应用数学和力学，第11卷第5期(1990年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多值(S)型映象度理论以及不动点定理*

张石生　陈玉清

（四川大学数学系，1989年3月25日收到）

摘　要

本文的主要目的是推广Browder[1,2]的结果.

本文分四部分，首先我们介绍多值(S)及其$(S)_+$型映象以及多值(S)，$(S)_+$型极限映象. 它们包含许多单调型映象为特例，如极大单调映象．有界伪单调以及有界广义伪单调映象.在第二部分我们定义(S)型映象的伪度以及$(S)_+$映象的度. 它们是Browder[1,2]中度的推广. 作为应用，我们利用第二部分中的度理论来研究多值算子方程解的存在性（见第三节）．获得一些新的不动点定理.

一、定义及记号

设E为自反Banach空间．E^*为其对偶．J：$E\to E^*$为对偶映象．以后我们用“$\to$”表强收敛，“$\rightharpoonup$”表弱收敛.

定义1.1　多值映象T：$D(T)\subset E\to 2^{E^*}$称为(S)型的，假如满足以下条件：

(S_1)　对任一$x\in D(T)$，Tx是非空有界闭凸的；

(S_2)　T是有限维弱上半连续的，即对E之任一有限维子空间F，$T|_F$：$D(T)\cap F\to 2^{E^*}$是从E之范数拓扑到E^*之弱拓扑上半连续的.

(S_3)　设$(f_j)\subset D(T)$，$x_j\rightharpoonup x_0$，$f_j\in Tx_j$，$\lim\limits_{j\to\infty}(f_j,\ x_j-x_0)=0$．则$x_j\to x_0$.$(f_j)$有子列$f_{jk}\rightharpoonup f_0\in Tx_0$.

如条件(S_3)换成下面条件

$(S_3)_*$　设$(x_j)\subset D(T)$，$x_j\rightharpoonup x_0$，$f_j\in Tx_j$，$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(f_j,\ x_j-x_0)\leqslant 0$，

则$x_j\to x_0$．(f_j)有子列$f_{jk}\rightharpoonup f_0\in Tx_0$.则称$T$为$(S)_+$型的.

易见$(S)_+$映象必是(S)型映象.

定义1.2　多值映象T：$D(T)\subset E\to 2^{E^*}$称为(S)（或$(S)_+$）极限映象，假如存在一有界映象（单值或多值）V：$E\to E^*$使得$T+\lambda V$对任一$\lambda>0$均为(S)（或$(S)_+$）映象.记为T_V.

定义1.3　映象族$\{T_t\}_{t\in[0,1]}$称为(S)（或$(S)_+$）同伦类，假如下面条件满足：

$(S_1)'$　T_tx是非空有界闭凸的，$x\in D(T)$，$t\in[0,1]$；

---

* 国家自然科学基金资助课题.

$(S_2)'$ 对E之每一有限维子空间F，$T_t x$: $[0,1]\times(\bigcap_{t\in[0,1]} D(T_t)\cap F)\to 2^{E^*}$ 是从积拓扑$[0,1]\times E$到E^*之弱拓扑上半连续的。

$(S_3)'$（或$(S_3)'_*$） 设 $(x_j)\subset\bigcap_{t\in[0,1]} D(T_t)$，$f_j\in T_{t_j}x_j$，$t_j\to t_0$，$\lim_{j\to\infty}(f_j, x_j-x_0)=0$（或$\overline{\lim_{j\to\infty}}(f_j, x_j-x_0)\leqslant 0$），则$x_j\to x_0$且$(f_j)$有弱收敛子列$f_{jk}\to f_0\in T_{t_0}x_0$。

定义1.4 设T: $D(T)\subset E\to 2^{E^*}$是一满足定义1.1中条件(S_1)，(S_2)之多值映象，且满足下面条件(P_3)（或条件$(P_3)'$），则T称为伪单调映象（或广义伪单调映象）：

(P_3) 设$(x_j)\subset D(T)$，$x_j\to x_0\in D(T)$，$f_j\in Tx_j (j=1,2,\cdots)$，$\overline{\lim_{j\to\infty}}(f_j, x_j-x_0)\leqslant 0$，则$(f_0, x_0-v)\leqslant\underline{\lim_{j\to\infty}}(f_j, x_j-v)$ $(\forall v\in D(T))$。

$(P_3)'$ 设$(x_j)\subset D(T)$，$x_j\rightharpoonup x_0$，$f_j\in Tx_j$，$f_j\to f_0$，$\overline{\lim_{j\to\infty}}(f_j, x_j-x_0)\leqslant 0$，则$f_0\in Tx_0$，$\lim_{j\to\infty}(f_j, x_j)=(f_0, x_0)$。

众所周知，自反Banach空间可以重新赋范使得E及E^*均为局部一致凸的（见[11]），所以我们总设E及E^*为局部一致凸的，这时对偶映象J是双连续的，因而我们有下面结果。

命题1.1 (a)设T: $D(T)\subset E\to 2^{E^*}$是有界广义伪单调映象，则T是$(S)_+$极限映象；

(b) 设T: $D(T)=E\to 2^{E^*}$是有界伪单调映象，则T是$(S)_+$极限映象。

(c) 设T: $D(T)\subset E\to 2^{E^*}$极大单调，$D(T)$是闭凸的。则T是$(S)_+$极限映象。

(d) 设G: $D(G)=E\to 2^{E^*}$是$(S)_+$极限映象，T: $D(T)=E\to 2^{E^*}$是有界广义伪单调或伪单调映象，或者极大单调映象，则$T+G$是$(S)_+$极限映象。

证明 在(a)，(b)，(c)情形，我们可证明对每一$\lambda>0$，$T+\lambda J$是$(S)_+$映象。细节略。

(d)因$(S)_+$映象之和总是$(S)_+$映象，所以结论成立。

二、拓扑度的构造

设E及E^*同上.$\Omega\subset E$为非空有界开集，F为E之有限维子空间F，$\Omega\cap F=\Omega_F\neq\phi$，$j_F$: $F\to E$为自然含入，j_F^*: $E^*\to F^*$为j_F之共轭映象。T: $\overline{\Omega}_F\to 2^{E^*}$是一多值映象。我们称$T_F=j_F^*T$: $\overline{\Omega}_F\to 2^{F^*}$为$T$之Galerkin逼近。

易见下命题成立

命题2.1 设T: $\overline{\Omega}\to 2^{E^*}$是$(S)$映象，则$T_F=j_F^*T$: $\overline{\Omega}_F\to 2^{F^*}$是紧凸值上半连续映象。

引理2.1 假设T_t: $\overline{\Omega}\to 2^{E^*}$，$t\in[0, 1]$，$\{T_t\}_{t\in[0,1]}$是$(S)$同伦类，则

