应用数学和力学, 第 25 卷 第 6 期(2004 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 06_0627_08

具有无穷时滞的细胞神经网络的全局稳定性分析*

张继业

(西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 成都 610031)

(我刊原编委李骊推荐)

摘要: 对具有无穷时滞的细胞神经网络平衡点的存在性、唯一性和全局渐近稳定性进行了分析• 在放弃了激活函数的有界性、单调性和可微性假设的情况下, 得到了系统的平衡点的存在性条件• 利用向量 Liapunov 函数法的思想, 构造适当的含有变时滞和无穷时滞的微分_积分不等式, 通过对微分_积分不等式的稳定性分析, 得到了神经网络系统的全局渐近稳定的充分条件•

关 键 词: 神经网络; 时滞; 细胞神经网络; 稳定性

中图分类号: O317; TP711 文献标识码: A

引 言

细胞神经网络是由 Chua 和 Yang[1, 2] 在 1988 年提出的• 此后 20 多年里, 细胞神经网络得到了广泛的研究, 并成功用于信号处理、图像处理和解非线性代数方程[2~4]• 这些应用依赖于神经网络平衡点的存在性与稳定性• 在网络的硬件实现中, 由于信号传输速度的有限性, 使网络系统中时间滞后不可避免• 另一方面, 在神经网络中引入时间滞后参量, 有利于移动目标的图像处理、移动物体速度的确定和模式分类• 但时间滞后量的引入, 可能使网络产生不稳定[5], 其动力学行为更加复杂• 对于时滞神经网络系统有许多研究, 并得到了一些有意义的研究结果[4~10]• 一般地, 在神经元较少的神经网络中, 有限时滞是一种较好的近似模型• 由于各种并行通道的存在, 使网络具有空间特征, 这使得人们试图通过无穷时滞来模拟网络的时间滞后[11~19]•

具有时变和无限时间滞后的细胞神经网络可由以下微分积分方程描述:

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = -e_i(u_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, g_j(u_j(t)) + b_{ij}\, g_j(u_j(t-\tau_{ij}(t))) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\, g_j(u_j(s))\,\mathrm{d}s + J_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

其中, u_i 为第 i 个神经元的状态, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ 为

* 收稿日期: 2002_02_28; 修订日期: 2003_12_05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272091)
作者简介: 张继业(1965—) , 男, 四川夹江人, 教授, 博士(Tel: + 86_28_87634355, Fax: + 86_28_87600868; E_mail: jyzhang@ home. swjtu. edu. cn)•

关联矩阵, $\boldsymbol{J}=(J_1,J_2,\cdots,J_n)^{\mathrm{T}}$ 为常输入, $\boldsymbol{g(u)}=(g_1(u_1),g_2(u_2),\cdots,g_n(u_n))^{\mathrm{T}}$ 为神经元的激活函数, $\boldsymbol{E(u)}=\mathrm{diag}(e_1(u_1),e_2(u_2),\cdots,e_n(u_n))$• 不失一般性, 令 $\boldsymbol{E(0)}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{g(0)}=\boldsymbol{0}$• 时间滞后 $\tau_{ij}(t)\geqslant 0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 为有界函数, $k_{ij}:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 $[0,\infty)$ 上的分段连续函数, 并满足

$$\int_0^{\infty}k_{ij}(s)\mathrm{d}s=1\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)•$$

系统(1)的初始条件为 $u_i(s)=\phi_i(s),\ s\leqslant 0$, 其中 ϕ_i 为 $(-\infty,0]$ 上的有界连续函数•

我们假设激活函数满足以下条件:

假设(Ⅰ) 对所有的 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 函数 $g_j:R\rightarrow R$ 为全局 Lipschitz 的, 并具有 Lipschitz 常数 $L_j>0$, 即对任意 u_j、v_j, 有

$$|g_j(u_j)-g_j(v_j)|\leqslant L_j|u_j-v_j|•$$

假设(Ⅱ) 对所有的 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 存在 $d_j>0$, 使函数 e_j 满足: 对任意 u_j、v_j, 有

$$d_j(u_j-v_j)^2\leqslant(u_j-v_j)(e_j(u_j)-e_j(v_j))•$$

令 $\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(L_1,L_2,\cdots,L_n)>0$, $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$•

