应用数学和力学，第11卷第5期(1990年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

贮液圆筒在水中的弯曲自由振动*

周 叮

(华东工学院，1988年8月15日收到)

摘 要

本文研究了贮液圆筒在水中的弯曲自由振动问题，液体和水的深度均可任意，导出了水中贮液圆筒的振型函数及固有频率的精确计算公式，结果可由计算机解出．分析表明，液体和水对筒体振动的影响各自等效一附着于筒体的广义分布质量．

一、引 言

随着现代工业和科学技术的发展，结构物和液体耦联振动的分析日趋重要，已取得许多成果[1],[2]．在实际工程中，贮液容器多为圆柱形，因而研究其在水中的动态特性很有实际意义．在以往的研究中，振型函数多是近似的，并附加了柱高与水深相等的条件，且只考虑了水对柱体的作用，对液体和水共同作用下圆筒的振动研究还不多见．文[3]、[4]研究了水深与柱高不等时实心圆柱在水中的弯曲自由振动，给出了振型函数及固有频率的精确计算公式．在此基础上，本文继续研究了贮液圆筒在水中的弯曲自由振动，液体和水的深度均可任意，导出了液体和水共同作用下圆筒的振型函数及固有频率的精确计算公式，结果可用于分析海上贮油罐等实际结构的振动问题．

二、液体和水的运动

考虑如图1所示的水中贮液圆筒，圆筒的内半径为r_0，外半径为R_0，筒高H，筒内液深h_1，筒外水深h_2．设筒体沿y方向作梁式振动，建立图示的柱坐标系来描述液体和水的运动．

设液体和水均是理想不可压无旋的，因而存在速度势$\phi(r, \theta, z, t)$，满足

$$\nabla^2\phi=0 \tag{2.1}$$

其中 ∇^2是拉普拉斯算子．

忽略表面波动，ϕ应满足以下边界条件．对圆筒内的液体有

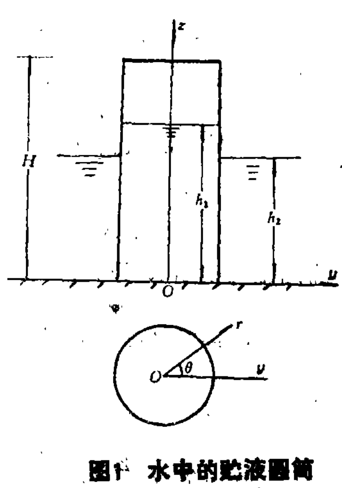

图1 水中的贮液圆筒

*潘立宙推荐．华东工学院科研发展基金资助课题．

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \qquad \phi|_{z=h_1}=0 \tag{2.2a、b}$$

$$\phi|_{r\to0}\text{有界}, \qquad \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=r_0}=\frac{\partial y}{\partial t}\cos\theta \tag{2.2c、d}$$

对圆筒外的水有

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \qquad \phi|_{z=h_2}=0 \tag{2.3a、b}$$

$$\phi|_{r\to\infty}=0, \qquad \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R_0}=\frac{\partial y}{\partial t}\cos\theta \tag{2.3c、d}$$

其中 $y=y(z,t)$为筒体沿y方向的位移。

用分离变量法[5]解(2.1)式，设$\phi=R(r)\Theta(\theta)Z(z)\dot{T}(t)$，$y=Y(z)T(t)$，可解得

$$\phi=(A_1I_n(mr)+A_2K_n(mr))(B_1\cos mz+B_2\sin mz)(C_1\cos n\theta+C_2\sin n\theta)\dot{T}(t)$$

其中 A_i，B_i，$C_i(i=1,2)$为待定系数，$I_n(mr)$，$K_n(mr)$分别为n阶第一类和第二类修正贝塞尔函数。

对于筒内的液体，根据(2.2a)～(2.2d)诸式可得

$$\phi_1=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}A_sI_1(m_sr)\cos m_sz\cos\theta \tag{2.4a}$$

$$Y(z)\cos\theta=\sum_{s=1}^{\infty}A_sm_s\dot{I}_1(m_sr_0)\cos m_sz\cos\theta \tag{2.4b}$$