(i) 记$T_{t,F}=j_F T_t$: $\overline{\Omega}_F\to 2^{F^*}$，$t\in[0, 1]$。则$T_{t,F}$: $[0, 1]\times\overline{\Omega}_F\to 2^{F^*}$是紧凸值上半连续的。

(ii) θ^*为E^*中零元。设$\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$，$t\in[0, 1]$.则存在一有限维子空间$F_0\subset E$. 使得对$E$之任一有限维子空间$F$，$F_0\subset F$，有$\theta^*\notin T_{t,F}(\partial\Omega_F)$，$t\in[0, 1]$。

证明 由定义1.3易见(i)成立。

(ii)假设结论不真，则对每一有限维子空间$F_0\subset E$.存在E之一有限维子空间F，$F_0\subset F$，$t_0\in[0,1]$，$x_F\in\partial\Omega_F\subset\partial\Omega$，使得$\theta^*\in Tt_{0,F}(x_F)$.令$W_{F_0}=\{(t, x)\in[0, 1]\times\partial\Omega$: $\exists f\in T_t(x)$,

使得$(f,x)=0$，$(f,v)=0$，$\forall v\in F_0\}$，易见W_{F_0}非空，令$\overline{W}_{F_0}$表W_{F_0}在E按弱拓扑与$[0,1]$之积拓扑$[0,1]\times E$中之闭包。

现在考虑下面集族

$\mathscr{F}=\{\overline{W}_{F_0}:F_0\subset E$任一有限维子空间$\}$。易见$\bigcap_{\overline{W}_{F_0}\in\mathscr{F}}\overline{W}_{F_0}\neq\phi$，令$(t_1,x_1)\in\bigcap_{\overline{W}_{F_0}\in\mathscr{F}}\overline{W}_{F_0}$，对任一$v\in E$，选取$E$之一有限维子空间$F$，使得$v\in F$，$x_1\in F$，因此存在$(t_j,x_j)\in W_F$ $(j=1,2,\cdots)$，$f_j\in T_{t_j}(x_j)$。$x_j\rightharpoonup x_1$，$t_j\to t_1$，$(f_j,x_j)=0$，$(f_j,x_1)=0$，$(f_j,v)=0$ $(j=1,2,\cdots)$。因此$\lim_{j\to\infty}(f_j,x_j-x_1)=0$，故$x_j\to x_1\in\partial\Omega$，$(f_j)$有子列$f_{jk}\rightharpoonup f\in T_{t_1}(x_1)$。因此$(f,v)=0$，这蕴含$\theta^*\in T_{t_1}(x_1)$。矛盾，引理得证。

由引理2.1知，若$T:\overline{\Omega}\to 2^{F^*}$是(S)映象。$\theta^*\notin T(\partial\Omega)$。则$\theta^*\notin T_F(\partial\Omega_F)$。$F$充分大。由Ma[6]拓扑度$d(T_F,\Omega_F,\theta^*)$有意义，因此我们可定义$T$之伪度（记为$P-d(T,\Omega,\theta^*)$）如下：

$$P-d(T,\Omega,\theta^*)=\begin{cases}1 & \text{(若}\exists\text{有限维子空间}F_0\text{，使得}d(T_F,\Omega_F,\theta^*)\neq 0,\\ & F\text{为包含}F_0\text{之任一有限维子空间)}\\ 0 & \text{(其它情形)}\end{cases}$$

易见下面性质成立：

命题2.2.

(a) $$P-d(J,\Omega,\theta^*)=\begin{cases}1 & (\theta^*\in J(\Omega))\\ 0 & (\theta^*\notin J(\overline{\Omega})),\end{cases}$$

(b) 若$P-d(T,\Omega,\theta^*)\neq 0$，则$\theta^*\in Tx$在$\Omega$中有解，

(c) 设$\{T_t\}$是(S)同伦类，$\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$，$t\in[0,1]$，

则

$$P-d(T_1,\Omega,\theta^*)=P-d(T_2,\Omega,\theta^*).$$

现在我们来定义$(S)_+$映象的拓扑度。

首先我们给出如下结果

引理2.2 设F是一有限维空间。$\Omega\subset F$为有界开集。$\theta\in\Omega$。$T:\overline{\Omega}\to 2^{F^*}$为紧凸值上半连续映象，$F_0$为$F$之真子空间。$\Omega_F=\Omega\cap F_0\neq\phi$，$T_{F_0}=j^*_{F_0}T:\overline{\Omega}_{F_0}\to 2^{F_0^*}$为$T$之Galerkin逼近。若$d(T,\Omega,\theta^*)\neq d(T_{F_0},\Omega_{F_0},\theta^*)$，则$\exists x\in\partial\Omega$，$f\in Tx$，使得$(f,x)\leqslant 0$，$(f,v)=0$，$\forall v\in F_0$。

证明 因F为有限维，故可设F为Hilbert空间。此时$F=F^*$，$j^*_{F_0}$为投影P：$F\to F_0$。令$F_1=F\ominus F_0$，因而$F=F_0\oplus F_1$，设B_1为F_1之单位球，则$\Omega_1=\Omega_{F_0}\oplus B_1$为$F$之开子集，现在定义$T_1$：$\overline{\Omega}_1\to 2^F$如下：

$$T_1(u+v)=T_{F_0}u+v \qquad (u\in\overline{\Omega_{F_0}},\ v\in\overline{B}_1)$$

因此有

$$d(T_1,\Omega_1,\theta)=d(T_{F_0},\Omega_{F_0},\theta)\neq d(T,\Omega,\theta)$$

另外，我们定义$\tilde{T}$：$\overline{\Omega}\to 2^F$如下：

$$\tilde{T}u=PTu+(I-P)u \qquad (u\in\overline{\Omega})$$

易见

$$d(T_1,\Omega_1,\theta)=d(T_1,\Omega\cap\Omega_1,0),\ d(\tilde{T},\Omega,0)=d(\tilde{T},\Omega\cap\Omega_1,0).$$

现在考虑同伦类$\{T_t:0\leqslant t\leqslant 1\}$，其中

T_t: $\overline{\Omega\cap\Omega_1}\to 2^{F}$, $T_t u=tT_1u+(1-t)\tilde{T}u$, $u\in\overline{\Omega\cap\Omega_1}(0\leqslant t\leqslant 1)$. 易见 $0\in T_{t_0}u_0$, $t_0\in[0,1]$, 则 $u_0\in F_0\cap\overline{\Omega}\cap\Omega_1$且$0\in T_0u_0$, 因此有

$d(\tilde{T},\ \Omega,\ 0)=d(\tilde{T},\ \Omega\cap\Omega_1,\ 0)=d(T_1,\ \Omega\cap\Omega_1,\ 0)=d(T_1,\ \Omega_1,\ 0)=d(T_0,\ \Omega_0,\ 0)$ $=d(T_{F_0},\ \Omega_0,\ 0)$.

