应用数学和力学，第11卷第5期(1990年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Menger 空间对拟距离空间族的嵌入定理及其应用*

刘作述　郑　权

（武汉工业大学数理系）（华中理工大学数学系）

摘　要

在本文中，我们引进了Menger空间中拟距离空间族的嵌入概念并研究了它的一些性质．证明了Menger 空间中连续映象序列的一个公共不动点定理．这些映象是假设满足广义的压缩条件的．这里采用的证明方法对于 Menger 空间的映象而言是一种新的思想．

1942年K．Menger 引进了所谓的概率距离空间的概念并称之谓P．M．空间[1]．此后，A．Wald，B．Schweizer，A．Sklar 和 T．Egbert[2~5] 等系统地研究了P．M．空间的基本理论和它的拓扑结构．与此同时，朱林户和刘作述[6~7]又对 P．M．空间和G-值距离空间的嵌入定理和它的一些应用作了深入的研究．在本文中我们继续这个研究．在一个更为广泛的条件下我们得到一个方法，它嵌一个 Menger 空间到一拟距离空间族．由于每个距离空间是一Menger空间．则所有上述结果作某种变更均可应用到不动点定理中．

一、嵌入定理和收敛性

在本节中，我们将嵌一 Menger 空间到一拟距离空间族并讨论根据嵌入定理所得到的拟距离空间族中序列的收敛性与原来 Menger 空间中序列的收敛性之间的关系．首先，我们回忆Menger空间的一些基本知识．

在本文中，R 表实数集，$R^+=[0,+\infty)$，N 是自然数集，$(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是一完备概率空间．

定义1.1　一个映象$F:R\to R^+$称作是一分布函数，如果它是非减左连续且满足

$$\inf_{t\in R}F(t)=0 \text{ 和 } \sup_{t\in R}F(t)=1$$

我们将用$\mathscr{D}$表所有分布函数集．而H将表用下式定义的特殊的分布函数：

$$H(t)=\begin{cases}0 & (t\leqslant 0)\\ 1 & (t>0).\end{cases}$$

* 郭友中推荐，1986年10月25日收到．

定义1.2 一个映象$\varDelta$:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$称作t-范数，如果它满足：

($\varDelta$-1) $\varDelta(a,1)=a$, $\varDelta(0,0)=0$;

($\varDelta$-2) $\varDelta(a,b)=\varDelta(b,a)$;

($\varDelta$-3) $\varDelta(c,d)\geqslant\varDelta(a,b)$ (对于$c\geqslant a$, $d\geqslant b$);

($\varDelta$-4) $\varDelta(\varDelta(a,b),c)=\varDelta(a,\varDelta(b,c))$.

定义1.3 一概率距离空间（简称为P. M. 空间）是一有序对$(X,\mathscr{F})$，其中X是元素的抽象集。$\mathscr{F}$是一$X\times X$到$\mathscr{D}$的映象集。我们将用F_{xy}表示分布函数$\mathscr{F}(x,y)$。并且$F_{xy}(t)$将表示F_{xy}在$t\in R$处的值，函数F_{xy}，$x,y\in X$是假设满足下列条件：

(PM-1) $F_{xy}=H$ （当且仅当$x=y$）。

(PM-2) $F_{xy}(0)=0$;

(PM-3) $F_{xy}=F_{yx}$;

(PM-4) 如果$F_{xy}(t_1)=1$。和$F_{yz}(t_2)=1$，则$F_{xz}(t_1+t_2)=1$。

定义1.4 一 Menger 空间是一三元组$(X,\mathscr{F},\varDelta)$，其中$(X,\mathscr{F})$是一P. M. 空间，$\varDelta$是$t$-范数。且对一切$x,y,z\in X$和$t_1,t_2\in R^+$，下之广义三角不等式成立。

$$\text{(PM-4)}'\quad F_{xz}(t_1+t_2)\geqslant\varDelta(F_{xy}(t_1),\ F_{yz}(t_2)) \tag{1.1}$$