其中 $A_s(s=1,2,3,\cdots)$为待定常数，$m_s=(2s-1)\pi/2h_1$。

对于筒外的水，根据(2.3a)～(2.3d)诸式可得

$$\phi_2=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}B_sK_1(n_sr)\cos n_sz\cos\theta \tag{2.5a}$$

$$Y(z)\cos\theta=\sum_{s=1}^{\infty}B_sn_s\dot{K}_1(n_sR_0)\cos n_sz\cos\theta \tag{2.5b}$$

其中 $B_s(s=1,2,3,\cdots)$为待定常数，$n_s=(2s-1)\pi/2h_2$。

利用三角函数系的正交性可求得

$$A_s=\frac{2}{h_1m_s\dot{I}_1(m_sr_0)}\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi$$

$$B_s=\frac{2}{h_2n_{s1}\dot{K}(n_sR_0)}\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi$$

因而，筒内液体的速度势为

$$\phi_1=\dot{T}(t)\frac{2}{h_1}\cos\theta\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_1(m_sr)}{m_s\dot{I}_1(m_sr_0)}\cos m_sz\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi \tag{2.6}$$

筒外水的速度势为

$$\phi_2=\dot{T}(t)\frac{2}{h_2}\cos\theta\sum_{s=1}^{\infty}\frac{K_1(n_sr)}{n_s\dot{K}_1(n_sR_0)}\cos n_sz\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi \tag{2.7}$$

三、筒体的振动方程

由(2.6)，(2.7)两式可得沿筒体单位高度上液体动压力在y方向的合力。

圆筒所受的内压合力为

$$p_1\Big|_{r=r_0}=-\rho_1\int_0^{2\pi}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\Big|_{r=r_0}r_0\cos\theta d\theta$$

$$=-\frac{2\pi\rho_1 r_0}{h_1}\ddot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_1(m_s r_0)}{m_s \dot{I}_1(m_s r_0)}\cos m_s z\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi \tag{3.1}$$

圆筒所受的外压合力为

$$p_2\Big|_{r=R_0}=-\rho_2\int_0^{2\pi}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\Big|_{r=R_0}R_0\cos\theta d\theta$$

$$=-\frac{2\pi\rho_2 R_0}{h_2}\ddot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{K_1(n_s R_0)}{n_s \dot{K}_1(n_s R_0)}\cos n_s z\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi \tag{3.2}$$

其中 ρ_1为筒内液体的密度，ρ_2为筒外水的密度。

设$h_{\min}=\min(h_1, h_2)$，$h_{\max}=\max(h_1, h_2)$，0至$h_{\min}$段筒体的振动方程为

$$EJ\frac{\partial^4 y_1}{\partial z^4}=-\rho_0 F\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+p_1\Big|_{r=r_0}-p_2\Big|_{r=R_0} \tag{3.3a}$$

其中 $F=\pi(R_0^2-r_0^2)$为筒体的截面积，ρ_0为筒体材料密度，EJ 为筒体的弯曲刚度，$J=(R_0^4-r_0^4)\pi/4$。

将(3.1)，(3.2)两式代入上式可得到

$$EJ\frac{d^4Y_1}{dz^4}-\rho_0 F\omega^2 Y_1-2\pi\omega^2\Big(\frac{\rho_1 r_0}{h_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_1(m_s r_0)}{m_s\dot{I}_1(m_s r_0)}\cos m_s z\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi$$

$$-\frac{\rho_2 R_0}{h_2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{K_1(n_s R_0)}{n_s\dot{K}_1(n_s R_0)}\cos n_s z\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi\Big)=0$$

上式可写成

$$EJ\frac{d^4Y_1(z)}{dz^4}-\omega^2(\rho_0 F+m_1(z))Y_1(z)=0 \tag{3.3b}$$

其中

$$m_1(z)=\frac{2\pi}{Y_1(z)}\Big(\frac{\rho_1 r_0}{h_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_1(m_s r_0)}{m_s\dot{I}_1(m_s r_0)}\cos m_s z\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi$$

$$-\frac{\rho_2 R_0}{h_2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{K_1(n_s R_0)}{n_s\dot{K}_1(n_s R_0)}\cos n_s z\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi\Big) \tag{3.3c}$$