故

$$d(\tilde{T},\ \Omega,\ 0)\neq d(T,\ \Omega,\ 0) \qquad (*)$$

令

$$Ht(u)=(tI+(1-t)P)Tu+(1-t)(I-P)u \qquad (u\in\overline{\Omega},\ t\in[0,\ 1])$$

由(*)知存在$t_1\in[0,\ 1]$, $u_1\in\partial\Omega$使得$0\in Ht_1(u_1)$, 因此存在$f_1\in Tu_1$. 使得

$$t_1f_1+(1-t_1)Pf_1+(1-t_1)(I-P)u_1=0.$$

这表明 $(f_1,\ v)=0$, $\forall v\in F_0$, $(f_1,\ u_1)\leqslant 0$.

证毕.

引理2.3 设$\{Tt\}_{t\in[0,1]}$是一$(S)_+$同伦类, 且$\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$, $\forall t\in[0,\ 1]$.则存在一有限维子空间F_0使得对任一有限维子空间$F\supset F_0$, $d(T_{t,F},\ \Omega_F,\ \theta^*)$有意义且不依赖于$t$及$F$.

证明 用证明引理2.1同样的手法, 假设结论不真, 定义集合W_F如下:

$W_F=\{(t,\ x)\in[0,\ 1]\times\partial\Omega$: $\exists f\in T_t(x)$, such that $(f,\ x)\leqslant 0$, $(f,\ v)=0$, $\forall v\in F\}$

由引理2.2知W_F非空, 从而存在$t_0\in[0,\ 1]$及$u_0\in\partial\Omega$. 使得$\theta^*\in T_{t_0}(u_0)$. 与假设矛盾.

由引理2.3知, 若T: $\overline{\Omega}\to 2^{E^*}$是一$(S)_+$映象且$\theta^*\notin T(\partial\Omega)$, 则我们可定义$T$之拓扑度$d(T,\ \Omega,\ \theta^*)$为$d(T_F,\ \Omega_F,\ \theta^*)$之共同值.

定理2.1 拓扑度$d(T,\ \Omega,\ \theta^*)$有如下性质:

(a) $$d(J,\ \Omega,\ \theta^*)=\begin{cases}1 & (\text{若}\theta^*\in J(\Omega))\\ 0 & (\text{若}\theta^*\notin J(\overline{\Omega}))\end{cases}$$

(b) 若$d(T,\ \Omega,\ \theta^*)\neq 0$, 则$\theta^*\in Tx$在$\Omega$中有解.

(c) 设$\{T_t$: $0\leqslant t\leqslant 1\}$是一$(S)_+$同伦类, $\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$, $t\in[0,\ 1]$, 则$d(T_1,\ \Omega,\ \theta^*)=d(T_0,\ \Omega,\ \theta^*)$.

(d) 设$\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$, 则

$$d(T,\ \Omega,\ \theta^*)=d(T,\ \Omega_1,\ \theta^*)+d(T,\ \Omega_2,\ \theta^*).$$

命题2.3 假设T_v是一$(S)_+$极限映象且$\theta^*\notin T_v(\partial\Omega)$, 则有

(i) $\exists\lambda_0>0$使得$\theta^*\notin(T+\lambda v)(\partial\Omega)$ $(\lambda\in(0,\ \lambda_0))$;

(ii) 对$\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\{T+(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)v$: $0\leqslant t\leqslant 1\}$是一$(S)_+$同伦类.

现在我们能定义$(S)_+$极限映象的拓扑度.

设T_v是一$(S)_+$极限映象, $\theta^*\notin T_v(\partial\Omega)$, 我们定义$T_v$之拓扑度如下:

$$d(T_v,\ \Omega,\ \theta^*)=\lim_{\lambda\to 0}d(T+\lambda v,\ \Omega,\theta^*).$$

我们可以证明拓扑度$d(T_v,\ \Omega,\ \theta^+)$有如下性质:

命题2.4 (a)若$d(T_v,\ \Omega,\ \theta^*)\neq 0$, 则$\theta^*\in\overline{T_v\Omega}$;

(b) 设T_v^1, T_v^2是两个$(S)_+$极限映象, 且$\theta^*\notin\overline{\bigcup_{t\in[0,1]}tT_v^1+(1-t)T_v^2}$, 则$d(T_v^1,\Omega,\ \theta^*)$

$=d(T_2^*,\ \Omega,\ \theta^*)$;

(c) 若$\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$, 则

$$d(T_v,\ \Omega,\ \theta^*)=d(T_v,\ \Omega_1,\ \theta^*)+d(T_v,\ \Omega_2,\ \theta^*).$$

由命题1.1易知如何定义有界伪单调映象（或广义伪单调）之拓扑度，细节略。

下面我们将定义形式为$T+T_1$之映象的拓扑度，其中T极大单调。T_1为有界多值$(S)_+$映象。用T_λ表T之 Yosida 逼近。R_λ为豫解式。

引理2.4 设T: $D(T)\to 2^{E^*}$极大单调。若$x\in D(T)$，则$T_\lambda x\to f$当其$\lambda\to 0$。其中 $f\in Tx$, $\|f\|=\min\{\|g\|,\ g\in Tx\}$.

证明 由T之单调性知

$$\|R_\lambda x-x\|^2\leqslant-\lambda(R_\lambda x-y,\ g)-(x-y,\ T(R_\lambda x-x))$$
$$(\forall x\in D(T),\ y\in D(T),\ g\in Ty). \qquad (\mathrm{I})$$

因此

$$\|T_\lambda x\|\leqslant\min\{\|g\|;\ g\in Tx\}=\|f\|.$$

由(Ⅰ)知$\lambda\to 0$时，$R_\lambda x\to x$. 不失一般性设$T_\lambda x\to f_0$当其$\lambda\to 0$.

因$(g-T_\lambda x,\ y-R_\lambda x)\geqslant 0$, $\forall y\in D(T)$, $g\in Ty$. 我们有

$$(g-f_0,\ y-x)\geqslant 0\quad(\forall y\in D(T),\ g\in Ty)$$

由T之极大性知$f_0\in Tx$，由E^*之局部一致凸性得$f_0=f$，故$T_\lambda x\to f$当其$\lambda\to 0$.

引理2.5 设$\alpha>0$, $\beta<+\infty$, $\lambda\in[\alpha,\ \beta]$，若$B$是$D(T)$之有界子集。则存在$N(\alpha,\ \beta,\ B)\geqslant 0$, $M(\alpha,\ \beta,\ B)\geqslant 0$，使得

$$\|T_\lambda x\|\leqslant M(\alpha,\ \beta,\ B),\ \|R_\lambda x\|\leqslant N(\alpha,\ \beta,\ B)\qquad(\lambda\in[\alpha,\ \beta],\ x\in B).$$

证明 由(Ⅰ)式可得结论.