我们首先给出下列主要结果。

定理1.1（嵌入定理） 令$(X,\mathscr{F},\varDelta)$是一 Menger 空间，$t$-范数$\varDelta$是假设满足$\varDelta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$，则$(X,\mathscr{F},\varDelta)$也是一拟距离空间族，它有下列拟距离：

$$d_\alpha(x,y)=\sup\{t\in R\mid F_{xy}(t)\leqslant\alpha\}\qquad(\alpha\in[0,1),\ x,y\in X) \tag{1.2}$$

且$\{(X,d_\alpha):\alpha\in[0,1)\}$是称作由 Menger 空间$(X,\mathscr{F},\varDelta)$生成的拟距离空间族。

证明 显然，对于任意$x,y\in X$：$F_{xy}(0)=0$，则(1.2)是一非负实数，由于(1,2)，我们亦有$d_\alpha(x,y)=d_\alpha(y,x)$($\forall\alpha\in[0,1)$，且当$x=y$时我们有$d_\alpha(x,y)=0$（$\forall\alpha\in[0,1)$）。

下面我们将证明

$$d_\alpha(x,y)\leqslant d_\alpha(x,z)+d_\alpha(z,y),\qquad(\forall\alpha\in[0,1);\ x,y,z\in X) \tag{1.3}$$

事实上，令$t_1=d_\alpha(x,y)$，$t_2=d_\alpha(z,y)$，由(1.2)我们有

$$F_{xz}\left(t_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)>\alpha,\ F_{zy}\left(t_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)>\alpha\qquad(\forall\varepsilon>0)$$

于是从(1.1)和$\varDelta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$ 我们有

$$F_{xy}(t_1+t_2+\varepsilon)\geqslant\varDelta\left(F_{xz}\left(t_1+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{zy}\left(t_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

$$\geqslant\min\left\{F_{xz}\left(t_1+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{zy}\left(t_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}>\alpha$$

根据(1.2)显然有

$$d_\alpha(x,y)\leqslant t_1+t_2+\varepsilon$$

令$\varepsilon\to0^+$我们可得到

$$d_\alpha(x,y)\leqslant t_1+t_2=d_\alpha(x,z)+d_\alpha(z,y).$$

注1.1. 如果t-范数$\varDelta$是连续的（或$\sup\limits_{a<1}\varDelta(a,a)=1$），则(1.3)可用下列不等式代替：

$\forall\alpha\in[0,1)$，存在一$\alpha'\in[0,1)$使

$$d_{a}(x,y)\leqslant d_{a'}(x,z)+d_{a'}(z,y),\qquad (\forall x,y,z\in X)\tag{1.4}$$

事实上，根据$\sup\limits_{a<1}\Delta(a,a)=1$（如果$\Delta$连续，这个条件显然成立）我们可推得存在一$a'\in[0,1)$，使得$\Delta(a',a')>a$，于是由定理1.1的证明我们有

$$F_{xy}(t_1+t_2+\varepsilon)\geqslant\Delta\left(F_{xz}\left(t_1+\frac{\varepsilon}{2}\right),F_{zy}\left(t_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$
$$\geqslant\Delta(a',a')>a$$

再次利用(1.2)并令$\varepsilon\to0^+$，我们可以得到(1.4)式。

以下，我们假设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是一有连续t-范数Δ的Menger空间。

引理1.1[3] 如果$(X,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger空间，则$(X,\mathscr{F},\Delta)$按ε,λ一邻域族$\{U_p(\varepsilon,\lambda)\}$所诱导的拓扑$\mathscr{I}$是一Hausdorff空间。其中$U_p(\varepsilon,\lambda)=\{x\in X\mid F_{xp}(\varepsilon)>1-\lambda\}$。因此，按这个拓扑$\mathscr{I}$我们可诱导如下的概念，诸如$\mathscr{I}$-收敛性，$\mathscr{I}$-Cauchy序列，$\mathscr{I}$-完备性。和映象$T$: $X\to X$是$\mathscr{I}$-连续。等等。