如$h_1>h_2$，$h_{\min}$至$h_{\max}$段筒体的振动方程为

$$EJ\frac{\partial^4 y_2}{\partial z^4}=-\rho_0 F\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+p_1\Big|_{r=r_0} \tag{3.4a}$$

将(3.1)式代入上式可得

$$EJ\frac{d^4Y_2}{dz^4}-\rho_0 F\omega^2 Y_2-\frac{2\pi\omega^2\rho_1 r_0}{h_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_1(m_s r_0)}{m_s\dot{I}_1(m_s r_0)}\cos m_s z\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi=0$$

上式可写成

$$EJ\frac{d^4Y_2(z)}{dz^4}-\omega^2(\rho_0F+m_2(z))Y_2(z)=0 \tag{3.4b}$$

其中

$$m_2(z)=\frac{2\pi\rho_1r_0}{Y_2(z)h_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_1(m_sr_0)}{m_s\dot{I}_1(m_sr_0)}\cos m_sz\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi \tag{3.4c}$$

类似地，如$h_1<h_2$，则$h_{\min}$至$h_{\max}$段筒体的振动方程为

$$EJ\frac{\partial^4y_2}{\partial z^4}=-\rho_0F\frac{\partial^2y_2}{\partial t^2}-p_2|_{r=R_0} \tag{3.5a}$$

将(3.2)式代入上式可得

$$EJ\frac{d^4Y_2}{dz^4}-\rho_0F\omega^2Y_2+\frac{2\pi\omega^2\rho_2R_0}{h_2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{K_1(n_sR_0)}{n_s\dot{K}_1(n_sR_0)}$$

$$\cdot\cos n_sz\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi=0$$

上式也可写成

$$EJ\frac{d^4Y_2(z)}{dz^4}-\omega^2(\rho_0F+m_2'(z))Y_2(z)=0 \tag{3.5b}$$

其中

$$m_2'(z)=-\frac{2\pi\rho_2R_0}{Y_2(z)h_2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{K_1(n_sR_0)}{n_s\dot{K}_1(n_sR_0)}\cos n_sz\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi \tag{3.5c}$$

$h_{\max}$至H段筒体的振动方程为

$$EJ\frac{\partial^4y_3}{\partial z^4}+\rho_0F\frac{\partial^2y_3}{\partial t^2}=0 \tag{3.6a}$$

即

$$EJ\frac{d^4Y_3(z)}{dz^4}-\omega^2\rho_0FY_3(z)=0 \tag{3.6b}$$

四、筒体的振型函数及固有频率

(3.3b)式可写成

$$\frac{d^4Y_1(z)}{dz^4}-k^4Y_1(z)=\sum_{s=1}^{\infty}(R_{1s}G_{1s}\cos m_sz+R_{2s}G_{2s}\cos n_sz) \tag{4.1a}$$

其中

$$k^4=\frac{\rho_0F\omega^2}{EJ},\quad R_{1s}=\frac{2\pi k^4\rho_1r_0I_1(m_sr_0)}{\rho_0Fh_1m_s\dot{I}_1(m_sr_0)}$$

$$R_{2s}=-\frac{2\pi k^4\rho_2R_0K_1(n_sR_0)}{\rho_0Fh_2n_s\dot{K}_1(n_sR_0)}$$

$$G_{1s}=\int_0^{h_1}Y(\xi)\cos m_s\xi d\xi \tag{4.1b}$$

$$G_{2s}=\int_0^{h_2}Y(\xi)\cos n_s\xi d\xi \tag{4.1c}$$

(4.1a)式的齐次通解为

$$Y_{1,1}(z)=D_1'\cos kz+D_2'\sin kz+D_3'\mathrm{ch}kz+D_4'\mathrm{sh}kz \tag{4.2a}$$