引理2.6 下面结论成立:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}T_\lambda x=T_{\lambda_0}x,\ \lim_{\lambda\to\lambda_0}R_\lambda x=R_{\lambda_0}x\qquad(\lambda_0>0,x\in D(T)).$$

证明 由T_λ之定义以及T之单调性有

$$(J(R_\lambda x-x)-J(R_{\lambda_0}x-x),\ R_\lambda x-R_{\lambda_0}x)\leqslant\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}(J(R_{\lambda_0}x-x),\ R_\lambda x-R_{\lambda_0}x)$$

因

$$(\|R_\lambda x-x\|-\|R_{\lambda_0}x-x\|)^2\leqslant(J(R_\lambda x-x)-J(R_{\lambda_0}x-x),\ R_\lambda x-R_{\lambda_0}x),$$

故有

$$(\|R_\lambda x-x\|-\|R_{\lambda_0}x-x\|)^2\leqslant\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}(J(R_{\lambda_0}x-x),\ R_\lambda x-R_{\lambda_0}x).$$

由引理 2.5 我们得

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|R_\lambda x-x\|=\|R_{\lambda_0}x-x\|,$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(J(R_{\lambda_0}x-x),\ R_\lambda x-x)=\|R_{\lambda_0}x-x\|^2.$$

由E之局部一致凸性，得

$$R_\lambda(x)\to R_{\lambda_0}(x),\ T_\lambda(x)\to T_{\lambda_0}(x)(\text{当其}\lambda\to\lambda_0\text{时}).$$

引理2.7 $\{T_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2}+T_1\}_{t\in[0,1]}$是$(S)_+$同伦类，其中$\lambda_1$, $\lambda_2>0$.

证明 只需证$T_{t_j\lambda_1+(1-t_j)\lambda_2}x_j\rightharpoonup T_{t_0\lambda_1+(1-t_0)\lambda_2}x_0$（当其$x_j\to x_0$, $t_j\to t_0$时）. 事实上，我们有

$$T_{t_j\lambda_1+(1-t_j)\lambda_2}x_j \to T_{t_0\lambda_1+(1-t_0)\lambda_2}x_0.$$

为简便起见，记$t_j\lambda_1+(1-t_j)\lambda_2$为$\lambda_j$，由引理2.5我们知$(T_{\lambda_j}x_j)$有界，故我们有

$$\lim_{j\to\infty}(T_{\lambda_j}x_j-T_{\lambda_j}x_0,\ x_j-x_0)=0.$$

因

$$x_j=R_{\lambda_j}x_j+\lambda_jJ^{-1}T_{\lambda_j}x_j,\qquad x_0=R_{\lambda_j}x_0+\lambda_jJ^{-1}T_{\lambda_j}x_0\quad (j=1,\ 2,\ \cdots)$$

故

$$\lim_{j\to\infty}(T_{\lambda_j}x_j-T_{\lambda_j}x_0,\ R_{\lambda_j}x_j-R_{\lambda_j}x_0+\lambda_j(J^{-1}T_{\lambda_j}x_j-J^{-1}T_{\lambda_j}x_0))=0.$$

因而

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(T_{\lambda_j}x_j-T_{\lambda_j}x_0,\ \lambda_j(J^{-1}T_{\lambda_j}x_j-J^{-1}T_{\lambda_j}x_0))=0 \qquad (\text{Ⅱ})$$

由引理2.4有$T_{\lambda_j}x_0\to T_{t_0\lambda_1+(1-t_0)\lambda_2}x_0$。由(Ⅱ)得

$$\|T_{\lambda_j}x_j\|\to\|T_{t_0\lambda_0+(1-t_0)\lambda_2}x_0\|,$$
$$T_{\lambda_j}x_j(J^{-1}T_{\lambda_j}x_0)\to\|T_{t_0\lambda_1+(1-t_0)\lambda_2}x_0\|^2.$$

由E^*之局部一致凸性得

$$T_{\lambda_j}x_j\to T_{t_0\lambda_1+(1-t_0)\lambda_2}x_0\qquad (j\to\infty).$$

命题2.5 设$T+T_1$: $\overline{\Omega}\to 2^{E^*}$，$T$极大单调，$T_1$有界$(S)_+$映象。若$\theta^*\notin(T+T_1)(\partial\Omega)$，则$\exists\lambda_0>0$使得$\theta^*\notin(T_\lambda+T_1)(\partial\Omega)$ $(\forall\lambda\in(0,\ \lambda_0))$。

证明 设相反，有$\lambda_j\to 0$。$(x_j)\subset\partial\Omega$，$x_j\to x_0$及$f_j\in T_1x_j$使得

$$T_{\lambda_j}x_j+f_j=\theta^* \qquad (\text{Ⅲ})$$

因T_1有界，不失一般性，设$T_{\lambda_j}(x_j)\to v_0$，$f_j\to f_0=-v_0$。

因$R_{\lambda_j}x_j=x_j-\lambda_jJ^{-1}v_j$，$v_j=T_{\lambda_j}(x_j)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots)$ 故

$$(v_j-f,\ x_j-\lambda_jJ^{-1}v_j-x)\geqslant 0\quad (\forall x\in D(T),\ f\in Tx) \qquad (\text{Ⅳ})$$

由(Ⅲ)知

$$(T_{\lambda_j}x_j,\ x_j-x_0)+(f_j,\ x_j-x_0)=0\quad (j=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (\text{Ⅴ})$$

因T_1是$(S)_+$映象。故

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}(f_j,\ x_j,\ x_0)\geqslant 0$$

易见

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(T_{\lambda_j}(x_j),\ x_j-x_0)\leqslant 0,\qquad \overline{\lim_{j\to\infty}}(T_{\lambda_j}x_j,\ x_j)\leqslant(v_0,\ x_0).$$

由(Ⅳ)有

$$(v_j,\ x_j)\geqslant(v_j,\ \lambda_jJ^{-1}v_j+x)+(f,\ x_j-\lambda_jJ^{-1}v_j-x),$$

故有

$$(v_0,\ x_0)\geqslant(v_0,\ x)+(f,\ x_0-x)\quad (\forall x\in D(T),\ f\in Tx),$$
$$(v_0-f,\ x_0-x)\geqslant 0\quad (\forall x\in D(T),\ f\in Tx).$$

因此$x_0\in D(T)$，$v_0\in Tx_0$，由引理 2.4 知$T_{\lambda_j}(x_0)\to g_0\in Tx_0$。因$(T_{\lambda_j}x_j-T_{\lambda_j}x_0,\ \ x_j-x_0)\geqslant 0$，故