满足假设(Ⅰ)的激活函数可以是有界的, 也可以是无界的• 在神经网络中使用的激活函数, 如 S 型函数[11, 12]和分段线性函数[1~3]均满足假设(Ⅰ)•

本文的目的是研究细胞神经网络(1)平衡点的存在性、唯一性和全局渐近稳定性• 对于具有固定时间滞后神经网络的稳定性研究, 一般采用标量 Liapunov 函数[9~17]• 但当系统中同时含有变时滞和无穷时滞时, 标量 Liapunov 函数就不再适用了• 稳定性理论中的向量 Liapunov 函数法在处理一些复杂系统时有其特殊的优势[20~23]• 本文我们利用向量 Liapunov 函数法的思想, 构造适当的微分_积分不等式, 通过对微分_积分不等式的稳定性分析, 得到了神经网络系统的全局渐近稳定的充分条件•

为了方便, 引入以下记号: $|\boldsymbol{x}|$ 表示绝对值矢量 $|\boldsymbol{x}|=(|x_1|,\cdots,|x_n|)^{\mathrm{T}}$, 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $[\boldsymbol{A}]^s$ 定义为 $[\boldsymbol{A}]^s=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A})/2$, $|\boldsymbol{A}|$ 表示绝对值矩阵 $|\boldsymbol{A}|=(|a_{ij}|)_{n\times n}$, 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵, $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B})$ 意味着 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为正定的(半正定的)• 用 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示矢量的范数, 定义为 $\|\boldsymbol{x}\|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$, $\|\boldsymbol{A}\|$ 表示矩阵的范数, 定义为 $\|\boldsymbol{A}\|=(\max\{\lambda:\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值$\})^{1/2}$•

1 平衡点的存在性与唯一性

与激活函数为有界时不同, 对于具有无界激活函数的神经网络可能没有平衡点[19, 20]• 平衡点的存在性, 对于神经网络的应用十分重要, 也是神经网络稳定性分析的前提• 本节将讨论神经网络平衡点的存在性与唯一性•

定义 1 实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为M_矩阵, 如果 $a_{ij}\leqslant 0,\ i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式为正•

引理 1[20, 21] 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 如果 $a_{ij}\leqslant 0,\ i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j$, 则以下陈述等价

(i) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为M_矩阵;

(ii) 存在矢量 $\xi>0$ 使 $\boldsymbol{A}\xi>0$;

(iii) 存在正定对角阵 $\boldsymbol{D}$, 使 $\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{DA}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵;

(iv) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的所有元素非负•

为了研究系统(1)的平衡点的存在性, 我们需要引入一些概念•

定义 2 映射 $\boldsymbol{H}: R^n \to R^n$ 为R^n 上的同胚映射, 如果 $\boldsymbol{H} \in C^0$ 是R^n 上的单射和满射, 且$\boldsymbol{H}^{-1} \in C^0$•

我们首先定义与系统(1)相关的一个映射:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{J}• \tag{2}$$

显然方程 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 的解是系统(1) 的平衡点• 如果 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 是 R^n 的同胚, 则存在唯一点 $\boldsymbol{u}^*$ 使 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{0}$, 即系统(1) 有唯一平衡点 $\boldsymbol{u}^*$•

引理 2[20] 如果 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) \in C^0$ 满足以下条件:

(i) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 是 R^n 的单射;

(ii) $\lim_{\|\boldsymbol{u}\| \to \infty} \|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})\| \to \infty$, 则 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 是 R^n 上的同胚•

由文[15] 中引理 3 及其证明过程可以得到以下结论:

引理 3 设 $\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{L}$ 为正定对角矩阵, 即 $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n) > 0$, $\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}(L_1, \cdots, L_n) > 0$• 对于矩阵 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{n\times n}$, 如果 $\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{-1}$ 为M_矩阵, 则对任意$\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{K} \leqslant \boldsymbol{L}$ 的对角矩阵$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(k_1, \cdots, k_n)$, $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}$ 为M_矩阵•