其中 $D_i'(i=1,2,3,4)$为待定常数。

(4.1a)式的非齐次特解为

$$Y_{1,2}(z)=\sum_{s=1}^{\infty}(f_{1,1s}\cos m_s z+f_{1,2s}\cos n_s z) \tag{4.2b}$$

将上式代入(4.1a)式比较系数可得

$$f_{1,1s}=\frac{R_{1s}G_{1s}}{m_s^4-k^4}, \qquad f_{1,2s}=\frac{R_{2s}G_{2s}}{n_s^4-k^4}$$

于是得(4.1a)式的通解为

$$Y_1(z)=Y_{1,1}(z)+Y_{1,2}(z) \tag{4.2c}$$

如$h_1>h_2$，(3.4b)式可写成

$$\frac{d^4Y_2(z)}{dz^4}-k^4Y_2(z)=\sum_{s=1}^{\infty}R_{1s}G_{1s}\cos m_s z \tag{4.3}$$

上式的齐次通解为

$$Y_{2,1}(z)=D_1''\cos kz+D_2''\sin kz+D_3''\mathrm{ch}kz+D_4''\mathrm{sh}kz \tag{4.4a}$$

其中，$D_i''(i=1,2,3,4)$为待定常数。

(4.3)式的非齐次特解为

$$Y_{2,2}(z)=\sum_{s=1}^{\infty}f_{1,1s}\cos m_s z \tag{4.4b}$$

如$h_1<h_2$，(3.5b)可写成

$$\frac{d^4Y_2(z)}{dz^4}-k^4Y_2(z)=\sum_{s=1}^{\infty}R_{2s}G_{2s}\cos n_s z \tag{4.5}$$

(4.4a)为其齐次通解，上式的非齐次特解为

$$Y_{2,2}(z)=\sum_{s=1}^{\infty}f_{1,2s}\cos n_s z \tag{4.6}$$

于是可得(4.3)式或(4.5)式的通解为

$$Y_2(z)=Y_{2,1}(z)+Y_{2,2}(z) \tag{4.7}$$

(3.6)式的通解为

$$Y_3(z)=D_1'''\cos kz+D_2'''\sin kz+D_3'''\mathrm{ch}kz+D_4'''\mathrm{sh}kz \tag{4.8}$$

其中 $D_i'''(i=1,2,3,4)$为待定常数。

由以上分析可得

$$Y(z)=\begin{cases}Y_{1,1}(z)+Y_{1,2}(z) & (0\leqslant z\leqslant h_{\min})\\ Y_{2,1}(z)+Y_{2,2}(z) & (h_{\min}\leqslant z\leqslant h_{\max})\\ Y_3(z) & (h_{\max}\leqslant z\leqslant H)\end{cases} \tag{4.9}$$

将(4.9)式分别代入(4.1b)，(4.1c)两式可得

$$G_{1s}=D_1'I_{1s}'+D_2'I_{2s}'+D_3'I_{3s}'+D_4'I_{4s}'+D_1''I_{1s}''+D_2''I_{2s}''+D_3''I_{3s}''$$
$$+D_4''I_{4s}''+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{R_{1j}G_{1j}}{m_j^4-k^4}E_{1sj}+\frac{R_{2j}G_{2j}}{n_j^4-k^4}E_{2sj}\right) \tag{4.10a}$$

$$G_{2s}=D_1'P_{1s}'+D_2'P_{2s}'+D_3'P_{3s}'+D_4'P_{4s}'+D_1''P_{1s}''+D_2''P_{2s}''+D_3''P_{3s}''$$

$$+D_4''P_{4s}''+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{R_{1j}G_{1j}}{m_j^4-k^4}V_{1sj}+\frac{R_{2j}G_{2j}}{n_j^4-k^4}V_{2sj}\right) \tag{4.10b}$$