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}(T_{\lambda_j}x_j,\ x_j-x_0)\geqslant 0.$$

由(Ⅴ)有$\overline{\lim_{j\to\infty}}(f_j,\ x_j-x_0)\leqslant 0$。故$x_j\to x_0\in\partial\Omega$，$f_j\to -v_0\in T_1x_0$。因此

$$\theta^*=T_{\lambda_j}x_j+f_j\to v_0+(-v_0)\in Tx_0+T_1x_0,$$

这与假设矛盾，结论得证。

由以上讨论我们知若$T+T_1$: $\overline{\Omega}\to 2^{E^*}$，$T$极大单调，$T_1$有界(S)$_+$映象，$\theta^*\notin(T+T_1)(\partial\Omega)$，则我们可定义$T+T_1$之拓扑度$d(T+T_1, \Omega, \theta^*)$为$d(T_\lambda+T_1, \Omega, \theta^*)$之共同值。

我们有下面结果

定理2.2 (a)若 $d(T+T_1, \Omega, \theta^*)\neq 0$，则$\theta^*\in(T+T_1)x$在$\Omega$中有解

(b) $$d(J, \Omega, \theta^*)=\begin{cases}1 & (\text{若}\theta^*\in J(\Omega))\\ 0 & (\text{若}\theta^*\notin J(\overline{\Omega}))\end{cases}$$

(c) 设$\{T_t: 0\leqslant t\leqslant 1\}$为一族极大单调映象，假设下面条件满足:

(i) 设 $f_j\in T_{t_j,\lambda_j}(x_j)$，$f_j\rightharpoonup f_0$，$x_j\rightharpoonup x_0$，$t_j\to t_0$，$\lambda_j>0$，$\lambda_j\to\lambda_0\in[0, +\infty)$，$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(f_j, x_j)\leqslant(f_0, x_0)$；

则

$$f_0\in T_{t_0}x_0 \text{ 且 } (f_j, x_j)\to(f_0, x_0)；$$

(ii) $\|T_{t_j,\lambda}x_j-T_{t_0,\lambda}x_j\|\to 0$(当 $t_j\to t_0$，$x_j\to x_0$ 时)。其中$T_{t,\lambda}$为T_t之 Yosida 逼近。假设$\{P_t: 0\leqslant t\leqslant 1\}$是一(S)$_+$同伦类。$\{P_t\}$一致有界(不依赖于$t\in[0,1]$)。若$\theta^*\notin(T_t+P_t)(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，则

$$d(T_1+P_1,\Omega,\theta^*)=d(T_0+P_0,\Omega,\theta^*)；$$

(d) 若$\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$，$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$，则

$$d(T+T_1,\Omega,\theta^*)=d(T+T_1,\Omega_1,\theta^*)+d(T+T_1,\Omega_2,\theta^*)。$$

证明 (a)，(b)，(d)显然。现证(c)。

由引理2.5知条件(i)保证$\exists\lambda_0>0$，使得

$$\theta^*\notin(T_{t,\lambda}+P_t)(\partial\Omega) \qquad (\lambda\in(0,\lambda_0),\ t\in[0,1])$$

下证$\{T_{t,\lambda}+P_t,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$为(S)$_+$同伦类，$\lambda>0$。这只须证$x_j\rightharpoonup x_0$，$t_j\to t_0$，$f_j\in P_{t_j}x_j$且$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(T_{t_j,\lambda}(x_j)+f_j, x_j-x_0)\leqslant 0$时，有 $x_j\to x_0$ 且$(T_{t_j,\lambda}+f_j)$有子列$T_{t_{j_k},\lambda}x_{j_k}+f_{j_k}\rightharpoonup\omega\in T_{t_0,\lambda}x_0+P_{t_0}x_0$。

因$\{P_t\}$是(S)$_+$同伦类，故$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(f_j, x_j-x_0)\geqslant 0$。我们有$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(T_{t_j,\lambda}x_j, x_j-x_0)\leqslant 0$。由(ii)知$T_{t_j,\lambda}(x_j)$有界，不失一般性设$T_{t_j,\lambda}x_j\rightharpoonup f_0$。故

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(T_{t_j,\lambda}x_j, x_j)\leqslant(f_0, x_0)$$

令$\lambda_j=\lambda$ $(j=1,2,\cdots)$由(i)得$f_0\in T_{t_0}x_0$且$(T_{t_j,\lambda}x_j, x_j)\to(f_0, x_0)$。故$\lim\limits_{j\to\infty}(f_j, x_j-x_0)=0$。所以$x_j\to x_0$，$(f_j)$有子列$f_{j_k}\rightharpoonup g_0\in P_{t_0}x_0$。

定理2.2证毕。

下面给出一有用之性质

定理2.3 (仿射同伦定理)。假设T_1, T_2极大单调，P_1, P_2为有界(S)$_+$映象。$\theta^*\notin(t(T_1+P_1)+(1-t)(T_2+P_2))(\partial\Omega)$，$t\in[0,1]$，则

$$d(T_1+P_1,\Omega,\theta^*)=d(T_2+P_2,\Omega,\theta^*)$$

证明 因$tT_1+(1-t)T_2$极大单调，$t\in[0,1]$。用命题2.5之手法可证$\exists\lambda_0>0$使得

$$\theta^*\notin\{[tT_1+(1-t)T_2]_\lambda+[tP_1+(1-t)P_2]\}(\partial\Omega) \qquad (t\in[0,1])$$

其中 $[(tT_1+(1-t)T_2]_\lambda$是$tT_1+(1-t)T_2$之Yosida逼近，简记为T_λ^t，R_λ^t为T_λ^t之豫解式，

由$tT_1+(1-t)T_2$之单调性有

$$\|R_\lambda^t x-x\|^2\leqslant-\lambda(R_\lambda x-y,g)-(x-y,T(R_\lambda^t x-x)),\quad \forall x\in E,$$
$$y\in D(tT_1+(1-t)T_2),\quad g\in(tT_1+(1-t)T_2)(y),t\in[0,1].$$

因此$\|R_\lambda^t x\|\leqslant M$，$M$不依赖于$t\in[0,1]$，因

$$(J(R_\lambda^{t_0}x-x)-J(R_\lambda^t x-x),R_\lambda^{t_0}x-R_\lambda^t x)\leqslant\lambda(g-T_\lambda^{t_0}x,R_\lambda^{t_0}x-R_\lambda^t x)$$
$$\forall g\in[t_1T_1+(1-t_1)T_2]R_\lambda^{t_0}(x),\ T_\lambda^{t_0}x\in[t_0T_1+(1-t_0)]R_\lambda^{t_0}(x).$$