定理1.2 如果$\{(X,d_a):a\in[0,1)\}$是Menger空间$(X,\mathscr{F},\Delta)$生成的拟距离空间族，序列$\{x_n\}$，$\{g_n\}\subseteq X$，$x,y\in X$。则我们有：

(1) $x_n\xrightarrow{\mathscr{I}}x(n\to\infty)\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$x_n\xrightarrow{d_a}x(n\to\infty)$；

(2) $\{x_n\}$是$\mathscr{I}$-Cauchy序列$\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$\{x_n\}$是$d_a$-Cauchy序列；

(3) $(X,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{I}$-完备的$\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$(X,\mathscr{F},\Delta)$是$d_a$-完备的；

(4) T: $X\to X$是$\mathscr{I}$-连续$\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$T$: $X\to X$是d_a-连续的；

(5) 如果$\forall\alpha\in[0,1)$，$d_a(x,y)=0$，则$x=y$。

证明 (1) $x_n\xrightarrow{\mathscr{I}}x(n\to\infty)\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$\forall\varepsilon>0$，存在$M_{a\varepsilon}>0$，使得$F_{x_nx}(\varepsilon)>\alpha$。$\forall n>M_{a\varepsilon}$，$\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$d_a(x_n,x)<\varepsilon$，$n>M_{a\varepsilon}\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$x_n\xrightarrow{d_a}x(n\to\infty)$。

利用实际上与(1)相同的方法，我们可得到(2)与(4)。并且从(2)可推得(3)。

(5) 如果$x\neq y$，则存在一$\varepsilon_0>0$，使$F_{xy}(\varepsilon_0)<1$。于是根据(1.2)我们有$d_{F_{xy}(\varepsilon_0)}(x,y)\geqslant\varepsilon_0>0$。这是一个矛盾，于是$x=y$。

二、一些引理

本节将给出一些基本引理，我们将省略一些证明，读者可在[8]中找到。

定义2.1 令$(X,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger空间，$A\subseteq X$称作概率有界的，如果下列条件满足：

$$\sup_{t>0}\inf_{p,q\in A}F_{pq}(t)=1.$$

引理2.1 $A\subseteq X$是概率有界$\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$\sup\limits_{p,q\in A}d_a(p,q)<\infty$。

证明 由定义2.1，$A\subseteq X$概率有界$\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，存在一$t_0(\alpha)>0$使当$t>t_0$时，我们有$F_{pq}(t)>\alpha$，$\forall p,q\in A\Longleftrightarrow\forall\alpha\in[0,1)$，$d_a(p,q)\leqslant t_0(\alpha)$，$\forall p,q\in A\Longleftrightarrow\sup\limits_{p,q\in A}d_a(p,q)\leqslant t_0(\alpha)<\infty$，$\forall\alpha\in[0,1)$。

引理2.2 (i)如果$A\subseteq X$是概率有界，则$\forall\alpha\in[0,1)$，我们有

$$\sup_{p,q\in A} d_\alpha(p,q)\leqslant\sup\{t\in R^+|\inf_{p,q\in A} F_{pq}(t))\leqslant\alpha\} \tag{2.1}$$

(ii) 当$A\subseteq X$是一有限集时，(2.1)中的等号成立；

(iii) 如果$A\subseteq X$是一无限集且概率有界，则(2.1)中的等号一般不成立。

证明 (i)由$A\subseteq X$是概率有界就可推得，对一切$\alpha\in[0,1)$，$\sup\{t\geqslant 0 |\inf\limits_{p,q\in A} F_{pq}(t)\leqslant\alpha\}<\infty$，于是对一切$t'>\sup\{t\geqslant 0 |\inf\limits_{p,q\in A} F_{pq}(t)\leqslant\alpha\}$，我们可推得$\inf\limits_{p,q\in A} F_{pq}(t')>\alpha$，即$F_{pq}(t')>\alpha$，$\forall p,q\in A$或$d_\alpha(p,q)\leqslant t'$，$\forall p,q\in A$，则我们有$\sup\limits_{p,q\in A} d_\alpha(p,q)\leqslant t'$。由$t'$的任意性，这就证明了(2.1)。