引理 4 如果$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ 分别满足假设(Ⅰ) 和(Ⅱ), 且 $\alpha = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{-1} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)$ 为M_矩阵, 则对于任意输入 $\boldsymbol{J}$, 由(2) 定义的映射 $\boldsymbol{H}$ 为单射•

证明(反证法) 假设存在 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, 使 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$• 由式(2)得

$$e_i(x_i) - e_i(y_i) = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})[g_j(x_j) - g_j(y_j)] \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)•$$

对上式两边取绝对值, 由假设(Ⅰ)知, 存在常数 k_j 满足 $0 \leqslant k_j \leqslant L_j$ 并使 $|g_j(x_j) - g_j(y_j)| = k_j|x_j - y_j|$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$• 再利用假设(Ⅱ), 得

$$[\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{K}]\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leqslant \boldsymbol{0}• \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(k_1, \cdots, k_n)$•

令$[\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{K}]\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \boldsymbol{w}$, 由(3) 知 $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{0}$• 当 α 为M_矩阵时, 由引理 3 知, 对任意满足$\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{K} \leqslant \boldsymbol{L}$ 的对角阵$\boldsymbol{K}$, $[\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{K}]$ 为M_矩阵• 由引理1(iv) 知, 矩阵$[\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{K}]^{-1}$ 的每一元素非负• 从而有 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = [\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{0}$• 所以 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \boldsymbol{0}$• 但这与假设矛盾• 故$\boldsymbol{H}$ 为单射• 证毕•

引理 5 如果$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ 分别满足假设(Ⅰ) 和(Ⅱ), 且 $\alpha = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{-1} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)$ 为M_矩阵, 则对任意输入 $\boldsymbol{J}$, 映射 $\boldsymbol{H}$ 为R^n 上的同胚•

证明 由于 α 为M_矩阵, 由引理4 知, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 为 R^n 上的单射• 由引理3 知 $\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{L}$ 为M_矩阵, 从而由引理 1 知, 存在正定对角阵 $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$, 对充分小的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\boldsymbol{P}[-\boldsymbol{D} + (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{L}]^{s} \leqslant -\varepsilon\boldsymbol{I}_n < 0, \tag{4}$$

$\boldsymbol{I}_n$ 为单位阵• 又

$$[\boldsymbol{P}\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) \leqslant |\boldsymbol{u}|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}[-\boldsymbol{D} + (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{L}]^{s}|\boldsymbol{u}| \leqslant \\ -\varepsilon\|\boldsymbol{u}\|^2• \tag{5}$$

由(5)并利用 Schwartz 不等式得

$$\varepsilon \| \boldsymbol{u} \|^2 \leqslant \| \boldsymbol{P} \| \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) \|, \tag{6}$$

即 $\varepsilon \| \boldsymbol{u} \| / \| \boldsymbol{P} \| \leqslant \| \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) \|$• 所以当 $\| \boldsymbol{u} \| \to +\infty$ 时, 有 $\| \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) \| \to +\infty$• 由引理 2 知对任意输入 $\boldsymbol{J}$, 映射 $\boldsymbol{H}$ 为 R^n 的同胚• 证毕•

定理 1 如果假设(Ⅰ)和(Ⅱ)成立, 且 $\alpha = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{-1} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)$ 是M_矩阵, 则对任意输入 $\boldsymbol{J}$, 系统(1) 有唯一平衡点 $\boldsymbol{u}^*$•

证明 由引理 5 知, 当 α 为M_矩阵时, 对任意输入 $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 是 R^n 上的同胚, 故系统(1) 有唯一平衡点 $\boldsymbol{u}^*$•

2 平衡点的全局渐近稳定性

定理 2 如果假设(Ⅰ)和(Ⅱ)成立, 且 $\alpha = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{-1} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)$ 为M_矩阵, 则对任意输入 $\boldsymbol{J}$, 系统(1)存在唯一平衡点, 且为全局渐近稳定的•