其中

$$I_{1s}'=\int_0^{h_{min}}\cos m_s\xi\cos k\xi d\xi, \qquad I_{2s}'=\int_0^{h_{min}}\cos m_s\xi\sin k\xi d\xi$$

$$I_{3s}'=\int_0^{h_{min}}\cos m_s\xi\,\mathrm{ch}k\xi d\xi, \qquad I_{4s}'=\int_0^{h_{min}}\cos m_s\xi\,\mathrm{sh}k\xi d\xi$$

$$I_{1s}''=\int_{h_{min}}^{h_1}\cos m_s\xi\cos k\xi d\xi, \qquad I_{2s}''=\int_{h_{min}}^{h_1}\cos m_s\xi\sin k\xi d\xi$$

$$I_{3s}''=\int_{h_{min}}^{h_1}\cos m_s\xi\,\mathrm{ch}k\xi d\xi, \qquad I_{4s}''=\int_{h_{min}}^{h_1}\cos m_s\xi\,\mathrm{sh}k\xi d\xi$$

$$E_{1sj}=\int_0^{h_1}\cos m_s\xi\cos m_j\xi d\xi, \qquad E_{2sj}=\int_0^{h_{min}}\cos m_s\xi\cos n_j\xi d\xi$$

$$P_{1s}'=\int_0^{h_{min}}\cos n_s\xi\cos k\xi d\xi, \qquad P_{2s}'=\int_0^{h_{min}}\cos n_s\xi\sin k\xi d\xi$$

$$P_{3s}'=\int_0^{h_{min}}\cos n_s\xi\,\mathrm{ch}k\xi d\xi, \qquad P_{4s}'=\int_0^{h_{min}}\cos n_s\xi\,\mathrm{sh}k\xi d\xi$$

$$P_{1s}''=\int_{h_{min}}^{h_2}\cos n_s\xi\cos k\xi d\xi, \qquad P_{2s}''=\int_{h_{min}}^{h_2}\cos n_s\xi\sin k\xi d\xi$$

$$P_{3s}''=\int_{h_{min}}^{h_2}\cos n_s\xi\,\mathrm{ch}k\xi d\xi, \qquad P_{4s}''=\int_{h_{min}}^{h_2}\cos n_s\xi\,\mathrm{sh}k\xi d\xi$$

$$V_{1sj}=\int_0^{h_{min}}\cos n_s\xi\cos m_j\xi d\xi, \qquad V_{2sj}=\int_0^{h_2}\cos n_s\xi\cos n_j\xi d\xi$$

以上诸积分值见附录。

截断(4.10a)，(4.10b)两式，取$s=j=1, 2, 3, \cdots, n$，可解出G_{1s}和$G_{2s}(s=1, 2, 3, \cdots, n)$，它们是$D_i'$，$D_i''(i=1, 2, 3, 4)$的线性函数。将$G_{1s}$，$G_{2s}(s=1, 2, 3, \cdots, n)$代入(4.9)式，可得$Y(z)$也是$D_i'$，$D_i''$，$D_i'''(i=1, 2, 3, 4)$的线性函数。

$Y(z)$各段的联接条件为

$$Y_1|_{z=h_{min}}=Y_2|_{z=h_{min}}, \qquad Y_1'|_{z=h_{min}}=Y_2'|_{z=h_{min}}$$
$$Y_1''|_{z=h_{min}}=Y_2''|_{z=h_{min}}, \qquad Y_1'''|_{z=h_{min}}=Y_2'''|_{z=h_{min}}$$
$$Y_2|_{z=h_{max}}=Y_3|_{z=h_{max}}, \qquad Y_2'|_{z=h_{max}}=Y_3'|_{z=h_{max}}$$
$$Y_2''|_{z=h_{max}}=Y_3''|_{z=h_{max}}, \qquad Y_2'''|_{z=h_{max}}=Y_3'''|_{z=h_{max}}$$

$Y(z)$的两端($z=0$，$z=H$)各可提两个边界条件，如一端($z=0$)固定，一端($z=H$)自由，有

$$Y_1|_{z=0}=0, \quad Y_1'|_{z=0}=0, \quad EJY_3''|_{z=H}=0, \quad EJY_3'''|_{z=H}=0$$