令$t\to t_0$得$R_\lambda^t x\to R_\lambda^{t_0}x$，$T_\lambda^t x\to T_\lambda^{t_0}x$。

假设$x_j\to x_0$，$t_j\to t_0$，$f_j\in t_jP_1x_j+(1-t_j)P_2x_j$且

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(T_\lambda^{t_j}x_j+f_j,x_j-x_0)\leqslant 0.$$

因$\{tP_1+(1-t)P_2\}$为$(S)_+$同伦类，因此有

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}(f_j,\ x_j-x_0)\geqslant 0.$$

因$(T_\lambda^{t_j}x_j-T_\lambda^{t_j}x_0,\ x_j-x_0)\geqslant 0$。故有

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}(T_\lambda^{t_j}x_j,\ x_j-x_0)\geqslant 0.$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}(f_j,\ x_j-x_0)=0 \tag{2.1}$$

$$\lim_{j\to\infty}(T_\lambda^{t_j}x_j,\ x_j-x_0)=0 \tag{2.2}$$

由(2.1)有$x_j\to x_0$且(f_j)有子列$f_{jk}\to f_0\in t_0P_1x_0+(1-t_0)P_2x_0$。由(2.2)得

$$\lim_{j\to\infty}(T_\lambda^{t_j}x_j-T_\lambda^{t_j}x_0,\ R_\lambda^{t_j}x_j-R_\lambda^{t_j}x_0+\lambda(J^{-1}T_\lambda^{t_j}x_j-J^{-1}T_\lambda^{t_j}x_0))=0.$$

因$(T_\lambda^{t_j}x_j-T_\lambda^{t_j}x_0,\ R_\lambda^{t_j}x_j-R_\lambda^{t_j}x_0)\geqslant 0$。故有

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(T_\lambda^{t_j}x_j-T_\lambda^{t_j}x_0,\ J^{-1}T_\lambda^{t_j}x_j-J^{-1}T_\lambda^{t_j}x_0)=0$$

因而$T_\lambda^{t_j}x_j\to T_\lambda^{t_0}x_0$。这表明$\{T_\lambda^t+(tP_1+(1-t)P_2)\}$是$(S)_+$同伦类，我们得

$$d(T_1+P_1,\Omega,\theta^*)=d(T_2+P_2,\Omega,\theta^*).$$

证毕。

由上面讨论知，若T_v^1是一有界$(S)_+$极限映象．T极大单调．$\theta^*\notin\overline{(T+T_v^1)(\partial\Omega)}$。则$\exists\lambda_0>0$使得$\theta^*\notin(T+T^1+\lambda v)(\partial\Omega)$ $(\lambda\in(0,\lambda_0))$．故我们可定义$T+T_v^1$之拓扑度如下：

$$d(T+T_v^1,\Omega,\theta^*)=\lim_{\lambda\to 0}d(T+T^1+\lambda v,\Omega,\theta^*).$$

下面我们将定义极大单调映象之拓扑度，首先给出如下结果：

引理2.8 设$x_j\rightharpoonup x_0$。$Jx_j\rightharpoonup f_0$。(ε_j)为一列严格减之正数列，使得

$$(\varepsilon_mJx_m-\varepsilon_nJx_n,x_m-x_n)\leqslant 0\qquad(\forall m,n) \tag{2.3}$$

则$x_n\to x_0$。

证明 由(2.3)得

$$\varepsilon_m(Jx_m-Jx_n,x_m-x_n)\leqslant(\varepsilon_n-\varepsilon_m)(Jx_n,x_m-x_n),$$

故$\{\|x_j\|\}$为有界增数列．$\|x_j\|^2\to c$，让$n\to\infty$得

$$\varepsilon_m(Jx_m,x_m-x_0)+\varepsilon_mc-\varepsilon_mf_0(x_m)\leqslant(\varepsilon_0-\varepsilon_m)[f_0(x_m)-c]$$

故 $\varepsilon_m(Jx_m,x_m-x_0)\leqslant\varepsilon_0(f_0(x_m)-c)\leqslant 0$，即 $(Jx_m,x_m-x_0)\leqslant 0$，因此有 $\lim(Jx_m,x_m-x_0)\leqslant 0$，故$x_m\to x_0$。

引理2.9　设T：$D(T)\to 2^{E^*}$极大单调，$\Omega\subset D(T)$。其中Ω为非空有界开集，假设$\theta^*\notin T(\partial\Omega)$，则存在$\varepsilon_0>0$使得$\theta^*\notin(T+\varepsilon J)(\partial\Omega)$ $(\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0))$。

证明　假设相反，存在$(x_j)\subset\partial\Omega$，$x_j\to x_0$，$Jx_j\to f_0$以及严格减之数列$(\varepsilon_j)$，$\varepsilon_j\to 0$使得

$$\theta^*\in Jx_j+\varepsilon_jJx_j\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots)$$

因此有

$$(\varepsilon_mJx_m-\varepsilon_nJx_n,\ x_m-x_n)\leqslant 0$$

由引理2.8得$x_n\to x_0\in\partial\Omega$，故有$\theta^*\in Tx_0$，矛盾。

由以上讨论，设$\theta^*\notin T(\partial\Omega)$，由引理2.9知存在$\varepsilon_0>0$.使得$\theta^*\notin(T+\varepsilon J)(\partial\Omega)$ $(\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0))$.故拓扑度$d(T,\Omega,\theta^*)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T+\varepsilon J,\Omega,\theta^*)$有意义。

现在我们给出极大单调映象拓扑度的一些性质：

定理2.4　设T：$\bar{\Omega}\subset D(T)\to 2^{E^*}$极大单调。

(a)　$d(J,\Omega,\theta^*)=\begin{cases}1 & (若\ \theta^*\in J(\Omega))\\ 0 & (若\ \theta^*\notin J(\bar{\Omega}))\end{cases}$

(b)　若$d(T,\Omega,\theta^*)\neq 0$ (则$\theta^*\in T(\Omega)$)，

(c)　设T_1，T_2极大单调，$\theta^*\notin\bigcup\limits_{t\in[0,1]}(tT_1+(1-t)T_2)(\partial\Omega)$则

$$d(T_1,\ \Omega,\ \theta^*)=d(T_2,\ \Omega,\theta^*).$$

(d)　设$\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$且$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$，则

$$d(T,\Omega,\theta^*)=d(T,\Omega_1,\theta^*)+d(T,\Omega_2,\theta^*).$$

三、对多值映象方程之应用

本节，我们将应用第二节的度理论来讨论多值映象方程解的存在性以及计算一个真凸下半连续泛函f之广义梯度∂f之拓扑度

以下我们均设E，E^*，Ω满足第二节条件。

定理3.1　设$T+T_1$：$\bar{\Omega}\to 2^{E^*}$，T极大单调，T_1为有界$(S)_+$映象，Ω为E之有界开子集，假设存在$\bar{x}\in\Omega$使得

$$(f,x-\bar{x})\geqslant-\|f\|\|x-\bar{x}\|\qquad(x\in\partial\Omega,\ f\in(T+T_1)(x))$$