(ii) 因为一有限集必然是概率有界集，同时注意，根据(2.1)，为了证明(ii)，我们只须证明下式：

$$\sup_{p,q\in A} d_\alpha(p,q)\geqslant\sup\{t\geqslant 0 |\inf_{p,q\in A} F_{pq}(t)\leqslant\alpha\} \tag{2.2}$$

事实上，$\forall\alpha\in[0,1)$，令t'是一任意实数，它满足$t'>\sup\limits_{p,q\in A} d_\alpha(p,q)$，于是从(1.2)可推得

$$t'>\sup\{t\geqslant 0 | F_{pq}(t)\leqslant\alpha\}\quad(\forall p,q\in A)$$

则$F_{pq}(t')>\alpha$，$\forall p,q\in A$，因A是一有限集，则我们有$\inf\limits_{p,q\in A} F_{pq}(t')>\alpha$并且

$$t'>\sup\{t\geqslant 0 |\operatorname{ifn}_{p,q\in A} F_{pq}(t)\leqslant\alpha\} \tag{2.3}$$

令$t'\downarrow\sup\limits_{p,q\in A} d_\alpha(p,q)$，我们可得(2.2)。(ii)的证明完毕。

(iii)例子　令$A=\{x_n|n=0,1,2,\cdots\}\subseteq X$，固定$\alpha_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，定义

$$F_{x_0x_n}(t)=\begin{cases}0 & (t\leqslant 1)\\ \alpha_0+\dfrac{1}{n+2} & (1<t\leqslant 2,\ n=0,1,2,\cdots)\\ 1 & (t>2)\end{cases}$$

和

$$F_{pq}(t)=\begin{cases}0 & (t\leqslant 1)\\ 1 & (t<1)\end{cases}\qquad(p,q\in\{x_n|n=1,2,\cdots\})$$

于是我们有

$$\sup_{p,q\in A} d_{\alpha_0}(p,q)=1\ \text{和}\ \inf_{p,q\in A} F_{pq}(t)=\begin{cases}0 & (t\leqslant 1)\\ \alpha_0 & (1<t\leqslant 2)\\ 1 & (t>2).\end{cases}$$

因此推出A是一概率有界集，但

$$\sup\{t\geqslant 0 |\inf_{p,q\in A} F_{pq}(t)\leqslant\alpha_0\}=2\neq 1=\sup_{p,q\in A} d_{\alpha_0}(p,q).$$

令ϕ: $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是一映象并满足下述

(ϕ)。$\phi(t)$是一按t严格上升和右连续的且$\phi(t)>t$，$\forall t>0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}(\phi(t)-t)=+\infty$。

引理2.3　假设映象ϕ满足条件(ϕ)，则存在ϕ^{-1}使得ϕ^{-1}也是按t严格上升右连续，$\phi^{-1}(t)$

$<t$, $\forall t>0$。并且

$$\phi^{-1}(\sup\{t\geqslant 0\,|\,F(t)\leqslant\alpha\})\geqslant\sup\{t\geqslant 0\,|\,F(\phi(t))\leqslant\alpha\}$$
$$(\forall\alpha\in[0,1))\qquad(2.4)$$

证明 显然。为了证明引理2.3。只须证明(2.4)式。令$t_0=\sup\{t\geqslant 0\,|\,F(t)\leqslant\alpha\}$。由$\phi$的严格上升，我们有

$$\sup\{t\geqslant 0\,|\,F(\phi(t))\leqslant\alpha\}=\sup\{t\geqslant 0\,|\,\phi(t)\leqslant t_0\}$$
$$=\sup\{t\geqslant 0\,|\,t\leqslant\phi^{-1}(t_0)\}\leqslant\phi^{-1}(t_0)$$