将(4.9)式分别代入以上的联接条件和边界条件，可得到12个关于D_i'，D_i''，$D_i'''(i=1, 2, 3, 4)$的齐次线性方程组，令其系数行列式为零则得到频率方程，可解得各阶固有频率$\omega_i(i=1, 2, 3, \cdots)$及$D_i'$，$D_i''$，$D_i'''(i=1, 2, 3, 4)$诸常数的比值，将这些结果代入(4.9)式则可得到各阶振型函数。

五、结 束 语

通过以上分析可知

1．筒内液体和筒外水对筒体振动的影响各自等效一附着于筒体的广义分布质量，因而有液有水时圆筒的自振频率要比无液无水时的自振频率要低。

2．本文提供的计算方法对任意高度的液体和水均是适用的，振型函数和固有频率的解是精确的。

3．求解的数学形式较为复杂，但由计算机求解则是简便易行的。

附 录

$$I'_{1s}=\begin{cases}(-1)^s m_s\cos(kh_1)/(k^2-m_s^2) & (h_1\leqslant h_2)\\ (k\cos(m_sh_2)\sin(kh_2)-m_s\sin(m_sh_2)\cos(kh_2))/(k^2-m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I'_{2s}=\begin{cases}((-1)^s m_s\sin(kh_1)+k)/(k^2-m_s^2) & (h_1\leqslant h_2)\\ (k(1-\cos(m_sh_2)\cos(kh_2))-m_s\sin(m_sh_2)\sin(kh_2))/(k^2-m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I'_{3s}=\begin{cases}(-1)^{s-1} m_s\mathrm{ch}(kh_1)/(k^2+m_s^2) & (h_1\leqslant h_2)\\ (k\cos(m_sh_2)\mathrm{sh}(kh_2)+m_s\sin(m_sh_2)\mathrm{ch}(kh_2))/(k^2+m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I'_{4s}=\begin{cases}((-1)^{s-1} m_s\mathrm{sh}(kh_1)-k)/(k^2+m_s^2) & (h_1\leqslant h_2)\\ (k\cos(m_sh_2)\mathrm{ch}(kh_2)-1)+m_s\sin(m_sh_2)\mathrm{sh}(kh_2))/(k^2+m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I''_{1s}=\begin{cases}0 & (h_1\leqslant h_2)\\ (k\cos(m_sh_2)\sin(kh_2)-m_s(\sin(m_sh_2)\cos(kh_2)+(-1)^s\cos(kh_1)))/(k^2-m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I''_{2s}=\begin{cases}0 & (h_1\leqslant h_2)\\ (-k\cos(m_sh_2)\cos(kh_2)-m_s(\sin(m_sh_2)\sin(kh_2)+(-1)^s\sin(kh_1)))/(k^2-m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I''_{3s}=\begin{cases}0 & (h_1\leqslant h_2)\\ (k\cos(m_sh_2)\mathrm{sh}(kh_2)+m_s(\sin(m_sh_2)\mathrm{ch}(kh_2)+(-1)^s\mathrm{ch}(kh_1)))/(k^2+m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$I''_{4s}=\begin{cases}0 & (h_1\leqslant h_2)\\ (k\cos(m_sh_2)\mathrm{ch}(kh_2)+m_s(\sin(m_sh_2)\mathrm{sh}(kh_2)+(-1)^s\mathrm{sh}(kh_1)))/(k^2+m_s^2) & (h_1>h_2)\end{cases}$$

$$E_{1sj}=\begin{cases}0 & (s\neq j)\\ h_1/2 & (s=j)\end{cases}$$

$$E_{2sj}=\begin{cases}(-1)^s m_s\cos(n_jh_1)/(n_j^2-m_s^2) & (h_1<h_2)\\ (-1)^j n_j\cos(m_sh_2)/(m_s^2-n_j^2) & (h_1>h_2)\\ 0 & (h_1=h_2,\ s\neq j)\\ h_1/2 & (h_1=h_2,\ s=j)\end{cases}$$