证明 由于 α 为M_矩阵, 由定理 1 知, 系统(1) 存在唯一平衡点 $\boldsymbol{u}^*$• 令 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^*$, 则系统(1)可写为

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -e_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) f_j(x_j(s))\,\mathrm{d}s \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{7}$$

其中 $f_j(x_j) = g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*)$, $e_j(x_j) = e_j(x_j + u_j^*) - e_j(u_j^*)$ $(j = 1, \cdots, n)$• 系统(7) 有唯一平衡点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$• 由于 α 为 M_矩阵, 由引理 3 知 $\boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{L}$ 为M_矩阵• 由引理 1, 存在 $\xi_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$-\xi_i d_i + \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| + |b_{ij}| + |c_{ij}|) \xi_j L_j < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)• \tag{8}$$

考虑 $|x_i(t)|$ 沿系统(7) 的解轨线的右上导数 $D^+ |x_i(t)|$

$$D^+ |x_i(t)| = \operatorname{sgn} x_i \left[-e_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} f_j(x_j(t)) + b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \right) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) f_j(x_j(s))\,\mathrm{d}s \right] \leqslant$$

$$-d_i |x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} L_j [|a_{ij}| |x_j(t)| + |b_{ij}| |x_j(t - \tau_{ij}(t))|] + \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) L_j |x_j(s)|\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

定义曲线 $\gamma = \{ \boldsymbol{z}(l) : z_i = \xi_i l,\ l > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n \}$, 集合 $\Omega(\boldsymbol{z}) = \{ \boldsymbol{u} : \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z} \in \gamma \}$, $S_i(\boldsymbol{z}) = \{ \boldsymbol{u} \in \Omega(\boldsymbol{z}) : u_i = z_i,\ \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{z} \}$• 显然如果 $l > l'$, 则有 $\Omega(\boldsymbol{z}(l)) \supset \Omega(\boldsymbol{z}(l'))$•

任给 $\varepsilon > 0$, 存在点 $\boldsymbol{z}_0(l_0) \in \gamma$ 使得 $\Omega(\boldsymbol{z}_0(l_0)) \subset \{ \boldsymbol{u} : \| \boldsymbol{u} \| \leqslant \varepsilon \}$• 我们将证明存在正数 $\delta > 0$, 且 $\{ |\boldsymbol{x}| : \| \boldsymbol{x} \| \leqslant \delta \} \subset \Omega(\boldsymbol{z}_0)$, 当系统(7) 的初始条件满足

$$\| \phi \| = \max_{i = 1, \cdots, n} \sup_{s \in (-\infty, 0]} |\phi_i(s)| < \delta,$$

则对 $t \geqslant 0$ 有 $\| \boldsymbol{x}(t) \| < \varepsilon$, 即系统(7)的零解是稳定的[24]•

设存在 $t_0 > 0$ 使 $\| \boldsymbol{x}(t_0) \| = \varepsilon$, 则存在某一指标 i 和时间 t_1, t_2, $(t_0 \geqslant t_2 > t_1)$ 使 $|x_i(t_2)| \in$

$S_i(z_0(l_0))$, 且对 $t\in[t_1,t_2]$ 有 $D^+|x_i(t)|\geqslant 0$, 以及对于 $-\infty<t\leqslant t_2$ 有 $|x_j(t)|\leqslant z_{j0}=\xi_j l_0$, $j=1,2,\cdots,n$. 但由式(9)知

$$D^+|x_i(t_2)|\leqslant -d_i\xi_i+\sum_{j=1}^n(|a_{ij}|+|b_{ij}|+|c_{ij}|)L_j\xi_j\, l_0<0.$$

这是一个矛盾. 故对任意 $t\geqslant 0$ 有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$. 以上证明还表明如果 $\{\boldsymbol{x}(t):-\infty<t\leqslant t_0\}\subset\Omega(z_0)$, 则 $\{\boldsymbol{x}(t):t>t_0\}\subset\Omega(z_0)$, 即集合 $\Omega(z_0)$ 是一不变集.