则$\theta^*\in(T+T_1)(\Omega)$。

证明　设

$$T_tx=t(T+T_1)x+(1-t)J(x-\bar{x})\qquad(t\in[0,1],x\in\bar{\Omega})$$

易见$\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。由定理2.3得

$$d(T+T_1,\Omega,\theta^*)=d(J(\cdot-\bar{x}),\Omega,\theta^*),$$

易见

$$d(J(\cdot-\bar{x}),\Omega,\theta^*)=d(J(x)-J(\bar{x}),\Omega,\theta^*)=1,$$

故有$\theta^*\in(T+T_1)(\Omega)$。证毕。

定理3.2　设T极大单调。T_0^1为一有界$(S)_+$极限映象，Ω为E之有界开凸集。$T+T_0^1$：$\bar{\Omega}\subset E\to 2^{E^*}$。假设下面条件满足：

(i) 若$x_j\to x_0$，$f_j\in(T+T_v^1)(x_j)$，$f_j\to P^*$，则$P^*\in T+T_v^1(x_0)$；

(ii) 若$x_j\to x_0$，$g_j\in T_v^1(x_j)$，$g_j\to g_0$，则$g_0\in T_v^1(x_0)$；

(iii) 若 $x_j\to x_0$，$f_j\in(T+T_v^1)(x_j)$，则$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(f_j,x_j-x_0)\geqslant 0$；

(iv) 存在$\bar{x}\in\Omega$，使得

$$(f,x-\bar{x})\geqslant-\|f\|\|x-\bar{x}\|\qquad(x\in\partial\Omega,\ f\in(T+T_v^1)(x))$$

则$\theta^*\in(T+T_v^1)(x)$在Ω中有解。

证明 令

$$T_tx=t(T+T_v^1)(x)+(1-t)J(x-\bar{x})\qquad(t\in[0,1],x\in\overline{\Omega})$$

我们可设$\theta^*\notin\bigcup\limits_{t\in[0,1]}\overline{Tt(\partial\Omega)}$．事实上，若有$(x_j)\subset\partial\Omega$，$x_j\to x_0,t_j\to t_0$，$f_j\in(T+T_v^1)(x_j)$．使得

$$t_jf_j+(1-t_j)J(x_j-\bar{x})\to\theta^*.$$

(a) 若$t_0=1$，则$f_j\to\theta^*$．由(i)知$\theta^*\in(T+T_v^1)(x_0)$，定理结论已获证．

(b) 设$t_0\neq 1$，由(ii)我们有

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}(f_j,x_j-x_0)\geqslant 0,$$

故$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(J(x_j-\bar{x}),\ x_j-x_0)\leqslant 0$，因此$x_j\to x_0\in\partial\Omega$．

我们断定$t_0\neq 0$，事实上，若$t_0=0$，则有 $g_j\in Tx_j$，$g_j^1\in T_v^1x_j$，$f_j=g_j+g_j^1$，因 T_v^1 有界故$t_jg_j^1\to\theta^*$．因

$$(t_jg_j-t_jf,\ x_j-\bar{x})\geqslant 0$$

其中 $f\in T\bar{x}$，$t_jg_j\to-J(x_0-\bar{x})$．故有

$$(-J(x_0-\bar{x}),\ x_0-\bar{x})\geqslant 0,\text{ 即有}x_0=\bar{x}.$$

这与$\bar{x}\in\Omega$矛盾，故$t_0\neq 0$．因此$f_j\to-(1-t_0)t_0^{-1}J(x_0-\bar{x})$，由(i)得

$$-\frac{1-t_0}{t_0}J(x_0-\bar{x})\in(T+T_v^1)(x_0).$$

这与(iv)矛盾，因此我们可设$\theta^*\notin\bigcup\limits_{t\in[0,1]}\overline{T_t(\partial\Omega)}$，故存在$\lambda_0>0$，使得

$$\theta^*\notin t(T+T_v^1+\lambda v)(x)+(1-t)J(x-\bar{x})\qquad(\forall\lambda\in(0,\lambda_0),x\in\partial\Omega).$$

由定理2.3得

$$d(T+T^1+\lambda v,\Omega,\theta^*)=d(J(x-\bar{x}),\Omega,\theta^*)=1\quad(\lambda\in(0,\lambda_0)),$$

这表明$\theta^*\in(T+T^1+\lambda v)(x)$在$\Omega$中有解$(\lambda\in(0,\lambda_0))$，让$\lambda\to 0$使用假设(i) 知 $\theta^*\in(T+T_v^1)(x)$在Ω 中有解．

定理3.3 设T：$D(T)\subset E\to 2^{E^*}$极大单调，$\overline{\Omega}\subset D(T)$，$\Omega$为有界开集，设存在 $\bar{x}\in\Omega$，使得

$$(f,x-\bar{x})>-\|f\|\|x-\bar{x}\|\qquad(x\in\partial\Omega,f\in Tx),$$

则$\theta^*\in Tx$在Ω中有解．

证明 令

$$T_tx=tTx+(1-t)J(x-\bar{x})\qquad(0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in D(T)).$$

因T，$J(x-\bar{x})$极大单调，$\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$．

由定理2.4(c)得

$$d(T,\Omega,\theta^*)=d(J(\cdot-\bar{x}),\Omega,\theta^*)=1.$$

故方程$\theta^*\in Tx$在Ω中有解。

推论3.1 设T：$D(T)\to 2^{E^*}$极大单调，$\bar{\Omega}\subset D(T)$，Ω为有界开集，$\theta\in\Omega$，假设$(f,x)\geqslant 0$，$\forall x\in\Omega$，$f\in Tx$。则$\theta^*\in Tx$在$\bar{\Omega}$中有解。

推论3.2(Browder) 设T：$E\to 2^{E^*}$极大单调且满足Coercive条件，则T满射。

定理3.4 设f：$E\to R=(-\infty,+\infty)$为下半连续凸泛函，假设$f(x)\to+\infty$当其$\|x\|\to\infty$时，则$\exists r_0>0$使得

$$d(\partial f,B(0,r),\theta^*)=1 \qquad (任一r>r_0).$$

其中 $B(0,r)$是半径为r之开球。

证明 因$f:E\to R$下半连续凸，故$\partial f:E\to 2^{E^*}$极大单调，又$f(x)\to+\infty$当其$\|x\|\to+\infty$，故存在$r_0>0$，使得$\theta^*\notin\partial f(x)$ $\forall x\in E$，$\|x\|>r_0$。