这就完成了(2.4)之证明。

引理2.4 假设映象ϕ满足条件(ϕ)，则

(i) 如果对任意 $\{t_n|n=1,2,\cdots\}\subseteq[0,+\infty)$，$t_{n+1}\leqslant\phi^{-1}(t_n)(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$；

(ii) 如果$t\leqslant\phi(t)$ $(\forall t\geqslant 0)$，则$t=0$；

(iii) 对任意$q\geqslant 0$，存在$\mu(q)\geqslant 0$，使得

$$\sup\{p\geqslant 0\,|\,p\leqslant\phi^{-1}(p)+q\}\leqslant\mu(q).$$

这个引理的证明出现在[8]。

三、应 用

在本节中，我们将应用在第二节所得结果到 P.M.空间，并给出 P.M. 空间中的一个不动点定理。以它作为一个例子去解释这个嵌入方法的应用。

定理3.1 设$(X,\mathscr{F},\varDelta)$是一完备 Menger 空间。$t$-范数$\varDelta$满足 $\varDelta(t,t)\geqslant t$, $\forall t\in[0,1]$。T是X上的自映象。T^m是$\mathscr{F}$-连续（m是一正整数且固定）。T_n: $T^{m-1}X\to X(n=1,2,\cdots)$ 满足$T_nT=TT_n$和 $T_n^{m_n}(T^{m-1}X)\subset T^mX$ $(n=1,2,\cdots)$，其中$\{m_n: n=1,2,\cdots\}$是一正整数序列并且对一切，$i,j=1,2,\cdots(i\neq j)$，$x,y\in X$，我们有

$$F_{T_i^{m_i}x\,T_j^{m_j}y}(t)\geqslant\min\{F_{TxTy}(\phi(t)),\,F_{TxT_i^{m_i}x}(\phi(t)),$$
$$F_{Ty\,T_j^{m_j}y}(\phi(t)),\;F_{Tx\,T_j^{m_j}y}(\phi(t)),\;F_{Ty\,T_i^{m_i}x}(\phi(t))\}\qquad(3.1)$$

其中映象ϕ满足条件(ϕ)，如果存在$x_0\in X$，使得序列$\{y_n|n=0,1,2,\cdots\}$:

$$y_n=T_{n+1}^{m_{n+1}}T^{m-1}x_n=T^mx_{n+1}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

是概率有界的。则T和$\{T_n|n=1,2,\cdots\}$在X中有唯一公共不动点。

证明 对任意$\alpha\in[0,1)$，由引理2.2，引理2.3和(3.1)式，我们有

$$d_\alpha(T_i^{m_i}x,T_j^{m_j}y)=\sup\{t\geqslant 0\,|\,F_{T_i^{m_i}x\,T_j^{m_j}y}(t)\leqslant\alpha\}$$
$$\leqslant\sup\{t\geqslant 0\,|\,\min\{F_{TxTy}(\phi(t)),\;F_{Tx\,T_i^{m_i}x}(\phi(t)),\;F_{TyT_j^{m_j}y}(\phi(t)),$$
$$F_{TxT_j^{m_j}y}(\phi(t)),\,F_{TyT_i^{m_i}x}(\phi(t))\}\leqslant\alpha\}$$
$$\leqslant\max\{\phi^{-1}(d_\alpha(Tx,Ty)),\phi^{-1}(d_\alpha(Tx,T_i^{m_i}x)),\;\phi^{-1}(d_\alpha(Ty,T_j^{m_j}y)),$$
$$\phi^{-1}(d_\alpha(Tx,T_j^{m_j}y)),\;\phi^{-1}(d_\alpha(Ty,T_i^{m_i}x))\}$$
$$\leqslant\phi^{-1}(\max\{d_\alpha(Tx,Ty),d_\alpha(Tx,T_i^{m_i}x),\;d_\alpha(Ty,T_j^{m_j}y),$$