下面进而证明零解是全局渐近稳定的. 为此, 我们将证明对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$, 存在 $T=T(\varepsilon,\eta)>0$ 使得对任意 $t_0>0$, 当 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\eta(-\infty<t\leqslant t_0)$ 时, 有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varepsilon(t\geqslant T)$.

显然存在常数 $l_1,l_2(l_2>l_1)$ 使得

$$\Omega(z_1(l_1))=\{\boldsymbol{x}:0\leqslant|x_i|\leqslant z_{i1}(l_1),\ i=1,2,\cdots,n\}\subset\{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\varepsilon\},$$
$$\Omega(z_2(l_2))=\{\boldsymbol{x}:0\leqslant|x_i|\leqslant z_{i2}(l_2),\ i=1,2,\cdots,n\}\supset\{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\eta\},$$

其中 $z_1(l_1)\in\Upsilon$, $z_2(l_2)\in\Upsilon$, 即 $z_{ij}(l_j)=\xi_i l_j$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2$. 令

$$\beta=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{d_i\xi_i-\sum_{j=1}^n[|a_{ij}|+|b_{ij}|+|c_{ij}|]L_j\xi_j\Big\},$$

由于 $\int_0^\infty k_{ij}(s)\mathrm{d}s=1$, 存在常数 $T_1>0$ 使 $\int_{T_1}^\infty k_{ij}(s)\mathrm{d}s\leqslant\beta l_1\Big/\Big(3\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\sum_{j=1}^n L_j|c_{ij}|\eta\Big\}\Big)$. 令 $0<\varepsilon_1\leqslant\min\{1,\beta l_1/(3\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\xi_i\})\}$, $\delta_i=\varepsilon_1\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$. 设 N 为使 $\min_{i=1,n}\{z_{1i}+N\delta_i-\xi_i l_2\}\geqslant 0$ 成立的最小非负数, 并取 $t_k=t_0+kT^*$, $T^*=T^*(\varepsilon,\eta)=T_1+3\xi(l_1+N)/(\beta l_1)$, 这里 k 为非负整数, $\xi=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\xi_i\}$.

我们先利用数学归纳法证明: 如果 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\eta(-\infty<t\leqslant t_0)$, 则对所有 $k=0,1,2,\cdots,N$ 有

$$|x_i(t)|<z_{i1}+(N-k)\delta_i,\qquad t\geqslant t_k(i=1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

由于 $\Omega(z_2(l_2))$ 为不变集, 显然对于 $k=0$, 式(10) 成立. 假设对于某一 $k(0\leqslant k<N)$, 式(10) 成立, 即对所有的 $t\geqslant t_k$, 有

$$|x_i(t)|<z_{i1}+(N-k)\delta_i\qquad(i=1,2,\cdots,n). \tag{11}$$

现证: 对于 $t\geqslant t_{k+1}$ 有

$$|x_i(t)|<z_{i1}+(N-k-1)\delta_i\qquad(i=1,2,\cdots,n). \tag{12}$$

下面我们分两部分证明. 首先证明存在 $t\in[t_k+T_1,t_{k+1}]$ 使(12) 成立. 如若不然, 则存在 i 对一切 $t\in[t_k+T_1,t_{k+1}]$ 有

$$|x_i(t)|>z_i+(N-k-1)\delta_i.$$

由上式及式(11)、(9) 得

$$\begin{aligned}D^+|x_i(t)|\leqslant&-d_i\{z_{i1}+(N-k-1)\delta_i\}+\sum_{j=1}^n(|a_{ij}|+|b_{ij}|)L_j\{z_{j1}+(N-k)\delta_j\}+\\&\sum_{j=1}^n|c_{ij}|L_j\Big\{\eta\int_{-\infty}^{t-T_1}k_{ij}(t-s)\mathrm{d}s+\{z_{j1}+(N-k)\delta_j\}\int_{t-T_1}^{t}k_{ij}(t-s)\mathrm{d}s\Big\}\leqslant\\&-d_i\{z_{i1}+(N-k)\delta_i\}+\sum_{j=1}^n(|a_{ij}|+|b_{ij}|+|c_{ij}|)L_j\{z_{j1}+(N-k)\delta_j\}+\\&\sum_{j=1}^n L_j|c_{ij}|\eta\int_{-\infty}^{t-T_1}k_{ij}(t-s)\mathrm{d}s+d_i\delta_i.\end{aligned}$$