设$B(0,r)$为半径为r之开球，$r>r_0$，则$\theta^*\notin\partial f(\partial B(0,r))$。

另一方面，有$\bar{x}\in E$，使得$f(\bar{x})=\inf\limits_{x\in E}f(x)$，故$\theta^*\in\partial f(\bar{x})$，$\bar{x}\in B(0,r)$，令

$$T_t=t\partial f+(1-t)J(x-\bar{x}),$$

我们证$\theta^*\notin\bigcup\limits_{t\in[0,1]}T_t(\partial B)$。设相反，$\exists x_0\in\partial B(0,r)$，$t_0\in[0,1]$，$f_0\in\partial f(x_0)$，使得

$$t_0f_0+(1-t_0)J(x_0-\bar{x})=\theta^*。即\ f_0=-\frac{1-t_0}{t_0}J(x_0-\bar{x}),$$

因$(f_0-\theta^*,x_0-\bar{x})\geqslant 0$，故有

$(J(x_0-\bar{x}),\ x_0-\bar{x})\leqslant 0$。即有$x_0=\bar{x}$。

矛盾，故$\theta^*\notin\bigcup\limits_{t\in[0,1]}T_t(\partial B)$。由定理2.4得

$$d(\partial f,B(0,r),\theta^*)=d(J(x-\bar{x}),B(0,r),\theta^*)=1$$

四、对不动点定理的应用

这一节中我们用第二节结果来研究一类多值映象不动点的存在性。

以下设H为一Hilbert空间，

定义4.1 多值映象T：$D(T)\subset H\to 2^H$称为伪紧的，假如$I-T$是$(S)_+$映象。

定义4.2 多值映象T：$D(T)\subset H\to 2^H$称为伪压缩的，假如$I-T$极大单调。

定理4.1 设T：$\bar{\Omega}\to 2^H$伪紧，Ω为H之有界开集，$0\in\Omega$，$x\notin\lambda Tx$，$\forall x\in\partial\Omega$，$\lambda\in(0,1)$。则$T$在$\bar{\Omega}$中有不动点。

证明 令$T_t=I-tT$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。则$\{T_t:\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$为$(S)_+$同伦类。不失一般性，假设$x\notin Tx$，$\forall x\in\Omega$，故$\theta\notin T_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。由定理2.3知

$$d(I-T,\Omega,\theta)=d(I,\Omega,\theta)=1$$

故存在$\bar{x}\in\Omega$使得$\bar{x}\in T\bar{x}$。

推论4.1 设Ω是H的有界开凸集，$0\in\Omega$，假设T：$\bar{\Omega}\to 2^H$伪紧，$T(\partial\Omega)\subset\Omega$，则$T$在$\bar{\Omega}$中有不动点。

推论4.2 设Ω为H之有界开凸集，$\theta\in\Omega$，设T：$\bar{\Omega}\to 2^H$伪紧，对$\forall x\in\partial\Omega$，$f\in Tx$，假设下面条件之一满足：

(i) $\|f\|\leqslant\|x\|$；

(ii) $\|f\|\leqslant\|f-x\|$;

(iii) $\|f\|^{m(x)}\leqslant\|f-x\|^{m(x)}+\|x\|^{m(x)}$

其中 $m(x)$: $\partial\Omega\to(1,+\infty)$. 则$T$在$\overline{\Omega}$中有不动点.

定理4.2 设 T: $D(T)\subset H\to 2^H$ 伪压缩, $\overline{\Omega}\subset D(T)$, Ω 为有界开集, $0\in\Omega$, 对任一 $x\in\partial\Omega$, $\lambda\in(0,1]$, $x\notin\lambda Tx$, 则T在Ω中有不动点.

证明 因 I-T 极大单调, 故 $T_t=I-tT$ 极大单调, $t\in[0,1]$. 由假设知 $\theta^*\notin T_t(\partial\Omega)$, $t\in[0,1]$, 由定理2.4有

$$d(I-T,\Omega,\theta)=d(I,\Omega,\theta)=1,$$

这说明T在Ω中有不动点.

注: [9]中不动点定理是定理4.2之推论.

参 考 文 献

[1] Browder, F. E., Degree of mapping of nonlinear mappings of monotone type, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **80** (1983), 1771—1773.

[2] Browder, F. E., Degree of mapping for nonlinear mappings of monotone type densely defined mappings, Ibid, **80** (1983), 2405—2407.

[3] Browder, F. E., Degree of mapping for nonlinear mappings of monotone type strongly nonlinear mappings, Ibid, **80** (1983), 2408—2409.

[4] Browder, F. E., Degree theory for nonlinear mappings, *Proc. Sym. Pure Math.*, **45** (1986), 203—226.

[5] Browder, F. E. and W. V. Petryshyn, Approximation methods and the generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces, *J. Functional Anal.*, **31** (1969), 217—245.

[6] Ma, T. W., Topological degree for set-valued compact vector fields in locally convex spaces, *Dissertationes Math.*, **92** (1972), 1—43.

[7] Berkovits, J. and V. Mustonen, On the topological degree for mappings of monotone type, *Nonlinear Anal.*, **10**, 12 (1986), 1373—1383.

[8] Crandal, M. G. and A. Pazy, Semigroup of nonlinear contractions and dissipative sets, *J. Funct. Anal.*, 3 (1969), 376—418.

[9] Willem, M., Topology and semilinear equations at resonance in Hilbert Space, *Nonlinear Anal.*, 5 (1981), 517—524.

[10] Reinerman, J. and R. Schoneberg, Some results in fixed point theory for nonexpansive and pseudo-contractive maps in Hilbert space, *Fixed Point Theory and Its Applications*, *Academic Press*, New York (1976), 187—196.

[11] Troyjanski, S. L., On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces, *studia Math.*, **37** (1971), 173—180.

Degree Theory for Multivalued (S) Type Mappings and Fixed Point Theorems

Zhang Shi-sheng Chen Yu-qing

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

The main purpose of this paper is devoted to generalizing the results of Browder[1,2].

This paper consists of four parts. In the first part, we introduce the concepts of multivalued (S) and $(S)_+$ type mappings and the concepts of the limits of multivalued (S) and $(S)_+$ type mappings. These kinds of mappings contain many monotone type mappings, such as maximal monotone mapping, bounded pseudo-monotone mapping and bounded generalized pseudo-monotone mapping, as its special cases. In the second part we define the pseudo-degree for (S) type mapping and the degree for $(S)_+$ type mapping. These two kinds of degrees are all the generalizations of the degree defined by Browder[1,2]. As applications, we utilize the degree theory presented in part 2 to study the existence of solutions for the multivalued operator equations (see part 3) and to obtain some new fixed point theorems in part 4.