\circ$  以上的数据  $R$ , 已和顺行的  $e \approx 0$  的  $R$  很接近. 对于  $i=90^\circ$ , 两者已完全相同.

由于  $i < 88^\circ$  的逆行行星比顺行更远离  $L_1$ , 我们略去  $F$  中的  $U$  将会得到比顺行的情况更满意的结果. 于是对逆行行星我们得到下列三次方程式:

$$(\sqrt{R})^3 - \frac{V_1}{K \cos i} R - \frac{2-K^2}{2K \cos i} = 0 \quad (6.1)$$

上式只有一个实根。应用上式，我们可用电子计算机画出所需的图线如图3中的CD，对于 $K=1$ （即 $e=0$ ）及 $i=0$ 的简单情况，我们可将上式简化成

$$(\sqrt{R})^3 + \frac{3}{2}R - \frac{1}{2} = 0 \quad (6.2)$$

式中已用了 $V_1 = -3/2$ 。上式有一个实根 $\sqrt{R} = 1/2$ ，因之 $R = 1/4$ 。由于略去 $U$ 的作用是使逆行内行星的稳定域扩大，因此这个结果很有实用价值。从表1中看出，对于逆行内行星 $i = 20^\circ$ ， $R = 0.2505$ ， $e \approx 0$ 所以对木星可适用范围是 $i < 20^\circ$ 。这样我们可得到结论：一个行星若在它的内行星区存在着一个逆行的天体，那么它只能存在于这行星半长轴的1/4以内的区域中。

用上述结论向内递推如下：以木星的绕向作为顺行。那么在木星内大于 $a_J/4 = 5.203/4 = 1.30 \text{ A.U.}$ ，从木星向内第一颗遇到是火星（1.524 A.U.），它必须是顺行的。再自火星内推， $a_M/4 = 1.524/4 = 0.381 \text{ A.U.}$ 。于是地球，金星，水星（0.387 A.U.）都必须是顺行。再自水星内推， $0.387/4 = 0.097 \text{ A.U.}$  以内的区域可存在逆行小行星。

其次，我们自木星向外推演。 $4a_J = 4 \times 5.203 = 20.812 \text{ A.U.}$  这样土星（9.539 A.U.），天王星（19.18 A.U.）它们必须是顺行。否则我们自天王星开始内推到木星，将产生矛盾。再自天王星外推， $4 \times 19.18 = 76.72 \text{ A.U.}$  这样海王星（30.06 A.U.）冥王星（39.44 A.U.）必须是顺行的，若再自冥王星外推 $4 \times 39.44 = 157.76 \text{ A.U.}$  这距离以内必须都是顺行。

现在我们说明了“为什么太阳系中的行星都是绕同一方向旋转的”。再者我们还指出，逆行行星可在两个区域内寻找。(i)很靠近太阳(小于0.097 A.U.)，(ii)很远离太阳(在157.76 A.U.以外)。这两个区域都很接近太阳为中心的中心力场。这样轨道面的任何朝向都是允许的。

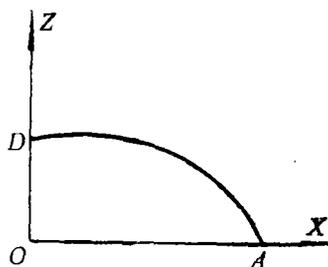


图5 用电子计算机绘制的AD曲线

### 参 考 文 献

- [1] Meirovitch, Leonard, *Methods of Analytical Dynamics* (1970), 420—428.
- [2] Hagihara, Yusuke, *Celestial Mechanics*, Vol. IV, Part 1 (1975), 1—33.
- [3] Ehricke, Krafft A., *Space Flight*, Vol. I (1960), 113—128.

## Why We Have Not Yet Found a Retrograde Planet in the Solar System

Wong Chia-ho

*(Zhejiang University, Hangzhou)*

### Abstract

In this paper we use the Jacobian integral of the circular restricted three-body problem to establish a testing function of a moving testing particle when it moves like a planet. This function determines whether or not the particle will stay in a definite region (which may be called "stable region", SR). By means of checking with an electronic computer, we can find that the SR of quasicircular orbit of retrograde planet motion is much less than the SR of direct planet motion. It is the reason why the existence of a retrograde planet is very rare.