因为 $z_{i1}=\xi_i l_1$, $\delta_i=\varepsilon_1\xi_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 可以得到

$$-d_i z_{i1}+(N-k)\delta_i+\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|+|c_{ij}|)L_j z_{j1}+(N-k)\delta_j\leqslant$$
$$-\beta l_1+(N-k)\varepsilon_1\leqslant-\beta l_1.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{t-T_1}k_{ij}(t-s)\,\mathrm{d}s=\int_{T_1}^{\infty}k_{ij}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{\beta l_1}{3\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}L_j|c_{ij}|\eta},$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}d_i\xi_i\varepsilon_1\leqslant\frac{\beta l_1}{3},$$

则

$$D^+|x_i(t)|\leqslant-\beta l_1+\sum_{j=1}^{n}L_j|c_{ij}|\eta\int_{-\infty}^{t-T_1}k_{ij}(t-s)\,\mathrm{d}s+d_i\delta_i\leqslant-\frac{\beta l_1}{3}. \qquad (13)$$

进一步可得

$$|x_i(t_{k+1})|\leqslant-(\beta l_1/3)(t_{k+1}-t_k-T_1)+|x_i(t_k+T_1)|\leqslant$$
$$-(\beta l_1/3)(T^*-T_1)+z_{i1}+(N-k)\delta_i<0.$$

这一矛盾表明存在 $t\in[t_k+T_1,t_{k+1}]$ 使式(12)成立. 为了证明式(12)对所有 $t\geqslant t_{k+1}$ 成立, 我们还需证明对于 $t\geqslant t$, 式(12)成立. 如若不然, 则存在 $t^*\geqslant t$ 和某一 i 使

$$|x_i(t^*)|=z_i+(N-k-1)\delta_i$$

且 $D^+|x_i(t^*)|\geqslant 0$. 但仿式(13)的证法可知 $D^+|x_i(t^*)|<0$. 故矛盾. 所以对一切 $t\geqslant t$, 式(12)成立, 从而对一切 $t\geqslant t_{k+1}$, 式(12)成立. 在式(10)中取 $k=N$ 得到: 如果 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\eta$ $(-\infty<t\leqslant t_0)$, 则 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varepsilon$ $(t\geqslant T, T=t_0+NT^*)$. 由全局渐近稳定的定义[24]知式(7)的零解是全局渐近稳定的, 即系统(1)的平衡点是全局渐近稳定的. 证毕.

当激活函数 $\boldsymbol{g}$ 为分段线性的有界函数时, 文[18]给了系统(1)的一个全局渐近稳定性的充分条件. 当 $a_{ii}\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 文[18]的主要结论是本文定理2的一个特殊情况. 由定理2可得到以下结论.

推论　考虑如下时滞神经网络系统

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_i(u_i(t))+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(u_j(t))+$$
$$b_{ij}g_j(u_j(t-\tau_{ij}(t)))+J_i\qquad(i=1,2,\cdots,n), \qquad (14)$$

其中, $\tau_{ij}(t)\geqslant 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为连续有界函数. 如果假设(Ⅰ)成立, 且 $\boldsymbol{DL}^{-1}-(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)$ 为M_矩阵, 则对任意输入 $\boldsymbol{J}$, 系统(14)有唯一全局渐近稳定的平衡点.

文[10, 11, 13, 15, 17]的主要结论是推论的特殊情况.