$$d_\alpha(Tx, T_j^{m_j}y),\ d_\alpha(Ty, T_i^{m_i}x)\}) \tag{3.2}$$

现在对任意 $n>m$，利用条件(ϕ)和(3.2)，我们有

$$\sup_{m\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j) = \sup_{m\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(T_{i+1}^{m_{i+1}}T^{m-1}x_i,\ T_{j+1}^{m_{j+1}}T^{m-1}x_j)$$

$$\leqslant \sup_{m\leqslant i<j\leqslant n} \phi^{-1}(\max\{d_\alpha(T^m x_i, T^m x_j),\ d_\alpha(T^m x_i,\ T_{i+1}^{m_{i+1}}T^{m-1}x_i),$$

$$d_\alpha(T^m x_j,\ T_{j+1}^{m_{j+1}}T^{m-1}x_j),\ d_\alpha(T^m x_i,\ T_{j+1}^{m_{j+1}}T^{m-1}x_j),$$

$$d_\alpha(T^m x_j,\ T_{i+1}^{m_{i+1}}T^{m-1}x_i)\}) \leqslant \phi^{-1}(\sup_{m-1\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j)) \tag{3.3}$$

注意

$$\sup_{0\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j) \leqslant d_\alpha(y_0, y_1) + \sup_{1\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j)$$

则由上式及(3.3)（取$m=1$），我们有

$$\sup_{0\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j) \leqslant d_\alpha(y_0, y_1) + \phi^{-1}(\sup_{0\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j)) \tag{3.4}$$

由引理2.4(iii)推得(3.4)式存在最大解$t_0\in[0,\infty)$，使得

$$\sup_{0\leqslant i<j\leqslant n} d_\alpha(y_i, y_j) \leqslant t_0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

由 n 的任意性可得

$$\sup_{0\leqslant i<j} d_\alpha(y_i, y_j) \leqslant t_0 \tag{3.5}$$

根据(3.5)并利用和(3.3)实际上相同的方法我们可得:

$$\sup_{m\leqslant i<j} d_\alpha(y_i, y_j) \leqslant \phi^{-1}(\sup_{m-1\leqslant i<j} d_\alpha(y_i, y_j)) \qquad (m=1,2,\cdots)$$

于是由引理2.4(i)可得

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m\leqslant i<j} d_\alpha(y_i, y_j) = 0 \qquad (\forall\,\alpha\in[0,1))$$

因而由定理1.2(2)知$\{y_n\}$是X中的 $\mathscr{I}$-Cauchy 序列，因为$(X,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{I}$-完备的，存在一点$y_*\in X$，使得$y_n\to y_*(n\to\infty)$，于是对任意$n>i$，由(3.2)我们有

$$d_\alpha(T^m y_n,\ T_i^{m_i}T^{m-1}y_*) = d_\alpha(T_{n+1}^{m_{n+1}}T^{m-1}y_{n-1},\ T_i^{m_i}T^{m-1}y_*)$$

$$\leqslant \phi^{-1}(\max\{d_\alpha(T^m y_{n-1}, T^m y_*),\ d_\alpha(T^m y_{n-1}, T^m y_n),$$

$$d_\alpha(T^m y_*, T_i^{m_i}T^{m-1}y_*),\ d_\alpha(T^m y_{n-1}, T_i^{m_i}T^{m-1}y_*),$$

$$d_\alpha(T^m y_*, T^m y_n)\})$$

在上式令$n\to+\infty$。并注意T^m的连续性，我们有

$$d_\alpha(T^m y_*,\ T_i^{m_i}T^{m-1}y_*) \leqslant \phi^{-1}(d_\alpha(T^m y_*,\ T_i^{m_i}T^{m-1}y_*))$$