$$P'_{1s}=\begin{cases}(-1)^s n_s\cos(kh_2)/(k^2-n_s^2) & (h_1\geqslant h_2)\\ (k\cos(n_sh_1)\sin(kh_1)-n_s\sin(n_sh_1)\cos(kh_1))/(k^2-n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P'_{2s}=\begin{cases}((-1)^s n_s\sin(kh_2)+k)/(k^2-n_s^2) & (h_1\geqslant h_2)\\ (k(1-\cos(n_sh_1)\cos(kh_1)-n_s\sin(n_sh_1)\sin(kh_1))/(k^2-n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P'_{3s}=\begin{cases}(-1)^{s-1}n_s\mathrm{ch}(kh_2)/(k^2+n_s^2) & (h_1\geqslant h_2)\\ (k\cos(n_sh_1)\mathrm{sh}(kh_1)+n_s\sin(n_sh_1)\mathrm{ch}(kh_1))/(k^2+n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P'_{4s}=\begin{cases}((-1)^{s-1}n_s\mathrm{sh}(kh_2)-k)/(k^2+n_s^2) & (h_1\geqslant h_2)\\ (k(\cos(n_sh_1)\mathrm{ch}(kh_1)-1)+n_s\sin(n_sh_1)\mathrm{sh}(kh_1))/(k^2+n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P''_{1s}=\begin{cases}0 & (h_1\geqslant h_2)\\ (k\cos(n_sh_1)\sin(kh_1)-n_s(\sin(n_sh_1)\cos(kh_1)+(-1)^s\cos(kh_2)))/(k_2-n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P''_{2s}=\begin{cases}0 & (h_1\geqslant h_2)\\ (-k\cos(n_sh_1)\cos(kh_1)-n_s(\sin(n_sh_1)\sin(kh_1)+(-1)^s\sin(kh_2)))/(k^2-n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P''_{3s}=\begin{cases}0 & (h_1\geqslant h_2)\\ (k\cos(n_sh_1)\mathrm{sh}(kh_1)+n_s(\sin(n_sh_1)\mathrm{ch}(kh_1)+(-1)^s\mathrm{ch}(kh_2)))/(k^2+n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$P''_{4s}=\begin{cases}0 & (h_1\geqslant h_2)\\ (k\cos(n_sh_1)\mathrm{ch}(kh_1)+n_s(\sin(n_sh_1)\mathrm{sh}(kh_1)+(-1)^s\mathrm{sh}(kh_2)))/(k^2+n_s^2) & (h_1<h_2)\end{cases}$$

$$V_{1sj}=\begin{cases}(-1)^jm_j\cos(n_sh_1)/(n_s^2-m_j^2) & (h_1<h_2)\\ (-1)^sn_s\cos(m_jh_2)/(m_j^2-n_s^2) & (h_1>h_2)\\ 0 & (h_1=h_2,\ s\neq j)\\ h_1/2 & (h_1=h_2,\ s=j)\end{cases}$$

$$V_{2sj}=\begin{cases}0 & (s\neq j)\\ h_2/2 & (s=j)\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] 居荣初、曾心传，《弹性结构与液体的耦联振动理论》，地震出版社 (1983).
[2] 郑哲民、马宗魁，悬臂梁一侧有液体作用时的自主振动，力学学报，3，2 (1959).
[3] 张悉德，部分埋入水中悬臂圆柱体的弯曲自由振动，应用数学和力学，3，4 (1982)，537—546.
[4] 张悉德，部分埋入水中悬臂圆柱体的地震响应，应用数学和力学，4，6 (1983)，847—852.
[5] 梁昆森，《数学物理方法》，人民教育出版社 (1979).

The Free Bending Vibration of Cylindrical Tank Partially Filled with Liquid and Submerged in Water

Zhou Ding

(East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract

This paper studies the free bending vibration of cylindrical tank partially filled with liquid and submerged in water. The depths of liquid and water may be completely arbitrary. The exact calculating formulae of mode shape functions and inherent frequencies are deduced. The results can be gained by means of computer. The analysis shows that the effect of liquid and water on vibration of cylindrical tank is respectively equivalent to a generalized distributive mass attached to the tank.