3 结 束 语

本文对具有无穷时滞的细胞神经网络平衡点的存在性、唯一性和全局渐近稳定性进行了全面分析. 放弃了激活函数的有界性、单调性和可微性假设的情况下, 得到了神经网络系统平衡点的存在性、唯一性条件. 通过构造适当的微分_积分不等式, 利用M_矩阵理论, 得到了平衡点全局渐近稳定的充分条件. 这些条件适用于具有对称和非对称关联矩阵, 以及激活函数为全局Lipschitz连续的时滞神经网络系统. 这些条件是显式的, 在实际应用中便于检验, 从而

为神经网络的设计提供了一定的理论基础•

[参 考 文 献]

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: theory [J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, **35**(10): 1257—1272.

[2] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: applications[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, **35**(10): 1273—1290.

[3] Chua L O. CNN: A Paradigm for Complexity [M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[4] Arik S, Tavanoglu V. Equilibrium analysis of delayed CNNs[J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 1998, **45**(2): 168—171.

[5] Civalleri P P, Gill L M, Pandolfi L. On stability of cellular neural networks with delay[J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 1993, **40**(3): 157—164.

[6] Roska T, Wu C W, Balsi M, et al. Stability and dynamics of delay_type general and cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1992, **39**(6): 487—490.

[7] Roska T, Wu C W, Balsi M, et al. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay_type templates[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1993, **40**(4): 270—272.

[8] Arik S, Tavanoglu V. On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 2000, **47**(4): 571—574.

[9] ZHANG Ji_ye. Absolutely exponential stability in delayed cellular neural networks[J]. Internat J Circuit Theory Appl, 2002, **30**(4): 395—409.

[10] Lu H. On stability of nonlinear continuous_time neural networks with delays[J]. Neural Networks, 2000, **13**(10): 1135—1143.

[11] 曹进德, 林怡平. 一类时间滞后神经网络模型的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(8): 851—855.

[12] Zhang Q, Ma R, Xu J. Stability of cellular neural networks with delay[J]. Electronics Letters, 2001, **37**(9): 575—576.

[13] Gopalsamy K, He X. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays[J]. Physica D, 1994, **76**: 344—358.

[14] Sree Hari Rao V, Phaneendra Bh R M. Global dynamics of bidirectional associative memory neural networks involving transmission delays and dead zones[J]. Neural Networks, 1999, **12**(3): 455—465.

[15] ZHANG Ji_ye, JIN Xue_song. Global stability analysis in delayed Hopfield neural networks models[J]. Neural Networks, 2000, **13**(7): 745—753.

[16] ZHANG Ji_ye, YANG Yi_ren. Global stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with time delay[J]. Internat J Circuit Theory Appl, 2001, **29**(2): 185—196.

[17] ZHANG Ji_ye. Global stability analysis in delayed cellular neural networks[J]. Computers and Mathematics With Applications, 2003, **45**(10/11): 1707—1720.

[18] Zhang Y, Peng P A, Leung K S. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay[J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 2001, **48**(6): 680—687.

[19] Forti M, Tesi A. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems [J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 1995, **42**(7): 354—366.

[20] 舒仲周, 张继业, 曹登庆. 运动稳定性[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2001.

[21] Siljiak D D. Large_Scale Dynamic Systems—Stability and Structure [M]. New York: Elsevier North_Holland, Inc, 1978.

[22] 张继业, 杨翊仁, 曾京. 无限维关联系统的弦稳定性[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(7): 715—720.

[23] ZHANG Ji_ye. Globally exponential stability of neural networks with variable delays[J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 2003, **50**(2): 288－291.

[24] Hale J. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1977.

Global Stability Analysis in Cellular Neural Networks With Unbounded Time Delays

ZHANG Ji_ye
(National Traction Power Laboratory, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R.China)

Abstract: Without assuming the boundedness and differentiability of the activation functions, the conditions ensuring existence, uniqueness, and global asymptotical stability of the equilibrium point of cellular neural networks with unbounded time delays and variable delays were studied. Using the idea of vector Liapunov method, the intero_differential inequalities with unbounded delay and variable delays were constructed. By the stability analysis of the intero_differential inequalities, the sufficient conditions for global asymptotic stability of cellular neural networks were obtained.

Key words: neural network; time delay; cellular neural network; stability