于是由引理2.4 (ii)我们可得$d_\alpha(T^m y_*, T_i^{m_i}T^{m-1}y_*)=0$，$\forall\,\alpha\in[0,1)$，则利用定理 1.2（5）我们有

$$T^m y_* = T_i^{m_i}T^{m-1}y_* \triangleq x_* \qquad (i=1,2,\cdots) \tag{3.6}$$

再由 (3.2) 我们有

$$d_\alpha(x_*, T_i^{m_i}x_*) = d_\alpha(T_j^{m_j}T^{m-1}y_*,\ T_i^{m_i}T^m y_*)$$

$$\leqslant \phi^{-1}(\max\{d_\alpha(T^m y_*, T^{m+1}y_*),\ d_\alpha(T^m y_*, x_*),$$

$$d_\alpha(T^{m+1}y_*, T_i^{m_i}x_*),\ d_\alpha(T^m y_*,\ T_i^{m_i}x_*),\ d_\alpha(T^{m+1}y_*, x_*)\})$$

$$=\phi^{-1}(d_\alpha(x_*, T_i^{m_i}x_*)) \qquad (\forall \alpha\in[0,1))$$

因此可推得 $T_i^{m_i}x_*=x_*$ $(i=1,2,\cdots)$. 综合以上我们可得到

$$Tx_*=T(T_i^{m_i}T^{m-1}y_*)=T_i^{m_i}T^m y_*$$

$$=T_i^{m_i}x_*=x_*$$

则x_*是T和 $\{T_i^{m_i}|i=1,2,\cdots\}$ 的一公共不动点且唯一性由(3.2)式易得. 另一方面，对任意正整数n，我们有

$$T_i^{m_i}(T_nx_*)=T_n(T_i^{m_i}x_*)=T_nx_*, \qquad (i=1,2,\cdots)$$

$$T(T_nx_*)=T_n(Tx_*)=T_nx_*$$

故 T_nx_*亦为T和 $\{T_i^{m_i}|i=1,2,\cdots\}$ 的公共不动点，从而 $T_nx_*=x_*(n=1, 2, \cdots)$. 并利用(3.2)可推得$x_*$是$T$和$\{T_i|i=1,2,\cdots\}$在$x$中的一个唯一公共不动点. 定理3.1证毕.

注3.1. 定理3.1提供了将一距离空间中的不动点定理转化为Menger空间中相应的不动点定理的一个一般的方法

参 考 文 献

[1] Menger, K., Statistical metric, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **28** (1942), 535—537.

[2] Wald, A., On a statistical generalization of metric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **29** (1943), 196—197.

[3] Schweizer, B, and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 313—334.

[4] Egbert, R. T., Products and quotients of probabilistic metric spaces, *Pacific J. Math.*, **24** (1968), 437—455.

[5] Schweizer, B. and A. Sklar, *Probabililstic metric spaces*, North-Holland Publisher (1983).

[6] Zhu Lin-hu, Fixed point of probabilistic normal spaces and probabilistic inner product spaces, Ph. D. Dissertation, Xi'an Jiaotong University, China(1981).

[7] Liu Zuo-shu, The nonlinear abstract contraction principle and its application to statistical metric spaces, *Acta. Math. Sci.*, 4 (1984) 69—79.

[8] Zhang Shi-sheng, *Fixed Point Theory and Application*, Chongqing Press (1984).

The Embedded Theorem for Family of Quasi Metric Spaces in Menger Space and Its Application

Liu Zuo-shu

(*Dept. of Math. and Physics, Wuhan University of Technology, Wuhan*)

Zheng Quan

(*Dept. of Math., Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

In this paper the notion of embedding for family of quasi metric spaces in Menger spaces is introduced and its properties are investigated. A common fixed point theorem for sequence of continuous mappings in Menger spaces is proved. These mappings are assumed to satisfy some generalizations of the contraction condition. The proving technique herein seems to be new even for mappings in Menger spaces.